Глава 25

ГРУППЫ ЛИ

Группа Ли G; линейная группа Ли; касательный вектор; алгебра Ли Λ группы G; произведение Ли; тождество Якоби; абстрактная алгебра Ли; структурные постоянные; локальный изоморфизм групп $SU(2)$ и $SO(3)$; экспоненциальное отображение алгебры Λ в G; логарифмические (или нормальные) координаты в G; присоединенные представления алгебр Ли и односвязных групп Ли; формула Кэмпбелла—Бейкера—Хаусдорфа; трансляция карты; идеалы; простая алгебра Ли; локальный и глобальный гомоморфизмы групп; теория гомоморфизмов; центр группы; центр алгебры; накрывающая группа; прямая и полупрямая суммы алгебр Ли; классификация простых алгебр Ли.

Предварительные сведения: гл. 18, 19, 23, 24, § 21.1—21.4

Темой данной главы является современная теория непрерывных групп, часто неточно называемая теорией групп Ли. Большинство самих этих групп играет определенную роль в физике и математике на вполне элементарном уровне. К этим группам относятся группы вращений и движений, группы Лоренца и Пуанкаре, унитарные и симплектические группы. Новое здесь состоит в изучении групп и связанных с ними структур с более глубокой аналитической, алгебраической и топологической точек зрения. Ключом к такого рода изучению является теория алгебр Ли и взаимодействия между группами и их алгебрами. Это взаимодействие уже играло некоторую роль в квантовой механике с самого начала в том смысле, что элементы алгебр Ли появлялись в виде операторов, которые выводились из свойств симметрии физической системы. В течение последних 25 лет многое из терминологии и некоторые специальные группы, такие, как группы, выводимые из алгебры Ли G_2, появились в физике частиц. Правда, до сих пор применение указанной теории носило в основном эвристический характер, но представляется вполне вероятным, что по мере развития физической теории детали математического аппарата будут иметь все большее значение. В большинстве случаев теория групп Ли излагается весьма глубоко и поэтому оказывается затруднительной для неспециалиста. Я пытался представить эту теорию максимально элементарным образом, по возможности согласованным с полным описанием. Например, векторное поле на многообразии группы по определению состоит из таких компонент, которые преобразуются по некоторому закону (так это делается в физике), а не как абстрактное отображение (дифференцирование) в алгебре функций из класса C^∞.

25.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВАНИЕ ЦЕЛЕЙ

Группой Ли является группа G, элементы которой g, h, ... можно рассматривать как точки некоторого многообразия таким образом, что теоретико-групповые свойства элементов изменяются непрерывно на этом многообразии. Другими словами, если g, h и gh представлены в картах $\{U, \varphi, N\}$, $\{U', \varphi', N'\}$ и $\{U'', \varphi'', N''\}$ (эти карты не обязательно различны), то координаты элемента gh должны быть непрерывными функциями координат элементов g и h, т. е. компоненты $\varphi''(gh)$ должны непрерывно зависеть от компонент $\varphi(g)$ и $\varphi'(h)$; координаты g^{-1} должны быть также непрерывными функциями координат g. Если G—группа матриц, подобно $SU(2)$ или $SO(3)$, и если многообразие определено, как в § 19.5, то рассматриваемая непрерывная зависимость получается автоматически, поскольку элементы матриц AB и A^{-1} (для невырожденной A) зависят непрерывно от элементов матриц A, B и A соответственно. Если G—абстрактная группа, то непрерывную зависимость, о которой здесь говорится, следует постулировать.

Формальное определение можно дать многими способами, ибо очень немногие основные свойства влекут за собой многие другие свойства. Например, часто постулируют, что группа должна быть C^∞-многообразием, но Гильберт в 1900 г. предположил, что от группы необходимо лишь требовать быть C^0-многообразием, и тогда она автоматически будет C^∞-многообразием; это предположение в 1952 г. проверил Глисон и независимо от него Монтгомери и Зиппин. Они показали, что многообразие любой группы Ли на самом деле является вещественным *аналитическим* многообразием. Кроме того, необходимо лишь постулировать одну координатную карту на группе, а именно карту, локализованную в малой окрестности единичного элемента, в которой gh и g^{-1} непрерывны; остальная часть структуры многообразия тогда получается при помощи аксиом группы. Определение, данное в этой книге, постулирует только то, что требуется для вывода остающихся свойств элементарными методами.

Известные группы Ли, включая все те, которые (насколько я знаю) когда-либо встречались в приложениях, являются *линейными* группами Ли, т. е. они изоморфны группам линейных преобразований в конечномерном пространстве или, что эквивалентно, изоморфны группам матриц. Это часто относится даже к тем группам, которые появляются как группы нелинейных преобразований. Например, группа преобразований Мёбиуса в комплексной плоскости

$$z \longrightarrow (\alpha z+\beta)/(\gamma z+\delta) \quad (\alpha\delta-\gamma\beta \neq 0)$$

изоморфна ограниченной группе Лоренца, которая линейна. Далее, многое в теории упрощается в случае, когда рассматриваются группы матриц, а не абстрактные группы Ли; например, экспонента от матрицы, $\exp M$, элементарна и хорошо известна, тогда как соответствующее построение для алгебры Ли абстрактной группы Ли требует техники, которая будет развита в последующих пяти параграфах. Итак, для физических применений одной теории линейных групп, по-видимому, будет достаточно. Однако абстрактная формулировка представляется необходимой для полной теории. Даже если начинают с матриц, теория приводит к группам, которые не являются, по крайней мере очевидным образом, группами матриц, а именно к факторгруппам G/H и полупрямым произведениям. Любая *компактная* группа Ли линейна, но доказательство этого основывается на весьма глубоких результатах теории; см. книгу Шевалле [1946]. В приложении к этой главе описываются две нелинейные группы Ли. Абстрактная теория представлена ниже, но в различных местах указано сведение к матрицам; см. упражнения 1—7 в § 25.14.

Пусть G—группа. Допустим, что в пространстве, точками которого являются элементы G, определена n-мерная координатная карта $\{\boldsymbol{U}, \varphi, N\}$, такая, что $\boldsymbol{U}$ содержит единичный элемент 1 группы. (Мы используем символ 1, поскольку символ e потребуется для экспоненты.) Предположим для удобства, что φ отображает 1 в начало координат пространства $\mathbb{R}^n$: $\varphi(1)=0$. Подмножество $\boldsymbol{U}_0$ множества $\boldsymbol{U}$ называется *открытым* (как в гл. 23), если $\varphi(\boldsymbol{U}_0)$—открытое подмножество множества N в $\mathbb{R}^n$.

Мы допускаем, что произведения и обратные элементов группы непрерывны в этой карте, когда их координаты определены. Тогда мы можем определить меньшую карту со специальными свойствами следующим образом. Пусть g и h принадлежат $\boldsymbol{U}$. Если g и h достаточно близки к 1, т. е. если $\varphi(g)$ и $\varphi(h)$ достаточно близки к началу координат в $\mathbb{R}^n$, то gh, g^{-1}, h^{-1} также близки к 1. В частности, если $g=h=1$, то gh, g^{-1}, h^{-1} равны 1, а их координаты определены и все равны нулю. Следовательно, по непрерывности существует такая окрестность $\boldsymbol{U}_1$ единицы, что если g и h принадлежат $\boldsymbol{U}_1$, то координаты элементов gh, g^{-1}, h^{-1} определены и принадлежат открытому множеству N в $\mathbb{R}^n$. Удобно рассмотреть даже меньшую окрестность $\boldsymbol{U}_0 \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{U}_1 \cap \boldsymbol{U}_1^{-1}$, где $\boldsymbol{U}_1^{-1} \overset{\text{def}}{=} \{g^{-1}\colon g \in \boldsymbol{U}_1\}$, и определить $N_0=\varphi(\boldsymbol{U}_0)\subset N$. Тогда если g и h принадлежат $\boldsymbol{U}_0$, то gh содержится в $\boldsymbol{U}$, в то время как g^{-1} и h^{-1} содержатся в $\boldsymbol{U}_0$. Векторнозначная функция $\mathrm{m}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ поэтому определяется для всех $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ из N_0 при помощи равенства

$$\mathrm{m}(\varphi(g),\ \varphi(h))=\varphi(gh)\in N;$$

аналогично $\mathrm{l}(\mathbf{x})$ определяется как

$$\mathrm{l}(\varphi(g))=\varphi(g^{-1})\in N_0.$$

Группа G совместно с n-мерной картой $\{\boldsymbol{U}, \varphi, N\}$ называется *n-мерной группой Ли*, если функции $\mathrm{m}(\cdot,\ \cdot)$ и $\mathrm{l}(\cdot)$ определены в открытом множестве N_0, как описано выше, и принадлежат классу C^4. В дальнейшем из $\{\boldsymbol{U}, \varphi, N\}$ при помощи групповых операций будут получены другие карты, с тем чтобы сделать G многообразием.

Все группы, описанные в гл. 19, являются группами Ли, когда в них надлежащим образом определены координатные карты.

(Некоторые авторы требуют, чтобы многообразие группы Ли было связным; по причинам, которые будут указаны в § 25.11, это требование не обязательно.)

Например, пусть G — группа вращений $SO(3)$ с внутренними координатами θ_x, θ_y, θ_z, рассмотренными в § 19.6. Тогда в качестве $\boldsymbol{U}$ можно взять множество всех элементов группы, для которых $\|\theta\| < \pi$ (т. е. все элементы, для которых $\|\theta\| \neq \pi$), а в качестве $\boldsymbol{U}_0$ — множество элементов, для которых $\|\theta\| < \pi/2$. Таким образом, N представляет собой внутренность шара K в $\mathbb{R}^3$, который описан в § 19.6, а N_0 — открытый шар, радиус которого равен половине радиуса шара K. Те же координаты можно использовать и для $O(3)$; в этом случае вся вторая компонента многообразия находится вне $\boldsymbol{U}$.

Для того чтобы вывести свойства групп Ли из данных выше определений, строится алгебра $\Lambda = \Lambda(G)$ группы Ли G: Λ есть n-мерное линейное пространство элементов λ, μ, ..., в котором определена мультипликативная операция $[\lambda, \mu]$, так называемое произведение Ли. Структура алгебры Λ полностью определяется свойствами группы G в произвольно малой окрестности единицы 1; с другой стороны, Λ полностью определяет *многие* свойства группы G. Затем строится так называемое экспоненциальное отображение Λ в G; оно обобщает отображение $M \longrightarrow e^M$ для матриц. В некоторой окрестности начала координат пространства Λ это отображение является взаимно однозначным, а компоненты элемента λ служат (через обратное отображение) в качестве так называемых логарифмических координат в G. Из этой карты позднее получаются при помощи трансляций в G другие координатные карты, причем они связаны с ней аналитически. Формула КБХ (см. § 25.10) в явном виде задает $\mathfrak{m}(\lambda, \mu)$ через λ и μ и показывает, что в логарифмических координатах зависимость произведения gh от g и h является аналитической. Эта формула связана лишь со структурой алгебры Ли, и отсюда следует, что в окрестности единицы 1, где определены логарифмические координаты, структура группы G целиком зависит от ее инфинитезимальных элементов.

При исследовании групп Ли в приблизительно равных пропорциях комбинируются анализ, алгебра и топология. Применение мощных методов линейной алгебры дает полную классификацию алгебр Ли, из которой в свою очередь следует классификация групп Ли. Это может показаться неожиданным, если учесть, что часто группы Ли возникают как группы нелинейных преобразований — см. книгу Эйзенхарта [1933].

25.2. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ $\mathfrak{m}(\cdot, \cdot)$ И $\mathfrak{l}(\cdot)$

Поскольку функции $\mathfrak{m}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\mathfrak{l}(\mathbf{x})$ принадлежат классу C^4, они могут быть разложены в ряды Тейлора по компонентам x^i и y^i переменных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, включая члены третьего порядка с остаточными членами четвертого порядка. Из группового отношения $a1 = 1a = a$ для любого a следует, что

$$\mathfrak{m}(\mathbf{x}, 0) \equiv \mathfrak{m}(0, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} \tag{25.2.1}$$

[вспомним, что $\varphi(1) = 0$]. Поэтому в разложении $\mathfrak{m}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ вблизи начала координат обращается в нуль постоянный член, линейная часть разложения представляет собой $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, а квадратичная часть разложения содержит члены типа $x^j y^k$, но не содержит членов типа $x^j x^k$ или $y^j y^k$; таким образом,

$$m^i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x^i + y^i + a^i_{jk} x^j y^k + b^i_{jkl} x^j x^k y^l + c^i_{jkl} x^j y^k y^l + \ldots, \tag{25.2.2}$$

где a, b, c — коэффициенты разложения и использовано соглашение о суммировании.

Аксиома ассоциативности теории групп налагает на $\mathfrak{m}(\cdot, \cdot)$ ограничение

$$\mathfrak{m}(\mathfrak{m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{z}) = \mathfrak{m}(\mathbf{x}, \mathfrak{m}(\mathbf{y}, \mathbf{z})). \tag{25.2.3}$$

Если рассматривать только линейные и квадратичные члены в разложении $\mathfrak{m}(\cdot, \cdot)$, то (25.2.3) удовлетворяется автоматически; тем не менее ассоциативность накладывает некоторые ограничения на коэффициенты a^i_{jk} в квадратичной части, что можно увидеть, если включить в разложение также и члены третьего порядка. Подстановка (25.2.2) в (25.2.3) дает (после приведения подобных членов)

$$\begin{aligned} a^i_{jk} a^j_{lm} x^l y^m z^k + b^i_{jkl} (x^j y^k + x^k y^j) z^l = \\ = a^i_{jk} a^k_{lm} x^j y^l z^m + c^i_{jkl} x^j (y^k z^l + y^l z^k). \end{aligned} \tag{25.2.4}$$

Исключим теперь из этого выражения коэффициенты b и c. Так как j, k, l, m являются индексами суммирования, их можно переименовать в каждом члене таким образом, чтобы множители $x^k y^l z^m$ появились всюду; тогда, поскольку данное уравнение является тождеством по $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, результирующий коэффициент при $x^k y^l z^m$ должен обратиться в нуль, что дает

$$a^i_{jm} a^j_{kl} - a^i_{kj} a^j_{lm} = c^i_{klm} + c^i_{kml} - b^i_{klm} - b^i_{lkm}.$$

Теперь просуммируем данное выражение по четным перестановкам тройки чисел k, l, m и из полученной суммы вычтем результат суммирования по нечетным перестановкам; правая часть при этом обратится в нуль, а в левой части получится сумма, которую можно записать в виде

$$0=\sum \left(a^i_{jm}-a^i_{mj}\right)\left(a^j_{kl}-a^j_{lk}\right) \qquad (25.2.5)$$

и в которой суммирование проводится по четным перестановкам тройки k, l, m.

Аксиомы группы не налагают больше никаких ограничений на коэффициенты a^i_{jk}, ибо уже приведенных ограничений достаточно, чтобы определить алгебру Ли, и в конце концов окажется, что любая алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой группы Ли. (Это весьма глубокий результат, см. книгу Хаузнера и Шварца [1968, § III.7].)

Из уравнения

$$\mathbf{m}(\mathbf{l}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x})\equiv\mathbf{m}(\mathbf{x},\ \mathbf{l}(\mathbf{x}))\equiv 0,$$

которое выражает собой групповое отношение, заключающееся в том, что $a^{-1}a=aa^{-1}=1$ для всех a, можно получить с точностью до квадратичных членов разложение функции $\mathbf{l}(\mathbf{x})$:

$$l^i(\mathbf{x})=-x^i+a^i_{jk}x^jx^k+\ldots . \qquad (25.2.6)$$

25.3. АЛГЕБРА ЛИ ГРУППЫ ЛИ

Алгебра Ли Λ группы Ли G основывается на так называемых инфинитезимальных элементах G, т. е. на касательных векторах к гладким кривым, выходящим из единичного элемента 1. Такая кривая задается функцией $g(t)$, определенной для некоторого интервала $0\leqslant t\leqslant\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ и такой, что $g(0)=1$, а соответствующая кривая $\mathbf{x}(t)=\varphi(g(t))$ в параметрическом пространстве $\mathbb{R}^n$ имеет касательную в каждой точке (включая $t=0$, которая фактически является единственной существенной точкой). Если

$$\mathbf{x}(t)=\varphi(g(t))=\lambda t+\ldots , \qquad (25.3.1)$$

то при преобразовании координат компоненты λ^i вектора λ преобразуются как компоненты контравариантного вектора в точке $\mathbf{x}=0$ многообразия (см. § 26.1). А именно, поскольку

$$\lambda=d\varphi(g(t))/dt\,|_{t=0},$$

видно, что если ввести новые координаты

$$x'^i=x'^i(x^1,\ \ldots,\ x^n)\quad (i=1,\ \ldots,\ n),$$

то

$$\lambda'^i=\partial x'^i/\partial x^j\,|_{\mathbf{x}=0}\,\lambda^j.$$

Этот вектор называется *касательным вектором в* 1 *к кривой* $g(t)$.

[Согласно приведенному выше определению, кривая задается параметризацией, а также множеством групповых элементов в ней; $g(t)$, $g(2t)$, $g(2^t-1)$ — различные кривые, выходящие из 1, и они имеют различные касательные векторы, хотя все эти векторы имеют одинаковое направление.]

Множество всех касательных векторов в 1 в некоторой n-мерной группе G составляет n-мерное векторное пространство над вещественным полем $\mathbb{R}$, так как если $\lambda t+\ldots$ и $\mu t+\ldots$ являются координатами двух гладких кривых, то $(a\lambda+b\mu)t+\ldots$, где a и b — вещественные числа, представляет собой координату третьей гладкой кривой. Это векторное пространство станет алгеброй, называемой *алгеброй Ли* $\Lambda=\Lambda(G)$ *группы* G, когда будет определено умножение, основанное на групповом умножении в G.

Пусть $g(t)$ и $h(t)$ — выходящие из 1 гладкие кривые в G. Если функция $k(t)$ определяется как коммутатор $g(t)$ и $h(t)$, т. е. если

$$k(t)=g(t)h(t)g(t)^{-1}h(t)^{-1},$$

и если координаты $g(t)$ и $h(t)$ суть

$$\varphi(g(t))=\lambda(t)+\ldots, \quad \varphi(h(t))=\mu t+\ldots,$$

то непосредственное вычисление показывает, что координатой функции $k(t)$ является

$$\varphi(k(t))=\nu t^2+\ldots, \tag{25.3.2}$$

где

$$\nu^i=a^i_{;k}(\lambda^j\mu^k-\lambda^k\mu^j)=(a^i_{jk}-a^i_{kj})\lambda^j\mu^k. \tag{25.3.3}$$

Из формулы (25.3.2) следует, что функция $\tilde{k}(t)\overset{\text{def}}{=}k(\sqrt{t})$ есть кривая в G, выходящая из 1, и что ν — ее касательный вектор; ν называется *произведением Ли* векторов λ и μ и обозначается при помощи *скобок Ли*:

$$\nu=[\lambda, \mu]. \tag{25.3.4}$$

[Установив довольно сложные законы преобразования коэффициентов a^i_{jk}, можно получить непосредственно из (25.3.3), что ν^i преобразуются как компоненты вектора, когда изменяются координаты.]

Из (25.3.3) следует, что произведение Ли линейно по каждому множителю и антисимметрично: $[\mu, \lambda]=-[\lambda, \mu]$; из выражения (25.2.5), которое было выведено из ассоциативности в G, следует, что произведение Ли также удовлетворяет *тождеству Якоби*

$$[\lambda, [\mu, \nu]]+[\mu, [\nu, \lambda]]+[\nu, [\lambda, \mu]]=0. \tag{25.3.5}$$

Примером алгебры Ли является алгебра векторов в $\mathbb{R}^3$, где произведение Ли определяется как векторное произведение $[\lambda, \mu]=\lambda\times\mu$ в обозначениях Гиббса. Тождество Якоби можно проверить, либо записывая (25.3.5) покомпонентно, либо используя тождество $\lambda \times (\mu \times \nu) = (\lambda \cdot \nu)\mu - (\lambda \cdot \mu)\nu$. Алгебры Ли матриц будут рассмотрены в § 25.5.

25.4. АБСТРАКТНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Конечномерное векторное пространство над полем скаляров $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$) в случае, когда в этом пространстве определено умножение $[\lambda, \mu]$, которое является линейным по каждому множителю, антисимметричным и удовлетворяет тождеству Якоби (25.3.5), называется *вещественной* (соответственно *комплексной*) алгеброй Ли. Алгебра Ли, полученная из группы, является вещественной.

Алгебра Ли в общем случае не только некоммутативна, но и неассоциативна; иначе говоря, в общем случае $[\lambda, [\mu, \nu]] \neq [[\lambda, \mu], \nu]$; она не имеет единичного элемента, потому что $[\lambda, \lambda] = 0$ для любого λ в силу антисимметрии произведения $[\lambda, \mu]$.

Можно полностью описать n-мерную алгебру Ли, выбрав в ней базис $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ (множество n линейно независимых векторов), а затем задав n^3 *структурных постоянных* C^i_{jk} (разумеется, не все они являются независимыми), определяемых как

$$[\varepsilon_j, \varepsilon_k] = C^i_{jk}\varepsilon_i. \tag{25.4.1}$$

25.5. АЛГЕБРЫ ЛИ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП

Пусть G — группа матриц $L, M, \ldots$ размера $(m \times m)$, т. е. подгруппа группы $GL(m, \mathbb{R})$ или группы $GL(m, \mathbb{C})$. Тогда ее алгебра Ли может быть реализована в виде алгебры Ли матриц размера $m \times m$. Выходящая из 1 кривая имеет вид $A(t) = I + tL + \ldots$; матрицы L, получаемые таким образом, образуют векторное пространство Λ размерности, не превышающей $2m^2$. Чтобы найти произведение Ли в Λ, положим, что $B(t) = I + tM + \ldots$ — другая выходящая из 1 кривая, и определим

$$K(t) = A(t)B(t)A(t)^{-1}B(t)^{-1} = \\ = (I + tL + \ldots)(I + tM + \ldots)(I - tL + \ldots)(I - tM + \ldots), \tag{25.5.1}$$

как это делалось в § 25.3 для функции $k(t)$ в многообразии абстрактной группы. После выполнения умножений линейные члены взаимно уничтожаются. Квадратичные члены в $K(t)$ получаются из непостоянных членов не более чем в двух множителях, в то время как в остальных множителях берется I. Все квадратичные члены, получающиеся от $A(t)A(t)^{-1}$ и от $B(t)B(t)^{-1}$, взаимно уничтожаются, так что в выражении остаются лишь те квадратичные члены, которые появились в результате умножения линейного члена от $A(t)$

или $A(t)^{-1}$ на линейный член от $B(t)$ или $B(t)^{-1}$. Поэтому

$$K(t) = I + t^2(LM - ML) + \ldots . \tag{25.5.2}$$

Тогда, согласно определению произведения Ли [см. (25.3.2) и (25.3.4)],

$$[L, M] = LM - ML. \tag{25.5.3}$$

Этот результат иллюстрирует общее правило, заключающееся в том, что любую ассоциативную алгебру можно сделать алгеброй Ли, если положить $[\lambda, \mu] = \lambda\mu - \mu\lambda$, где через $\lambda\mu$ и $\mu\lambda$ обозначены произведения в исходной ассоциативной алгебре.

Матрицы, подобные описанным выше L и M, в гл. 20 были названы инфинитезимальными элементами группы; они имели вид $L = dA(t)/dt|_{t=0}$ и т. д., и было показано, что для трехмерной группы $SO(3)$ в качестве инфинитезимальных элементов можно принять матрицы

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем эти матрицы удовлетворяют соотношениям

$$[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = \varepsilon_k \quad (i\,j\,k = 1\,2\,3,\ 2\,3\,1,\ 3\,1\,2).$$

В гл. 22 было показано, что для группы $SU(2)$, которая также трехмерна, в качестве инфинитезимальных элементов можно взять матрицы

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

и эти матрицы удовлетворяют тем же соотношениям, что и ε_i, а именно

$$[\eta_i, \eta_j] = \eta_k \quad (i\,j\,k = 1\,2\,3,\ 2\,3\,1,\ 3\,1\,2).$$

Согласно (25.4.1), эти соотношения полностью определяют структуру соответствующей алгебры Ли. Поэтому если через Λ_3 и Λ_2 обозначить алгебры Ли соответственно групп $SO(3)$ и $SU(2)$, то линейное отображение Λ_3 на Λ_2, индуцируемое посредством $\varepsilon_i \to \eta_i$ ($i=1$, 2, 3), является изоморфизмом. Если трактовать Λ_2 и Λ_3 как абстрактные алгебры Ли, то они тождественны, тогда как соответствующие им группы не являются таковыми. Как будет видно позднее, изоморфизм алгебр индуцирует взаимно однозначное отображение групп только в окрестности единицы. В таком локальном смысле это отображение является изоморфизмом, но, будучи расширено глобально, оно становится $(2 \to 1)$-гомоморфизмом группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$, который был рассмотрен в § 19.7.

Заметим, что Λ_2 и Λ_3 являются *вещественными* алгебрами Ли. Хотя матрицы η_1, η_2, η_3 и комплексны, Λ_2 состоит из линейных комбинаций этих матриц с вещественными коэффициентами.

25.6. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Мы ищем кривую $g(t)$ в группе G, такую, что

$$g(t+s)=g(t)\,g(s); \tag{25.6.1}$$

точки этой кривой образуют одномерную абелеву подгруппу; $g(0)$ есть 1 группы G. Соответствующая кривая $\mathbf{x}(t)=\varphi(g(t))$ проходит через начало координат координатного пространства $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет уравнению

$$x^i(t+s)=m^i(\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}(s)). \tag{25.6.2}$$

Взяв от этого уравнения d/ds и положив затем $s=0$, получим

$$\dot{x}^i(t)=q^i_j(\mathbf{x}(t),\ 0)\,\lambda^j, \tag{25.6.3}$$

где $q^i_j(\cdot\ ,\ \cdot)$ определяется как

$$q^i_j(\mathbf{x},\ \mathbf{y})=\partial m^i(\mathbf{x},\ \mathbf{y})/\partial y^j \tag{25.6.4}$$

и принадлежит классу C^3, а λ^j $(j=1,\ \ldots,\ n)$—компоненты касательного вектора $\boldsymbol{\lambda}$ к $\mathbf{x}(t)$ в $t=0$. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (25.6.3) при начальном условии $\mathbf{x}(0)=0$ имеет для данного $\boldsymbol{\lambda}$ единственное решение $\mathbf{x}(t)$ в некоторой окрестности $t=0$. Из вида (25.6.3) ясно, что решение зависит от $\boldsymbol{\lambda}$ и t только через комбинацию $t\boldsymbol{\lambda}$; поэтому мы можем записать решение как $\mathbf{x}(t,\ \boldsymbol{\lambda})=\mathbf{X}(t\boldsymbol{\lambda})$. Соответствующая кривая $g(t)$ в G обозначается через $\exp(t\boldsymbol{\lambda})$ или $e^{t\boldsymbol{\lambda}}$ в силу уравнения (25.6.1), которое теперь принимает вид $e^{(t+s)\boldsymbol{\lambda}}=e^{t\boldsymbol{\lambda}}e^{s\boldsymbol{\lambda}}$; следовательно, $\mathbf{X}(t\boldsymbol{\lambda})=\varphi(e^{t\boldsymbol{\lambda}})$. Это обобщает определение экспоненциальной функции абстрактным образом до отображения алгебры Ли Λ на группу Ли G, но, в случае когда элементами G и Λ являются матрицы, это определение согласуется с обычным. Функция $\mathbf{X}(\cdot)$ принадлежит классу C^3.

До сих пор уравнение (25.6.1) использовалось только для таких s, которые принадлежат малой окрестности нуля, но теперь будет показано, что это функциональное уравнение или, что то же самое, уравнение (25.6.2) справедливо для всех t и всех s.

Теорема. *Решение* $\mathbf{x}(t)$ *уравнения* (25.6.3) *удовлетворяет уравнению* (25.6.2) *для всех* t *и* s, *таких, что* $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(s)$ *и* $\mathbf{x}(t+s)$ *определены.*

Замечание 1. Это утверждение не следует очевидным образом из одного только вида уравнений (25.6.2) и (25.6.3), потому что, как будет видно, в доказательстве придется использовать ассоциативный закон группового умножения.

Замечание 2. Коль скоро функциональное уравнение $g(t+s)=g(t)g(s)$ было установлено для t, s и $t+s$ в интервале $(-T, T)$, само уравнение затем можно использовать для определения $g(t)$ при t из интервала $(-2T, 2T)$, затем при t из $(-4T, 4T)$ и т. д. Вследствие этого $g(t)$ однозначно определено для всех t и удовлетворяет функциональному уравнению для всех t и s — детали предоставляем читателю.

Замечание 3. Если G — группа матриц, так что элементы λ алгебры Λ являются также матрицами, то соответствующее уравнение

$$e^{\lambda(t+s)}=e^{\lambda t}e^{\lambda s} \tag{25.6.5}$$

обычно устанавливается следующим образом. Матрица

$$\mu(s)=(e^{\lambda t})^{-1}e^{\lambda(t+s)},$$

рассматриваемая как функция от s, удовлетворяет тому же самому дифференциальному уравнению и тому же начальному условию, что и функция $e^{\lambda s}$, а именно

$$d\mu(s)/ds=\mu(s)\lambda, \quad \mu(0)=I;$$

поскольку решение этой задачи с начальными данными единственно, отсюда следует, что

$$(e^{\lambda t})^{-1}e^{\lambda(t+s)}=e^{\lambda s},$$

что эквивалентно (25.6.5). Это рассуждение приведено в качестве модели помещенного ниже доказательства для абстрактного случая.

Доказательство теоремы. Будет показано, что функция

$$\mathbf{y}(s)=\mathbf{m}(\mathbf{l}(\mathbf{x}(t)),\ \mathbf{x}(t+s)), \tag{25.6.6}$$

являющаяся координатой элемента группы $g(t)^{-1}g(t+s)$, удовлетворяет тому же самому дифференциальному уравнению (25.6.3) и тому же начальному условию, что и функция $\mathbf{x}(s)$, которая является координатой элемента группы $g(s)$; поскольку решение этой задачи с начальными данными единственно, отсюда последует, что $g(s)=g(t)^{-1}g(t+s)$; поэтому $g(t+s)=g(t)g(s)$, что и требовалось доказать. То, что функция $\mathbf{y}(s)$ удовлетворяет начальному условию $\mathbf{y}(0)=0$, следует из равенства $g(t)^{-1}g(t)=1$. Дифференцирование (25.6.6) по s и подстановка выражения, подобного (25.6.3), для $\dot{x}^j(t+s)$ дают

$$\dot{y}^i(s)=q^i_j(\mathbf{l}(\mathbf{x}(t)),\ \mathbf{x}(t+s))\,q^j_k(\mathbf{x}(t+s),\ 0)\,\lambda^k. \tag{25.6.7}$$

Теперь будет показано, что полный коэффициент при λ^k в правой части этого уравнения равен $q^i_k(\mathbf{y}(s),\ 0)$, так что $\mathbf{y}(s)$ удовлетворяет тому же уравнению (25.6.3), что и $\mathbf{x}(s)$. Для этого воспользуемся законом ассоциативности группового умножения в следующей форме:

$$\begin{aligned} m^i(\mathbf{y}(s),\ \mathbf{z}) &= m^i(\mathbf{m}(\mathbf{l}(\mathbf{x}(t)),\ \mathbf{x}(t+s)),\ \mathbf{z})= \\ &= m^i(\mathbf{l}(\mathbf{x}(t)),\ \mathbf{m}(\mathbf{x}(t+s),\ \mathbf{z})); \end{aligned} \tag{25.6.8}$$

это эквивалентно равенству $[g(t)^{-1}g(t+s)]h = g(t)^{-1}[g(t+s)h]$. Дифференцирование по z_k дает

$$q_k^i(\mathbf{y}(s),\ \mathbf{z}) = q_j^i(\mathbf{l}(\mathbf{x}(t)),\ \mathbf{m}(\mathbf{x}(t+s),\ \mathbf{z}))\, q_k^j(\mathbf{x}(t+s),\ \mathbf{z}),$$

поэтому

$$q_k^i(\mathbf{y}(s),\ 0) = q_j^i(\mathbf{l}(\mathbf{x}(t)),\ \mathbf{x}(t+s))\, q_k^j(\mathbf{x}(t+s),\ 0),$$

так что $\mathbf{y}(s)$ и $\mathbf{x}(s)$ удовлетворяют одному и тому же уравнению, и теорема доказана.

Для $t=1$ мы имеем

$$\mathbf{X}(\lambda) = \varphi(e^\lambda).$$

Кроме того, при $\lambda = 0$ якобиан

$$\det(\partial X^i/\partial\lambda^j) = \det(q_j^i(\lambda,\ 0))$$

отличен от нуля, так как $q_j^i(0,\ 0) = \delta_j^i$. Поэтому функция $\mathbf{X}(\lambda)$ имеет обратную функцию в некоторой окрестности начала координат, и компоненты вектора λ можно взять в качестве новых координат, называемых *логарифмическими* или *нормальными* координатами элемента $g = e^\lambda$ группы в некоторой окрестности единицы в G. Можно также писать $\lambda = \ln g$. Отображение (в общем случае переводящее много элементов в один) $\lambda \to e^\lambda$ алгебры Ли Λ в группу Ли G называется *экспоненциальным* отображением. Компоненты данного вектора λ зависят, разумеется, от выбора координатной системы $\{U,\ \varphi,\ N\}$, но преобразуются как компоненты вектора, так что каждый элемент алгебры Λ (вектор) отображается в единственный элемент группы.

25.7. ЛЕММА О ВНУТРЕННИХ АВТОМОРФИЗМАХ. ОТОБРАЖЕНИЕ Ad_μ

Доказываемая ниже лемма нужна в качестве части аналитического аппарата для доказательства теоремы Кэмпбелла — Бейкера — Хаусдорфа, но представляет также и самостоятельный интерес. Как и в гл. 21, гомоморфизм группы G (абстрактной или нет) на группу невырожденных линейных преобразований векторного пространства V называется *представлением* группы G на V. Если этот гомоморфизм является взаимно однозначным (т. е. изоморфизмом), то представление называется *точным*. Если бы каждая группа Ли имела точное представление на конечномерном пространстве, то вся теория свелась бы к операциям над матрицами. Хотя это и не так, но любая односвязная группа имеет частное представление (вообще говоря, не являющееся точным) — это так называемое присоединенное представление, которое будет описано в конце данного параграфа.

Замечание. У читателя может возникнуть желание пропустить доказательства в этом и в следующих трех параграфах. Однако приведенные определения и формулировки лемм и теорем необходимы для дальнейшего.

Если e^{μ} — фиксированный элемент группы, то отображение $g \longrightarrow e^{\mu} g e^{-\mu}$ есть внутренний автоморфизм группы G (см. § 18.10); он индуцирует линейное отображение алгебры Λ в себя, которое мы и обсудим.

Прежде всего, если μ — фиксированный элемент алгебры Λ, то линейное преобразование Λ в себя, определяемое посредством $\lambda \longrightarrow [\mu, \lambda]$, обозначается через Ad_{μ}. Относительно базиса в Λ это преобразование представляется некоторой матрицей размера $n \times n$. [Эту матрицу не следует смешивать с матрицами, из которых строится алгебра Λ, когда G — линейная группа, и от которых она, вообще говоря, отличается размером. Если, например, элементами Λ являются матрицы размера $m \times m$, то Ad_{μ} может быть представлено матрицами размера $m^2 \times m^2$.] Через Ad_{μ}^2 обозначается преобразование

$$\lambda \longrightarrow \mathrm{Ad}_{\mu}(\mathrm{Ad}_{\mu}\lambda) = \mathrm{Ad}_{\mu}[\mu, \lambda] = [\mu, [\mu, \lambda]];$$

аналогично $\mathrm{Ad}_{\mu}\mathrm{Ad}_{\nu}$, Ad_{μ}^k и $\exp\{\mathrm{Ad}_{\mu}\}$ обозначают преобразования

$$\lambda \longrightarrow [\mu, [\nu, \lambda]], \quad \lambda \longrightarrow [\mu, [\mu, \ldots [\mu, \lambda] \ldots]],$$
$$\lambda \longrightarrow (I + \mathrm{Ad}_{\mu} + (1/2!)\,\mathrm{Ad}_{\mu}^2 + \ldots)\,\lambda,$$

где I — единичное преобразование в Λ.

Лемма. *Пусть e^{μ} — заданный элемент группы, и пусть для каждого λ из Λ $g(t)$ — гладкая кривая, такая, что $g(0) = 1$, а касательным вектором к ней в 1 является λ; пусть также λ' — касательный вектор в 1 к кривой $e^{\mu} g(t) e^{-\mu}$. Тогда отображение $\lambda \longrightarrow \lambda'$ есть линейное преобразование в Λ, которое в явном виде записывается как*

$$\lambda \longrightarrow \lambda' = e^{\mathrm{Ad}_{\mu}} \lambda. \tag{25.7.1}$$

Доказательство. Для любого фиксированного s в интервале [0, 1] групповой автоморфизм $g(t) \longrightarrow e^{\mu s} g(t) e^{-\mu s}$ индуцирует отображение $\lambda \longrightarrow \lambda(s)$ способом, описанным в формулировке леммы; будет доказано, что $\lambda(s)$ удовлетворяет тому же самому дифференциальному уравнению, зависящему от s, что и $e^{s\mathrm{Ad}_{\mu}}\lambda$. Логарифмическая координата элемента группы $g(t, s) = e^{\mu s} g(t) e^{-\mu s}$ равна

$$\mathrm{x}(t, s) = \ln g(t, s) = t\lambda(s) + \ldots . \tag{25.7.2}$$

Чтобы найти производную по s при $s = s_0$, запишем

$$g(t, s_0 + s) = e^{\mu s} g(t, s_0) e^{-\mu s}, \tag{25.7.3}$$
$$\mathrm{x}(t, s_0 + s) = \mathrm{m}(\mathrm{m}(s\mu, \mathrm{x}(t, s_0)), -s\mu), \tag{25.7.4}$$

где, как и в предыдущих параграфах, $\mathrm{m}(\cdot, \cdot)$ выражает координату (здесь логарифмическую) произведения двух элементов группы через координаты множителей. Вспомнив определение (25.6.4) для $q_j^i(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, определим аналогично

$$p_j^i(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \partial m^i(\mathrm{x}, \mathrm{y}) / \partial x_j. \tag{25.7.5}$$

Дифференцирование (25.7.4) по t показывает, что касательный вектор в $t=0$ к кривой $\mathbf{x}(t, s_0+s)$ имеет вид

$$\lambda^i(s_0+s)=p^i_j(s\mu, -s\mu)\,q^j_k(s\mu, 0)\,\lambda^k(s_0). \tag{25.7.6}$$

Из разложения (25.2.2) для $m^i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ получаются разложения для p^i_j и q^j_k, включающие члены первого порядка

$$p^i_j=\delta^i_j+a^i_{jl}y^l+\ldots,$$

$$q^j_k=\delta^j_k+a^j_{lk}x^l+\ldots.$$

(Все эти разложения и величины p^i_j и q^j_k выражены теперь через логарифмические координаты.) Из (25.7.6) тогда следует

$$d\lambda^i(s+s_0)/ds\,|_{s=0}=(a^i_{lk}-a^i_{kl})\,\mu^l\lambda^k(s_0),$$

т. е.

$$d\boldsymbol{\lambda}(s)/ds=[\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}(s)]=\mathrm{Ad}_\mu\boldsymbol{\lambda}(s)$$

[см. (25.3.3) и (25.3.4)]; если использовать базис в Λ, то данное уравнение становится системой n дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, решением которой является

$$\boldsymbol{\lambda}(s)=e^{s\mathrm{Ad}_\mu}\boldsymbol{\lambda}(0). \tag{25.7.7}$$

В частности, $\boldsymbol{\lambda}'=\boldsymbol{\lambda}(1)=e^{\mathrm{Ad}_\mu}\boldsymbol{\lambda}$, что и требовалось доказать.

Упражнение

Покажите, что для фиксированного $\boldsymbol{\mu}$ линейное отображение $\boldsymbol{\lambda}\to e^{\mathrm{Ad}_\mu}\boldsymbol{\lambda}$ есть автоморфизм алгебры Λ, т. е., во-первых, это отображение взаимно однозначно, а, во-вторых,

$$e^{\mathrm{Ad}_\mu}[\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{v}]=[e^{\mathrm{Ad}_\mu}\boldsymbol{\lambda}, e^{\mathrm{Ad}_\mu}\mathbf{v}]. \tag{25.7.8}$$

[Отметим, что само Ad_μ не является даже гомоморфизмом алгебры Λ.]

Говорят, что e^{Ad_μ} есть *внутренний автоморфизм* алгебры Λ, индуцированный внутренним автоморфизмом $g\to e^{\mu}ge^{-\mu}$ группы G.

Пояснение. Если e^{μ_1} и e^{μ_2} — два любых элемента группы и если $e^{\mu_3}=e^{\mu_1}e^{\mu_2}$, то автоморфизм группы G

$$g\to e^{\mu_3}ge^{-\mu_3}=e^{\mu_1}e^{\mu_2}ge^{-\mu_2}e^{-\mu_1}$$

индуцирует автоморфизм алгебры Λ

$$e^{\mathrm{Ad}_{\mu_3}}=e^{\mathrm{Ad}_{\mu_1}}e^{\mathrm{Ad}_{\mu_2}}.$$

Поэтому в такой окрестности 1, в которой определены логарифмические координаты, соответствие e^{Ad_μ} элементу группы e^{μ} является (локально) гомоморфизмом G в группу линейных преобразований в векторном пространстве Λ. В дальнейшем будет показано, что в случае односвязной группы G это соответствие может быть расширено до гомоморфизма всей группы G, т. е. до *присоединенного представления* группы G.

Группа линейных преобразований в Λ, порожденная преобразованиями вида e^{Ad_μ}, называется *группой внутренних автоморфизмов алгебры Ли* Λ и обозначается через $\mathrm{Int}(\Lambda)$. Каждый элемент этой группы является конечным произведением $e^{\mathrm{Ad}_{\mu_1}}e^{\mathrm{Ad}_{\mu_2}}\ldots$ $\ldots e^{\mathrm{Ad}_{\mu_j}}$ и называется *внутренним автоморфизмом* Λ (его не всегда можно представить в виде e^{Ad_σ} для некоторого $\sigma\in\Lambda$). В случае односвязной группы G элемент группы $\mathrm{Int}(\Lambda)$ есть образ элемента $g=e^{\mu_1}e^{\mu_2}\ldots e^{\mu_j}$ группы G при упомянутом в пояснении гомоморфизме (в присоединенном представлении).

25.8. ЛЕММЫ О ФОРМАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Касательный вектор в t к кривой $g(t)$ в многообразии группы обычно обозначают через $dg(t)/dt$ или $\dot g(t)$. Это, конечно, чисто формальное обозначение, если только G не является группой матриц, так как в общем случае «отношению разностей» $(g(t_1)-g(t_2))/(t_1-t_2)$ нельзя придать никакого смысла. Тем не менее это обозначение можно использовать в согласии со многими правилами дифференцирования, причем оно часто значительно упрощает запись формул и сокращает выводы этих формул.

Пусть в G выбран элемент h и соответствующая кривая $g(t)$. Если $\dot g(t_0)$ — касательный вектор к $g(t)$ в t_0, то $h\dot g(t_0)$ следует определить в качестве касательного вектора к кривой $hg(t)$ в t_0. Взаимно однозначное отображение группы G на себя, задаваемое как $g\longrightarrow hg$ для фиксированного h, называется *левой трансляцией*[1]) в G. Это отображение индуцирует взаимно однозначное линейное отображение пространства касательных векторов в точке $g_0=g(t_0)$ на пространство касательных векторов в точке hg_0. Аналогично $\dot g(t_0)h$ определяется как касательный вектор к кривой $g(t)h$; поэтому *правая трансляция* $g\longrightarrow gh$ в G индуцирует отображение пространства касательных векторов в точке g_0 на пространство касательных векторов в точке g_0h. Согласно этим определениям,

$$d(hg(t))/dt=h\,dg(t)/dt,\quad d(g(t)h)/dt=(dg(t)/dt)\,h. \qquad (25.8.1)$$

Из ассоциативности G следует, что если h_1 и h_2 — элементы группы, а λ — касательный вектор к некоторой кривой, то $(h_1h_2)\lambda=h_1(h_2\lambda)$ и $(h_1\lambda)h_2=h_1(\lambda h_2)$; следовательно, все скобки можно опустить. В таком произведении любое число множителей представляет собой элемент группы, но лишь один множитель может быть касательным вектором, а значит, и произведение является касательным вектором. В общем случае λ, $h\lambda$, λh и

[1]) Либо левым сдвигом.— *Прим. перев*

т. д. являются векторами в различных точках G и не могут сравниваться, поскольку если λ_1 и λ_2—векторы в различных точках, то уравнение $\lambda_1=\lambda_2$ теряет смысл. Однако если вектор λ принадлежит Λ, а значит, является вектором в 1, то λ и $h\lambda h^{-1}$— векторы в *одной и той же* точке G; в частности, отображение $\lambda\longrightarrow e^{\mu}\lambda e^{-\mu}$ есть внутренний автоморфизм e^{Ad_μ} алгебры Λ, рассмотренный в предыдущем параграфе.

Используя конкретную систему координат, можно без труда установить следующие соотношения:

$$d(g(t)h(t))/dt=g(t)\,dh(t)/dt+(dg(t)/dt)\,h(t), \tag{25.8.2}$$

$$d(g(t)^{-1})/dt=-g(t)^{-1}(dg(t)/dt)\,g(t)^{-1}, \tag{25.8.3}$$

$$de^{t\lambda}/dt=\lambda e^{t\lambda}=e^{t\lambda}\lambda. \tag{25.8.4}$$

Производные порядка выше первого, вообще говоря, выводят нас из пространства касательных векторов в другие (по-видимому, малоинтересные) пространства. Однако если $g(s,\ t)$ — гладкое двухпараметрическое семейство элементов в G, то величины, определяемые как

$$\alpha=\alpha(s,\ t)=g^{-1}\,\partial g/\partial s,\qquad \beta=\beta(s,\ t)=g^{-1}\,\partial g/\partial t, \tag{25.8.5}$$

суть касательные векторы в точке $g(s,\ t)^{-1}g(s,\ t)=1$ для всех s и t, т. е. всегда принадлежат Λ и могут быть продифференцированы.

Лемма. *Для α и β, определенных в* (25.8.5),

$$\partial\alpha/\partial t-\partial\beta/\partial s=[\alpha,\ \beta]. \tag{25.8.6}$$

[*Замечание.* В случае линейной группы G $\partial^2g/\partial t\,\partial s$ определяется как матрица (в дополнение к g, $\partial g/\partial t$ и $\partial g/\partial s$) и справедливость этой леммы следует непосредственно из определений (25.8.5) после выполнения дифференцирования и учета (25.8.3); члены, содержащие $\partial^2g/\partial t\,\partial s$, взаимно уничтожаются.]

Доказательство. Для того чтобы проверить (25.8.6) для заданных значений $s=s_0$, $t=t_0$, запишем $g(s,\ t)$ в виде $g(s_0,\ t_0)\tilde g(s,\ t)$; тогда α и β можно записать в виде

$$\alpha(s,\ t)=\tilde g^{-1}\,\partial\tilde g/\partial s,\qquad \beta(s,\ t)=\tilde g^{-1}\,\partial\tilde g/\partial t.$$

Так как $\tilde g(s_0,\ t_0)=1$, то разложения координат $\tilde g$ и $\tilde g^{-1}$ по степеням $s-s_0=s_1$ и $t-t_0=t_1$ начинаются с линейных членов [предполагается, что $\varphi(1)=0$]:

$$x^i(s,\ t)\overset{\text{dei}}{=}\varphi^i(\tilde g(s,\ t))=\lambda^is_1+\mu^it_1+A^is_1^2+B^is_1t_1+C^it_1^2+\ldots; \tag{25.8.7}$$

отсюда

$$y^i(s,\ t)\overset{\text{dei}}{=}\varphi^i(\tilde g(s,\ t)^{-1})=-\lambda^is_1-\mu^it_1-A^is_1^2-B^is_1t_1-C^it_1^2+$$
$$+a^i_{jk}(\lambda^js_1+\mu^jt_1)(\lambda^ks_1+\mu^kt_1)+\ldots. \tag{25.8.8}$$

Поскольку $\alpha(s, t)$ есть касательный вектор к кривой, полученной из $\tilde{g}(s, t)^{-1}\tilde{g}(s', t)$ путем вариации s' при заданных s и t с последующим приравниванием $s'=s$, то (выполнив аналогичную операцию и для β) мы будем иметь

$$\alpha^i(s, t)=\partial m^i(\mathbf{y}(s, t), \mathbf{x}(s', t))/\partial s'|_{s'=s},$$
$$\beta^i(s, t)=\partial m^i(\mathbf{y}(s, t), \mathbf{x}(s, t'))/\partial t'|_{t'=t};$$

подставив в эти выражения разложения (25.8.7), (25.8.8) и взяв соответствующие производные, мы получим

$$(\partial\alpha^i/\partial t-\partial\beta^i/\partial s)_{s=s_0,\ t=t_0}=a^i_{jk}(\alpha^j\beta^k-\alpha^k\beta^j)_{s=s_0,\ t=t_0},$$

а это и есть искомый результат в силу определения (25.3.3), (25.3.4) произведения Ли.

25.9. ЛЕММА О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ЭКСПОНЕНТ

Лемма. *Если $\lambda=\lambda(t)$ — гладкая кривая в Λ, а λ' или $\lambda'(t)$ означает $d\lambda/dt$ (которая также является кривой в Λ), то*

$$e^{-\lambda}\,de^{\lambda}/dt=f(\mathrm{Ad}_\lambda)\,\lambda', \tag{25.9.1}$$

где

$$f(z)=(1-e^{-z})/z=1-(1/2!)\,z+(1/3!)\,z^2-\ldots. \tag{25.9.2}$$

Пояснение 1. В левой части равенства (25.9.1) de^{λ}/dt представляет собой касательный вектор в точке e^{λ} группы G; умножение этого вектора слева на $e^{-\lambda}$ переводит его в касательный вектор в точке 1 группы G, т. е. в элемент алгебры Λ.

Пояснение 2. Поскольку преобразование Ad_λ можно представить при помощи матрицы размера $n\times n$, а ряд для $f(z)$ абсолютно сходится для всех z, то $f(\mathrm{Ad}_\lambda)$ вполне определяет линейное преобразование в Λ. [В частности, если λ и λ' коммутируют, т. е. если $\mathrm{Ad}_\lambda\lambda'=[\lambda, \lambda']=0$, то правая часть (25.9.1) равна просто λ'.]

Пояснение 3. Если Λ — алгебра Ли матриц, то утверждение данной леммы в принципе можно установить, умножив степенной ряд для $e^{-\lambda(t)}$ на степенной ряд, полученный почленным дифференцированием ряда для $e^{\lambda(t)}$, и приняв во внимание некоммутативность матриц λ и λ', раскрыв для этого скобки Ли, т. е. положив $[\lambda, \lambda']=\lambda\lambda'-\lambda'\lambda$. Нетрудно проверить, что первые два или три члена результирующего разложения таковы, как указано в лемме.

Доказательство леммы. Определим величины

$$\alpha(s, t)=e^{-s\lambda(t)}\,\partial e^{s\lambda(t)}/\partial s=\lambda(t),$$
$$\beta(s, t)=e^{-s\lambda(t)}\,\partial e^{s\lambda(t)}/\partial t$$

так, что $\beta(0, t)\equiv 0$, и воспользуемся леммой из § 25.8:

$$d\lambda(t)/dt-\partial\beta(s, t)/\partial s=[\lambda(t), \beta(s, t)].$$

Для фиксированного значения t это дает дифференциальное уравнение вида

$$\lambda' = d\beta(s)/ds = A\beta(s),$$

где A — матрица преобразования $\mathrm{Ad}_{\lambda(t)}$; решением этого уравнения при начальном условии $\beta(0) = 0$ является

$$\beta(s) = [(1 - e^{-As})/A]\,\lambda'.$$

[*Замечание*. A — вырожденная матрица, поскольку $\mathrm{Ad}_\lambda \lambda = 0$. Выражение $(1 - e^{As})/A$ означает матрицу, полученную подстановкой A вместо z в целую функцию $(1 - e^{zs})/z$.] Поэтому

$$\beta(1, t = e^{-\lambda} de^\lambda/dt = f(\mathrm{Ad}_\lambda)\,\lambda',$$

что и требовалось доказать.

25.10. ФОРМУЛА КЭМПБЕЛЛА — БЕЙКЕРА — ХАУСДОРФА (КБХ)

Если λ и μ — коммутирующие элементы алгебры Λ (т. е. если $[\lambda, \mu] = 0$) или коммутирующие матрицы, то $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$. В общем случае мы ищем такой вектор σ, что $e^\lambda e^\mu = e^\sigma$. Формула КБХ дает явное выражение σ через λ, μ и скобки Ли, содержащие λ и μ, для λ и μ из некоторой окрестности начала координат Λ.

Теорема (КБХ). *Пусть* $\psi(z) = z \ln z/(z-1) = 1 + w/(1\cdot 2) - w^2/(2\cdot 3) + w^3/(3\cdot 4) - \ldots$ *для* $|w| < 1$, *где* $z = 1 + w$; *тогда для* λ *и* μ *в некоторой окрестности начала координат в* Λ

$$\sigma \overset{\text{def}}{=} \ln(e^\lambda e^\mu) = \lambda + \int_0^1 \psi(e^{\mathrm{Ad}_\lambda} e^{t\,\mathrm{Ad}_\mu})\,\mu\,dt. \qquad (25.10.1)$$

Пояснение 1. Аргумент функции $\psi(\cdot)$ в этой формуле можно представить матрицей $M = I + W$ размера $n \times n$, которую можно сделать как угодно близкой к единичной матрице, полагая λ и μ достаточно малыми. [Ad_0 есть нулевая матрица, а e^{Ad_0} — единичная матрица I.]

Степенной ряд для $\psi(1 + w)$ сходится абсолютно при $|w| < 1$; следовательно, ряд для $\psi(I + W)$ сходится поэлементно, если каждый элемент w_{ij} матрицы W удовлетворяет условию $|w_{ij}| < 1/n$, т. е. если λ и μ ограничены некоторой окрестностью $\hat{N}$ начала координат в Λ.

Пояснение 2. Векторы λ, μ, σ представляют собой координаты (логарифмические) элементов группы e^λ, e^μ, e^σ; значит, $\sigma = \mathfrak{m}(\lambda, \mu)$. Поэтому формула КБХ является формулой для $\mathfrak{m}(\cdot, \cdot)$ в логарифмических координатах и структура алгебры Λ полностью определяет умножение в группе в некоторой окрестности единицы.

Пояснение 3. Все подразумеваемые в (25.10.1) разложения могут быть осуществлены, и несколько первых членов разложения логарифма имеют вид

$$\ln(e^{\lambda}e^{\mu})=\lambda+\mu+{}^1/_2[\lambda,\ \mu]+{}^1/_{12}[\lambda,\ [\lambda,\ \mu]]+{}^1/_{12}[\mu,\ [\mu,\ \lambda]]+\ldots \tag{25.10.2}$$

Доказательство теоремы. Обозначим через $\sigma(t)$ функцию $\ln(e^{\lambda}e^{t\mu})$; далее будет найдено дифференциальное уравнение для $\sigma(t)$, решение которого дает формулу КБХ. Прежде всего, так как

$$de^{\sigma(t)}/dt=e^{\lambda}e^{t\mu}\mu=e^{\sigma(t)}\mu,$$

по лемме предыдущего параграфа имеем

$$\mu=e^{-\sigma(t)}de^{\sigma(t)}/dt=f(\mathrm{Ad}_{\sigma(t)})\,\sigma'(t), \tag{25.10.3}$$

где $f(z)=(1-e^{-z})/z$. Если $\chi(z)$ определить как $z/(1-e^{-z})=(f(z))^{-1}$, то $\chi(M)f(M)=I$ для любой матрицы M, так что уравнение (25.10.3) можно разрешить относительно $\sigma'(t)$:

$$\sigma'(t)=\chi(\mathrm{Ad}_{\sigma(t)})\,\mu. \tag{25.10.4}$$

Согласно определениям $\chi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$, имеем $\chi(z)=\psi(e^z)$; отсюда

$$\sigma'(t)=\psi\left(e^{\mathrm{Ad}_{\sigma(t)}}\right)\mu.$$

Это дифференциальное уравнение можно упростить, используя лемму из § 25.7, которая гласит (в обозначениях § 25.8), что отображение e^{Ad_σ} есть отображение $\nu\longrightarrow e^{\sigma}\nu e^{-\sigma}$; в частности,

$$e^{\mathrm{Ad}_{\sigma(t)}}\nu=e^{\sigma(t)}\nu e^{-\sigma(t)}=e^{\lambda}e^{t\mu}\nu e^{-t\mu}e^{-\lambda}=e^{\mathrm{Ad}_\lambda}e^{t\mathrm{Ad}_\mu}\nu.$$

Теперь неизвестная функция стоит только в левой части, и формула КБХ получается интегрированием от $t=0$ до $t=1$ с учетом условий

$$\sigma(0)=\ln e^{\lambda}=\lambda,\quad \sigma(1)=\ln e^{\lambda}e^{\mu}=\sigma.$$

Так как Ad_λ — преобразование $\nu\longrightarrow[\lambda,\ \nu]$, то элементы матрицы Ad_λ являются линейными функциями компонент вектора λ. Поэтому матричные элементы преобразований $\exp\{\mathrm{Ad}_\lambda\}$ и $\exp\{t\,\mathrm{Ad}_\mu\}$ представляют собой аналитические функции компонент векторов λ и μ. Из аналитичности функции $\psi(z)$ при $|z-1|<1$ следует, что для λ и μ, принадлежащих окрестности $\hat{N}$ начала координат в Λ, о которой говорилось в пояснении 1, компоненты вектора $\sigma=\ln e^{\lambda}e^{\mu}$ суть аналитические функции компонент λ и μ; благодаря аналитическому продолжению эти функции аналитичны при всех таких λ и μ, для которых определен логарифм.

Когда используются логарифмические координаты λ^i, $\ln e^{\lambda}e^{\mu}$ представляет собой просто функцию умножения, которая ранее обозначалась через $\mathbf{m}(\lambda,\ \mu)$. От этой функции требовалась только принадлежность классу C^4, теперь же видно, что в случае логарифмических координат она должна быть аналитической. В этих координатах функция обращения $\mathbf{I}(\cdot)$ задается равенством $\mathbf{I}(\lambda)=-\lambda$ и, значит, также аналитична.

Упражнение

Выразите матричные элементы Ad_λ через компоненты λ^i вектора λ, если задан базис $e_1, \ldots, e_n$ в Λ, и соответствующие структурные постоянные C^i_{jk}.

25.11. ТРАНСЛЯЦИИ КАРТ. СОГЛАСОВАННОСТЬ. G КАК АНАЛИТИЧЕСКОЕ МНОГООБРАЗИЕ

В этом параграфе выбирается некоторая базисная (основная) карта с логарифмическими координатами в ней, а другие карты будут получены из нее при помощи трансляций в группе. Чтобы несколько упростить эту работу, выберем базисную карту столь малой, что имеет место ряд полезных свойств.

Во-первых, пусть U—окрестность 1 в группе G, такая, что отображение $e^\lambda \to \lambda$ в алгебру Ли взаимно однозначно, благодаря чему в U можно использовать логарифмические координаты. Во-вторых, пусть V—достаточно малая подокрестность в U (открытое подмножество множества U), также содержащая 1 и такая, что если g и h принадлежат V, то gh принадлежит U и $\ln gh$ задается формулой КБХ. Наконец, пусть W—такая подокрестность в V, что если g и h принадлежат W, то gh принадлежит V, в то время как g^{-1} и h^{-1} принадлежат W (это обеспечивает использование формулы КБХ для тройного произведения вида $g_1g_2^{-1}g_3$ и т. п.), и пусть N—образ W в Λ, т. е. $N=\{\ln g\colon g\in W\}$. В дальнейшем $\{W, \ln, N\}$ будет рассматриваться в качестве базисной карты.

Вспомним, что для любого фиксированного элемента a из G взаимно однозначное отображение группы G на себя, задаваемое как $g \to ag$, называется *левой трансляцией* на a, а отображение $g \to ga$ называется *правой трансляцией*. Для любого фиксированного a из G левотранслированная карта $\{aW, {}_a\varphi, N\}$ определяется следующим образом: прежде всего подмножество aW группы G определяется как

$$aW=\{ag_1\colon g_1\in W\};$$

тогда для каждого $g=ag_1 \in aW$ функция $a\varphi(g)$ есть $\ln g_1$. Заметим, что образом aW при отображении $g \to a\varphi(g)$ является то же самое открытое множество N в координатном пространстве Λ, которое представляет собой образ W при отображении $g \to \ln g$. Аналогично получается правотранслированная карта $\{Wa, \varphi_a, N\}$.

Теорема 1. *Любые две карты, полученные при помощи трансляции базисной карты* $\{W, \ln, N\}$, *согласованы (в действительности аналитически согласованы).*

Пояснение. Если a лежит в W, то левая (как и правая) трансляция на a есть гомеоморфизм в данной базисной карте, насколько это определено, потому что координаты элемента ag суть непрерывные (даже аналитические) функции координат элемента g согласно формуле КБХ, а координаты g суть непрерывные функции координат ag, так как $g=a^{-1}(ag)$. Следовательно, любая транслированная карта согласована с базисной картой, и будет показано, что любые две транслированные карты также согласованы друг с другом. Таким образом, G становится многообразием, и теорема 2 (см. ниже) показывает, что эти трансляции являются гомеоморфизмами во всем G.

Доказательство теоремы 1. Сначала рассмотрим карты, полученные левой трансляцией базисной карты соответственно на a и b. Если пересечение $aW \cap bW$ пусто, то карты автоматически согласованы. В противоположном случае следует доказать, что это пересечение при помощи ${}_a\varphi$ (а также и ${}_b\varphi$) отображается на открытое множество в Λ (см. § 23.2). Иначе говоря, если g — любая точка данного пересечения, так что $g=ag_1=bh_1$, где g_1 и h_1 принадлежат W, то нужно показать, что g принадлежит некоторому подмножеству, которое является *открытым* подмножеством каждой карты в соответствии с топологией этой карты. Поэтому рассмотрим близкий к g элемент $g'=g\varepsilon$, так что ε близок к 1 (насколько близок, сейчас будет ясно). Тогда $g'=ag_1\varepsilon=bh_1\varepsilon$. Поскольку W — открытое множество, g_1 и h_1 являются внутренними точками. В силу непрерывной зависимости координат элементов $g_1'=g_1\varepsilon$ и $h_1'=h_1\varepsilon$ от координат элемента ε существует такая окрестность W_0 единицы, что для $\varepsilon \in W_0$ g_1' и h_1' принадлежат W (см. рис. 25.1).

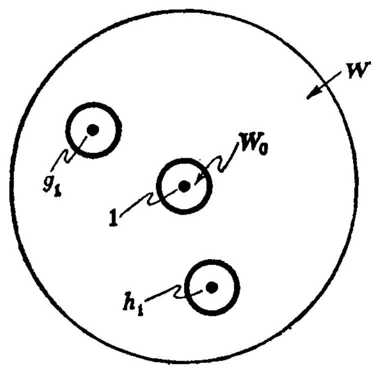

Рис. 25.1.

Множества $g_1W_0=\{g_1\varepsilon\colon \varepsilon \in W_0\}$ и $h_1W_0=\{h_1\varepsilon\colon \varepsilon \in W_0\}$ представляют собой окрестности в W соответственно элементов g_1 и h_1, т. е. *открытые* множества, содержащие соответственно g_1 и h_1, так как, согласно приведенному выше пояснению, левые трансляции на g_1 и h_1 являются гомеоморфизмами в W. Следовательно, поскольку $g=ag_1=bh_1$, gW_0 является открытым множеством в топологии каждой карты и содержится в обеих картах. Таким образом, первое из условий согласованности карт удовлетворено.

Далее нужно доказать, что координаты ${}_a\varphi(g)=\ln g_1$ и ${}_b\varphi(g)=\ln h_1$ аналитически зависят друг от друга для всех элементов g, которые можно представить как в виде ag_1, так и в виде bh_1, где g_1 и h_1 принадлежат W. Из того что $b^{-1}a=h_1g_1^{-1}$, а h_1 и g_1 принадлежат W, следует, что $b^{-1}a$ находится в V (даже если сами a и b не находятся в окрестности U, где определены логарифмические координаты). Следовательно, $\ln h_1$, равный $\ln((b^{-1}a)g_1)$, зависит аналитически от $\ln g_1$ согласно формуле КБХ. Аналогично $\ln g_1$ зависит аналитически от $\ln h_1$. Наконец, аналогичными рассуждениями можно показать согласованность двух правотранслированных карт, а также согласованность карт, одна из которых является правотранслированной, а другая — левотранслированной.

Теорема 2. *Если группа G покрывается транслированными картами, как описано выше, то справедлива аксиома отделимости Хаусдорфа.*

Доказательство. Пусть a и b — две произвольные точки группы; предположим, что они неотделимы в том смысле, что любая окрестность точки a и любая окрестность точки b имеют непустое пересечение. Следует доказать, что в таком случае $a=b$. Обозначим через $\|\cdot\|$ норму в алгебре Λ, например евклидову норму относительно некоторого базиса $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ в Λ. Пусть для любого $\delta > 0$ U_δ — окрестность единицы, содержащая те элементы g и W, для которых $\|\ln g\| < \delta$. Тогда aU_δ и bU_δ являются окрестностями элементов a и b; возьмем в качестве g элемент из $aU_\delta \cap bU_\delta$, так что $g=a\varepsilon=b\eta$, где ε и η принадлежат U_δ. Тогда $b^{-1}a=\eta\varepsilon^{-1}$. Поскольку $\ln \eta\varepsilon^{-1}$ определяется при помощи формулы КБХ через $\ln\eta$ и $\ln\varepsilon^{-1}=-\ln\varepsilon$, причем последние можно сделать сколь угодно малыми при подходящем выборе δ, то видно, что $\ln\eta\varepsilon^{-1}$ равен нулю; но это значит, что и $\ln b^{-1}a$ равен нулю, откуда $b^{-1}a=1$, что и требовалось доказать.

Таким образом, группа G, для которой существует покрытие транслированными картами (а в дальнейшем мы будем это допускать), является вещественным аналитическим многообразием. Как и в гл. 23, мы предполагаем, что группа G может быть покрыта счетной совокупностью таких карт.

Лемма. *Левая или правая трансляция есть аналитическое отображение во всей группе G.*

Доказательство. Левая трансляция $g \longrightarrow ag$ отображает карту $\{bW, {}_b\varphi, N\}$ (b произвольно) на карту $\{abW, {}_{ab}\varphi, N\}$; соответствующее координатное отображение тождественно, ибо если $g=bh$, то

$$ {}_b\varphi(g) = {}_{ab}\varphi(ag) = \ln h. $$

Аналитичность подобного отображения в правотранслированных картах следует из согласованности карт.

Теорема 3. *Произведение элементов и обратный к элементу аналитичны во всей группе G.*

Доказательство для произведения. Пусть a и b — произвольные элементы G. Обозначим через ${}_a\varphi$, ${}_b\varphi$, ${}_{ab}\varphi$ координаты в картах, полученных из базисной карты при помощи левых трансляций на a, b и ba. Будет показано, что для g и h, близких к 1, координата ${}_{ab}\varphi$ элемента $(ag)(bh)$ зависит аналитически от координаты ${}_a\varphi$ элемента ag и от координаты ${}_b\varphi$ элемента bh. Тогда в силу аналитической согласованности всех транслированных карт такое же заключение следует для любых трех карт, в которых соответственно расположены a, b и ab. Далее,

$$ {}_{ab}\varphi(agbh) = {}_{ab}\varphi(abb^{-1}gbh) = \ln(b^{-1}gbh); $$

поэтому нужно показать аналитическую зависимость последнего члена данного равенства от $\ln g$ и $\ln h$. Элемент $b^{-1}gb$ получается из элемента g при помощи левой трансляции на b^{-1}, которая осуществляется после (или до) правой трансляции на b, причем $b^{-1}gb=1$ для $g=1$; следовательно, для g вблизи 1 $\ln(b^{-1}gb)$ существует и аналитически зависит от $\ln g$ согласно доказанной выше лемме. По формуле КБХ $\ln(b^{-1}gbh)$ зависит аналитически от $\ln(b^{-1}gb)$ и $\ln h$, откуда следует утверждение теоремы относительно произведения.

Доказательство аналитичности обратного элемента остается читателю в качестве упражнения.

Теорема 4. *Главная компонента многообразия G, т. е. компонента, содержащая единицу, порождается любой окрестностью*

W_0 единицы. Иначе говоря, любой элемент g в этой компоненте можно представить в виде конечного произведения $g=g_1g_2\ldots$, где каждый g_i принадлежит W_0. (Определение компоненты многообразия см. в § 23.6.)

Доказательство. Пусть G_0 — подгруппа G, порожденная множеством $W_0 \cap W_0^{-1}$, где W_0^{-1} — множество, состоящее из элементов, обратных к элементам множества W_0. Множество $W_{00}=W_0 \cap W_0^{-1}$ открыто и содержит 1. Ясно, что G_0 связна, поскольку каждый из множителей $g_1, g_2, \ldots$ в конечном произведении $g=g_1g_2\ldots$ можно по очереди перевести гладким образом в 1, а затем удалить из этого произведения, так что как следствие элемент g будет связан с 1. Теперь будет показано, что множество G_0 является открытым и замкнутым одновременно. Поэтому, в согласии с § 23.6, это множество представляет собой целую компоненту многообразия G. [Поскольку $W_{00} \subset W_0$, можно также говорить, что G_0 порождено множеством W_0.] Если $g= = g_1g_2 \ldots g_k$ — любой элемент G_0, то открытое множество gW_{00}, содержащее g, состоит из элементов вида $g_1g_2 \ldots g_kg_{k+1}$, причем g_{k+1} также принадлежит W_{00}; поэтому gW_{00} содержится в G_0 и множество W_0 открыто. С другой стороны, если g' — любая предельная точка G_0, то множество $g'W_{00}= =g'W_{00}^{-1} =\{g'h^{-1}: h \in W_{00}\}$ является окрестностью элемента g' и, значит, содержит элемент вида $g_1 \ldots g_k$; поэтому $g_1 \ldots g_k=g'h^{-1}$ для некоторого $h \in W_{00}$; следовательно, $g'=g_1 \ldots g_kh$ содержится в G_0, т. е. G_0 — замкнутое множество, что и требовалось доказать.

Замечания. Левая трансляция есть гомеоморфизм во всем многообразии G. (Это отображение взаимно однозначно по теоретико-групповым соображениям и непрерывно, даже аналитично, по приведенной выше лемме.) Поэтому каждый левый смежный класс aG_0 подгруппы G_0 группы G есть компонента многообразия G, и наоборот. Рассматривая правые трансляции, мы приходим к выводу, что каждая компонента является также и правым смежным классом; поэтому G_0 представляет собой нормальную подгруппу.

Количество компонент счетно, поскольку мы допустили, что многообразие может быть покрыто счетной совокупностью карт. Рассматриваемая теория не устанавливает никаких ограничений на природу факторгруппы, потому что если G_0 — связная группа Ли, а K — любая абстрактная счетная группа, то прямое произведение $G_0 \times K$ можно рассматривать в качестве группы Ли G, имеющей по одной компоненте на каждый элемент из K, и тогда $G/G_0 \cong K$. По этой причине факторгруппа G/G_0 не представляет интереса, и многие авторы при определении группы Ли включают требование связности. Мы предпочитаем не исключать из рассмотрения группы, подобные $O(3)$.

25.12. ГОМОМОРФИЗМЫ АЛГЕБРЫ ЛИ

Теория гомоморфизмов алгебр Ли и групп Ли, изложенная в этом и в двух следующих параграфах, весьма сходна с теорией гомоморфизмов для групп, изложенной в § 18.5—18.8.

Грубо говоря, гомоморфизм есть отображение (в общем случае переводящее много элементов в один) некоторой математической структуры на менее сложную структуру того же вида, такое, что любое соотношение, справедливое для элементов первой структуры, также справедливо и для образов этих элементов во второй структуре. Некоторые из этих соотношений, вообще говоря, становятся тривиальными во второй структуре (например, $1\circ 1=1$ или $0+0=0$), в то время как остающиеся соотношения можно рассматривать как проявление некоторых основных свойств первой структуры без учета тонких деталей. Точно так же, как для групп, такое отображение существует в том и только том случае, когда первая структура содержит некоторый особый вид подструктуры (например, нормальную подгруппу), которая может служить ядром этого отображения; теория показывает, как при заданной подструктуре воссоздать рассматриваемое отображение, сначала образовав так называемое частное или факторструктуру (например, факторгруппу), затем построив так называемый естественный гомоморфизм первой структуры на факторструктуру и, наконец, установив эквивалентность этого гомоморфизма первоначальному гомоморфизму.

Эта программа действий применима непосредственно и к алгебрам Ли. Любая идея, имеющая отношение к группам Ли, находит параллель в соответствующих алгебрах Ли, и эта взаимосвязь между группами и их алгебрами обеспечивает мощные методы исследования этих групп.

Если Λ и $\overline{\Lambda}$ — вещественные алгебры Ли, то *гомоморфизмом* $\Lambda \longrightarrow \overline{\Lambda}$ является отображение ψ алгебры Λ в алгебру $\overline{\Lambda}$, которое сохраняет все операции алгебры Ли; иначе говоря, если λ и μ принадлежат Λ, а $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$, то $\psi(a\lambda+b\mu)=a\psi(\lambda)+b\psi(\mu)$ и $\psi([\lambda, \mu])=[\psi(\lambda), \psi(\mu)]$. Это определение (с заменой $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$) имеет место и в случае комплексной алгебры Ли.

Пояснение. На самом деле нет необходимости заранее допускать, что $\overline{\Lambda}$ представляет собой алгебру Ли; обязательно лишь, чтобы $\overline{\Lambda}$ была структурой, в которой определены операции $\lambda+\mu$, $a\lambda$ и $[\lambda, \mu]$. Однако та часть структуры $\overline{\Lambda}$, на которую отображается Λ при помощи указанного гомоморфизма, т. е. образ $\psi(\Lambda)$, с необходимостью должна быть алгеброй Ли.

Если отображение ψ взаимно однозначно и является отображением на всю $\overline{\Lambda}$, то оно есть *изоморфизм* (символически $\Lambda \cong \overline{\Lambda}$); если к тому же оно является отображением Λ на себя (т. е. $\overline{\Lambda}=\Lambda$), то мы имеем *автоморфизм.*

Линейное подпространство A алгебры Λ называется *подалгеброй*, если $[\lambda, \mu] \in A$ для всех $\lambda, \mu \in A$; если, более того, $[\lambda, \mu] \in A$

для всех $\lambda \in A$ и для всех $\mu \in \Lambda$, то A есть *идеал* алгебры Λ. Алгебра Ли Λ размерности большей 1 называется *простой* в том случае, когда она не содержит никаких других идеалов, кроме $\{0\}$ и Λ. (Причина, по которой в этом определении исключены одномерные алгебры, выяснится в § 25.16.) Легко видеть, что *ядро* гомоморфизма ψ, а именно множество $\{\lambda: \psi(\lambda)=0\}$, есть идеал в Λ. Следовательно, альтернативное определение состоит в том, что алгебра Ли размерности большей 1 *проста*, если она не может быть гомоморфно отображена на любую, менее сложную алгебру, кроме тривиальной алгебры $\{0\}$.

Идеалы играют почти ту же роль для алгебр Ли, какую играют нормальные подгруппы для групп.

Если Λ_0—подпространство Λ, то отношение $\lambda \equiv \mu \pmod{\Lambda_0}$, определенное в том смысле, что $\lambda-\mu$ принадлежит Λ_0, является отношением эквивалентности, разбивающим Λ на непересекающиеся классы, называемые *классами вычетов по модулю* Λ_0. Если для любого фиксированного $\lambda \in \Lambda$ обозначить через $\bar{\lambda}$ класс вычетов $\{\lambda+\mu: \mu \in \Lambda_0\}$ и определить $a\bar{\lambda}=\overline{a\lambda}$ и $\bar{\lambda}+\bar{\mu}=\overline{\lambda+\mu}$, то множество классов вычетов образует линейное векторное пространство, называемое *факторпространством* алгебры Λ по модулю Λ_0. Мы покажем, что если Λ_0—идеал, то факторпространство можно интерпретировать как алгебру Ли.

Теорема 1. *Пусть Λ_0—подпространство алгебры Ли Λ. Для каждого выбора λ_1 и μ_1 в Λ множество*

$$\{[\lambda, \mu]: \lambda-\lambda_1 \in \Lambda_0, \ \mu-\mu_1 \in \Lambda_0\}$$

содержится в единственном классе вычетов (а именно в классе $\overline{[\lambda_1, \mu_1]}$) тогда и только тогда, когда Λ_0 есть идеал в Λ. В этом случае если произведение Ли двух классов вычетов $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\mu}_1$ определить равенством $[\bar{\lambda}_1, \bar{\mu}_1]=\overline{[\lambda_1, \mu_1]}$, то факторпространство алгебры Λ по модулю Λ_0 является алгеброй Ли, которая обозначается через Λ/Λ_0 и называется факторалгеброй алгебры Λ по модулю Λ_0. *Отображение $\lambda \to \bar{\lambda}$ есть гомоморфизм, называемый* естественным гомоморфизмом Λ *на Λ/Λ_0 и обозначаемый через ψ_n.*

Пояснение. Рассмотрение коммутативного случая, в котором любое подпространство алгебры Λ является идеалом, а любое произведение Ли $[\lambda, \mu]$ равно нулю, показывает, что множество элементов $[\lambda, \mu]$, о котором говорится в формулировке теоремы, может быть лишь частью класса вычетов $\overline{[\lambda_1, \mu_1]}$, который совпадает с Λ_0.

Доказательство теоремы 1. (1) Допустим, что Λ_0—идеал. В общем случае

$$[\lambda, \mu]-[\lambda_1, \mu_1]=[\lambda-\lambda_1, \mu]+[\lambda_1, \mu-\mu_1];$$

следовательно, если $\lambda-\lambda_1$ и $\mu-\mu_1$ принадлежат Λ_0, то и оба члена из правой части принадлежат Λ_0; поэтому $[\lambda, \mu]$ и $[\lambda_1, \mu_1]$ находятся в одном и том же классе вычетов, как и утверждалось. (2) Обратно, если для произвольных λ и μ $[\lambda, \mu+\sigma]$ всегда содержится в том же классе вычетов, что и $[\lambda, \mu]$, для любого $\sigma\in\Lambda_0$, то $[\lambda, \sigma]\in\Lambda_0$, а отсюда следует, что Λ_0 — идеал. (3) Определение произведения двух классов вычетов посредством формулы $[\bar\lambda_1, \bar\lambda_2]=\overline{[\lambda_1, \lambda_2]}$ показывает, что отображение $\lambda\longrightarrow\bar\lambda$ есть гомоморфизм, а тогда из пояснения, приведенного после определения гомоморфизма, следует, что факторпространство является алгеброй Ли.

Теорема 2 (о гомоморфизмах). *Если Λ_0 — ядро гомоморфизма ψ алгебры Λ на алгебру $\bar\Lambda$, то Λ_0 есть идеал в Λ (как уже отмечалось) и $\Lambda/\Lambda_0\cong\bar\Lambda$.*

Доказательство. Обозначим через ψ_n естественный гомоморфизм Λ на Λ/Λ_0. Из равенства $\psi_n(\lambda)=\psi_n(\lambda_1)$ следует принадлежность λ и λ_1 одному классу вычетов, т. е. $\lambda-\lambda_1\in\Lambda_0$; отсюда $\psi(\lambda-\lambda_1)=0$ по определению Λ_0 как ядра гомоморфизма ψ и, значит, $\psi(\lambda)=\psi(\lambda_1)$. Поэтому $\psi\psi_n^{-1}$ есть взаимно однозначное отображение множества Λ/Λ_0 классов вычетов на $\bar\Lambda$; обозначим это отображение через χ. Читателю предоставляется возможность завершить доказательство, проверив, что χ линейно и удовлетворяет уравнению $\chi([\bar\lambda, \bar\mu])=[\chi(\bar\lambda), \chi(\bar\mu)]$, где $\bar\lambda$ и $\bar\mu$ — произвольные классы вычетов в Λ по модулю Λ_0, т. е. произвольные элементы множества Λ/Λ_0.

25.13. ГОМОМОРФИЗМЫ ГРУППЫ ЛИ

В случае группы Ли гомоморфизм должен сохранять не только все алгебраические отношения, но также все локальные топологические и аналитические свойства, связанные со структурой многообразия.

Если G и $\bar G$ — группы Ли, то отображение Ψ группы G в группу $\bar G$ называется *гомоморфизмом групп Ли*, если:

1) это гомоморфизм в теоретико-групповом смысле:

$$\Psi(gh)=\Psi(g)\Psi(h), \quad \Psi(g^{-1})=\Psi(g)^{-1};$$

2) это непрерывное отображение; иначе говоря, если φ и $\bar\varphi$ — любые координатные системы в G и $\bar G$ соответственно, то каждая компонента вектора

$$\mathrm{y}=\bar\varphi(\Psi(\varphi^{-1}(\mathrm{x}))) \qquad (25.13.1)$$

является непрерывной функцией компонент вектора x для всех x, для которых данное выражение определено.

Замечание 1. В общем случае это отображение переводит много элементов в один; в действительности G может иметь бо́льшую размерность, чем $\bar G$.

Замечание 2. Типичным отношением в G, которое сохраняется в $\bar G$ и не имеет теоретико-группового характера, является сходимость последовательности элементов $g_1, g_2, \ldots$ к пределу h (что означает сходимость в карте, содержащей h, координат элементов $g_1, g_2, \ldots$ к координатам h); тогда вследствие непрерывности функций (25.13.1) последовательность $\Psi(g_1), \Psi(g_2), \ldots$ сходится к $\Psi(h)$ в $\overline{G}$. Аналогично образ кривой в G при гомоморфизме представляет собой кривую в $\overline{G}$.

Замечание 3. Свойство Ψ быть непрерывным отображением инвариантно относительно добавления или вычеркивания согласованных карт в одном или в обоих многообразиях G и $\overline{G}$, потому что если x' и y' суть координаты в любых двух картах, то схема

$$\mathrm{x}' \leftrightarrow \mathrm{x} \longrightarrow \mathrm{y} \leftrightarrow \mathrm{y}'$$

показывает, что координата y' непрерывно зависит от x', если только она определена при помощи композиции трех указанных отображений.

Замечание 4. Если Ψ является взаимно однозначным отображением G на $\overline{G}$ и, кроме того, Ψ^{-1} непрерывно, то Ψ представляет собой *изоморфизм групп Ли*.

Теорема 1. *Пусть Ψ—гомоморфизм группы Ли G (т. е. непрерывный гомоморфизм) на $\overline{G}$, и пусть Λ и $\overline{\Lambda}$—алгебры Ли групп G и $\overline{G}$. Тогда отображение Ψ, будучи выражено через логарифмические координаты, является локальным гомоморфизмом алгебры Ли Λ на $\overline{\Lambda}$.*

Замечание. Как очевидное следствие получается, что в силу линейности отображения Ψ в этих координатах любой гомоморфизм группы Ли локально является аналитическим отображением; оно аналитично также и глобально, потому что если $g = g_0 h$ для произвольного g_0, то элемент $\Psi(g) = \Psi(g_0)\Psi(h) = \Psi(g_0)\Psi(g_0^{-1}g)$ аналитичен в g для h из некоторой окрестности единицы в силу аналитичности произведений и обратных элементов в каждой из рассматриваемых групп.

Доказательство теоремы 1. Для любого элемента λ, достаточно близкого к началу координат в Λ, мы можем определить элемент из $\overline{\Lambda}$ посредством координаты

$$\overline{\lambda} = \ln(\Psi(e^{\lambda})).$$

Нам нужно показать, что отображение $\lambda \longrightarrow \overline{\lambda}$ линейно и переводит $[\lambda, \mu]$ в $[\overline{\lambda}, \overline{\mu}]$. Сначала мы покажем, что оно преобразует $t\lambda$ в $t\overline{\lambda}$ для вещественного t, т. е. $\overline{t\lambda} = t\overline{\lambda}$. Для фиксированного λ множество $\Psi(e^{t\lambda})$, $t \in \mathbb{R}$, есть однопараметрическая подгруппа группы G, которая включает элемент $e^{\overline{\lambda}}$; следовательно, для каждого t существует вещественное число $s = f(t)$, такое, что

$$\Psi(e^{t\lambda}) = e^{s\overline{\lambda}} = e^{f(t)\overline{\lambda}},$$

где $f(t)$ — непрерывная функция в силу непрерывности Ψ, причем $f(0)=0$ и $f(1)=1$. Поскольку Ψ отображает произведения на произведения, мы имеем

$$e^{f(t+s)\lambda} = \Psi(e^{(t+s)\lambda}) = \Psi(e^{t\lambda} e^{s\lambda}) =$$
$$= \Psi(e^{t\lambda})\,\Psi(e^{s\lambda}) = e^{f(t)\lambda}\, e^{f(s)\lambda} = e^{[f(t)+f(s)]\lambda}.$$

Отсюда $f(t+s)=f(t)+f(s)$, но лишь непрерывные функции, обладающие этим свойством, линейны. Учитывая, что $f(0)=0$, $f(1)=1$, мы получаем $f(t)\equiv t$, что и требовалось показать. Теперь к обеим частям равенства $\Psi(e^{s\lambda}e^{t\mu}) = e^{s\bar{\lambda}}e^{t\bar{\mu}}$ применим формулу КБХ, что дает

$$\overline{s\lambda + t\mu + {}^1/_2 st\,[\lambda, \mu] + \ldots} = s\bar{\lambda} + t\bar{\mu} + {}^1/_2 st\,[\bar{\lambda}, \bar{\mu}] + \ldots \tag{25.13.2}$$

для всех s и t. Пусть $s = \varepsilon s'$, $t = \varepsilon t'$. Учитывая, что $\varepsilon\bar{v} = \overline{\varepsilon v}$, можем сократить обе части (25.13.2) на множитель ε. Тогда при $\varepsilon \to 0$ квадратичные и более высокого порядка члены обратятся в нуль; поэтому

$$\overline{s'\lambda + t'\mu} = s'\bar{\lambda} + t'\bar{\mu},$$

а это устанавливает полную линейность отображения $\lambda \to \bar{\lambda}$. В силу этого можно опустить линейные члены в обеих частях (25.13.2), и, рассуждая аналогично предыдущему, мы увидим, что

$$\overline{[\lambda, \mu]} = [\bar{\lambda}, \bar{\mu}],$$

т. е. что отображение $\lambda \to \bar{\lambda}$ есть гомоморфизм алгебры Ли, а это и требовалось доказать.

Эта теорема не имеет глобального обращения, а лишь локальное, и, чтобы сформулировать это обращение, нам понадобится новое определение. Если U — окрестность единицы группы Ли G, то аналитическое отображение Ψ окрестности U в группу Ли $\bar{G}$, такое, что $\Psi(gh) = \Psi(g)\Psi(h)$, когда g, h и gh принадлежат U, называется *локальным гомоморфизмом* G в $\bar{G}$. Если обратное отображение также является локальным гомоморфизмом, т. е. оно единственно и аналитично в некоторой окрестности единицы в $\bar{G}$, то Ψ есть *локальный изоморфизм*. Если, кроме того, $G=\bar{G}$, то Ψ — *локальный автоморфизм* G.

Теперь мы можем сформулировать обращение теоремы 1.

Теорема 2. *Если Λ и $\bar{\Lambda}$ — алгебры Ли групп Ли G и $\bar{G}$, то любой гомоморфизм алгебры Ли ψ: $\Lambda \to \bar{\Lambda}$ индуцирует локальный гомоморфизм Ψ: $G \to \bar{G}$, задаваемый при помощи экспоненциального отображения, а именно $\Psi(e^{\lambda}) = e^{\psi(\lambda)}$ для e^{λ} в достаточно малой окрестности единицы в G.*

Доказательство. Использование формулы КБХ дает

$$\Psi(e^{\lambda}e^{\mu}) = \Psi(e^{\lambda+\mu+(1/2)[\lambda,\mu]+\ldots}) = e^{\psi(\lambda+\mu+(1/2)[\lambda,\mu]+\ldots)};$$

в силу того, что ψ является гомоморфизмом алгебры Ли, последнее выражение равно

$$e^{\psi(\lambda)+\psi(\mu)+(1/2)[\psi(\lambda),\psi(\mu)]+\ldots},$$

а так как формула КБХ справедлива также и в $\bar{G}$, то предыдущее выражение равно $e^{\psi(\lambda)}e^{\psi(\mu)}$, т. е. $\Psi(e^{\lambda}e^{\mu}) = \Psi(e^{\lambda})\Psi(e^{\mu})$, и теорема доказана.

Как следствие этой теоремы получаем, что если $\psi\colon \Lambda \to \bar{\Lambda}$ является изоморфизмом алгебры Ли, то Ψ есть локальный изоморфизм группы Ли; если, кроме того, $G = \bar{G}$ и $\Lambda = \bar{\Lambda}$, то Ψ — локальный автоморфизм группы G

Следующая теорема сформулирует условия, при которых локальный гомоморфизм может быть расширен до глобального. Этот вопрос возник в § 21.1, где было показано, что в квантовой механике могут появиться локальные представления групп, подобных $SO(3)$ и $\mathscr{L}_p$. Следует напомнить, что группы $SO(3)$ и $SU(2)$ только локально, но не глобально изоморфны и что группы $\mathscr{L}_p$ и $SL(2, \mathbb{C})$ тоже изоморфны лишь локально. В качестве второго примера примем за группу G двумерную группу тора, рассматриваемую как группа матриц вида

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}.$$

Соответствующая ей алгебра Ли Λ представляет собой коммутативную алгебру Ли матриц вида

$$\alpha\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Любое линейное преобразование

$$\alpha \to a\alpha + b\beta, \quad \beta \to c\alpha + d\beta,$$

где a, b, c, d вещественны и $ad - bc \neq 0$, является автоморфизмом алгебры Ли Λ. Соответствующий локальный автоморфизм G есть

$$\Psi\colon \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} e^{i(a\alpha + b\beta)} & 0 \\ 0 & e^{i(c\alpha + d\beta)} \end{pmatrix};$$

это справедливо только для достаточно малых α и β, поскольку, например, элемент

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

обладает тем свойством, что g^2 равен единице группы G, а это свойство не сохраняется при Ψ, кроме случаев специально подобранных чисел a и b.

Теорема 3. *Пусть Ψ — локальный гомоморфизм группы Ли G в группу Ли $\bar{G}$, определенный в некоторой окрестности U единицы в G. Тогда:*

(а) *если существует расширение $\hat{\Psi}$ отображения Ψ до отображения всей группы G, которое является гомоморфизмом в смысле* *элементарной теории групп, то* $\hat{\Psi}$ *непрерывно и поэтому аналитично во всей* G, *т. е. является гомоморфизмом группы Ли;*

(б) *если* G *— связная группа, то существует не более одного гомоморфизма группы Ли* $\hat{\Psi}$, *который является расширением* Ψ;

(в) *если* G *односвязна, то существует в точности одно такое расширение* $\hat{\Psi}$.

Доказательство части (а). Для произвольного фиксированного g_0 положим $g=g_0h$, где h принадлежит окрестности U, так что отображение $h \longrightarrow \Psi(h)$ аналитично. Тогда $\hat{\Psi}(g)=\hat{\Psi}(g_0)\,\Psi(h)$, но произведения и обратные элементы аналитичны всюду в обеих группах (§ 25.11); поэтому h аналитичен в g и образ $\hat{\Psi}(g)$ аналитичен в g.

Доказательство части (б). Любой элемент g из G можно представить в виде $g_1g_2\ldots g_k$, где все множители принадлежат U; следовательно, если $\hat{\Psi}$ — любое расширение гомоморфизма Ψ, то $\hat{\Psi}(g)=\hat{\Psi}(g_1)\ldots\hat{\Psi}(g_k)=\Psi(g_1)\ldots$ $\ldots\Psi(g_k)$, т. е. образ $\hat{\Psi}(g)$ полностью определяется при помощи Ψ; значит, любые два таких расширения должны быть согласованы для каждого g.

Доказательство части (в). Как это иногда делалось и ранее, допустим, что V — подокрестность окрестности U, содержащая единицу и такая, что если g и h принадлежат V, то g^{-1} и h^{-1} также принадлежат V, а gh и hg содержатся в U. Будем строить отображение $\hat{\Psi}$. Пусть h и k — элементы группы G, соединенные гладкой кривой $\mathscr{C}$. Разобьем кривую $\mathscr{C}$ на малые сегменты при помощи точек (элементов группы) $g_0, g_1, \ldots, g_l$ так, что $g_0=h$ и $g_l=k$, а $g_i^{-1}g_{i+1}$ всегда содержится в V. Рассмотрим элемент группы $\bar{G}$

$$\bar{g}=\Psi(g_0^{-1}g_1)\,\Psi(g_1^{-1}g_2)\ldots\Psi(g_{l-1}^{-1}g_l);$$

если бы гомоморфизм Ψ был глобальным, то $\bar{g}$ был бы равен $\Psi(h^{-1}k)$. Из определения элемента $\bar{g}$ видно, что он не изменяется при измельчении данного разбиения кривой $\mathscr{C}$; поэтому, так как два любых разбиения при измельчении стремятся к одному и тому же, $\bar{g}$ зависит только от h, k и от кривой $\mathscr{C}$. Мы покажем сейчас, что $\bar{g}$ не зависит от кривой $\mathscr{C}$ при заданных h и k. В самом деле, пусть $\tilde{\mathscr{C}}$ — другая кривая, связывающая h с k, близкая к $\mathscr{C}$ и подвергнутая разбиению точками $\tilde{g}_0\ (=g_0=h)$, $\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_l(=g_l=k)$, причем такими, что $\tilde{g}_i$ близка к g_i для каждого i. Рассмотрим элемент

$$\bar{\bar{g}}=\Psi(g_0^{-1}\tilde{g}_1)\,\Psi(\tilde{g}_1^{-1}\tilde{g}_2)\ldots\Psi(\tilde{g}_{l-1}^{-1}g_l).$$

Этот элемент $\bar{\bar{g}}$ может быть получен из $\bar{g}$ путем введения подходящих множителей и последующей свертки с другими множителями, составляющими $\bar{g}$; например, вводя взаимно сокращающиеся множители

$$\Psi(g_1^{-1}\tilde{g}_1)\,\Psi(\tilde{g}_1^{-1}g_1) \quad \text{и} \quad \Psi(g_2^{-1}\tilde{g}_2)\,\Psi(\tilde{g}_2^{-1}g_2)$$

соответственно между первым и вторым множителями, а также между вторым и третьим множителями в $\bar{g}$, мы обнаруживаем, что

$$\Psi(\tilde{g}_1^{-1}g_1)\,\Psi(g_1^{-1}g_2)\,\Psi(g_2^{-1}\tilde{g}_2)=\Psi(\tilde{g}_1^{-1}\tilde{g}_2).$$

Таким образом видно, что $\bar{\bar{g}}=\bar{g}$, т. е. что $\bar{g}$ не изменяется при непрерывной деформации кривой $\mathscr{C}$, если удерживать фиксированными концевые точки

h и k. Наконец, в случае односвязной группы G две любые кривые, связывающие h с k, гомотопны; следовательно, $\bar{g}$ зависит только от h и k, так что можно записать $\bar{g}=\bar{g}(h, k)$. Кроме того,

$$\bar{g}(gh, gk)=\bar{g}(h, k) \quad \text{для любого } g\in G,$$

поскольку это верно для каждого из множителей $\Psi(g_i^{-1}g_{i+1})$. Отсюда следует, что отображение $\hat{\Psi}$ группы G в $\bar{G}$, задаваемое посредством $\hat{\Psi}(g)=\bar{g}(1, g)$, является искомым расширением локального гомоморфизма Ψ, так как при сложении кривых в G получается, что

$$\hat{\Psi}(g_1g_2)=\bar{g}(1, g_1)\,\bar{g}(g_1, g_1g_2)=\bar{g}(1, g_1)\,\bar{g}(1, g_2).$$

25.14. ТЕОРЕМА О ГОМОМОРФИЗМАХ ДЛЯ ГРУПП ЛИ

Теорема о гомоморфизмах для групп Ли отличается от соответствующей теоремы для абстрактных групп дополнительными топологическими аспектами.

Подгруппа группы Ли G называется *замкнутой*, если ее элементы образуют замкнутое точечное множество в многообразии группы G.

Теорема 1. *Ядро гомоморфизма Ψ группы Ли G на группу $\bar{G}$, т. е. множество*

$$G_0=\{g\in G\colon\ \Psi(g)=1 \ (\textit{единица группы } \bar{G})\},$$

является замкнутой нормальной подгруппой G.

Согласно элементарной теории групп, ядро гомоморфизма представляет собой нормальную подгруппу, которая замкнута в силу непрерывности отображения Ψ: если $\{g_i\}$—последовательность элементов в G_0, сходящаяся к h, то $\Psi(g_i)$ сходятся к $\Psi(h)$, но $\Psi(g_i)=1$ для каждого i, откуда $\Psi(h)=1$, и, значит, h принадлежит G_0.

Две следующие теоремы показывают, что если G_0—замкнутая подгруппа G (которая может как быть, так и не быть нормальной), то в G можно так выбрать логарифмические координаты, что они, будучи определены в G_0, будут логарифмическими координатами в G_0, и тем самым G_0 станет группой Ли со всеми присущими ей свойствами, а ее алгебра Ли будет подалгеброй алгебры Ли группы G.

Если $\mathscr{C}$: $g(t)$ $(0\leqslant t\leqslant\varepsilon)$—любая гладкая кривая, выходящая из единицы $(g(0)=1)$ и лежащая в подгруппе G_0, то касательный вектор к $\mathscr{C}$ в 1 называется *касательным вектором к G_0 в* 1.

Теорема 2. *Пусть G_0—замкнутая подгруппа G. Тогда множество Λ_0 всех касательных векторов к G_0 в 1 есть подалгебра алгебры Ли группы G. Если G_0 является нормальной подгруппой, то Λ_0—идеал.*

Доказательство. Допустим, что $\lambda \in \Lambda_0$. Тогда существует гладкая кривая $g(t)$, лежащая в G_0 и такая, что

$$\ln(g(t)) = \lambda t + \ldots,$$

где многоточие означает члены порядка t^2 и выше. Для любого положительного целого m $g(t/m)^m$ принадлежит G_0 и, согласно формуле КБХ,

$$\ln(g(t/m)^m) = \lambda t + \ldots,$$

где теперь многоточие означает члены порядка t^2/m и выше. Полагая $m \to \infty$, мы видим, что в силу замкнутости множества G_0 λt является координатой некоторой точки в G_0; поэтому для $\lambda \in \Lambda_0$ e^{λ} принадлежит G_0. Пусть $\lambda_1 \in \Lambda_0$ и $\lambda_2 \in \Lambda_0$; тогда по формуле КБХ вектор

$$\ln(e^{\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t}) = t(\lambda_1 + \lambda_2) + {}^1/_2 t^2 [\lambda_1, \lambda_2] + \ldots$$

является координатой некоторой точки в G_0. Используя рассуждения, аналогичные проведенным выше, и рассматривая линейные члены разложения, мы устанавливаем, что $\lambda_1 + \lambda_2 \in \Lambda_0$ и (в более общем виде) $t\lambda_1 + s\lambda_2$ для вещественных t и s принадлежит Λ_0, так что Λ_0 является подпространством. Аналогичным образом при учете квадратичных членов устанавливается, что $[\lambda_1, \lambda_2] \in \Lambda_0$ и, значит, Λ_0 — подалгебра. Наконец, в случае когда G_0 — нормальная подгруппа, лишь один из элементов λ_1, λ_2 должен принадлежать Λ_0, и мы видим, что Λ_0 — идеал.

Теперь ясно, как надо определить координаты в G_0. Пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — базис векторного пространства Λ, такой, что $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ $(k < n)$ является базисом Λ_0. Любой элемент λ представляется в виде $\lambda = \lambda^1 \varepsilon_1 + \ldots + \lambda^n \varepsilon_n$, и в таком случае $\lambda^1, \ldots, \lambda^k$ можно принять в качестве координат в G_0 в подходящей окрестности единицы. Для того чтобы найти эту окрестность, допустим, что N — окрестность нуля в алгебре Ли Λ группы G, в которой могут быть использованы логарифмические координаты. Тогда пересечение $N \cap \Lambda_0$ представляет собой открытое множество в Λ_0 и, следовательно, содержит окрестность N_0 (связное открытое множество) нуля в Λ_0. Множество U_0 в группе G_0, задаваемое как

$$U_0 = \{g \in G_0 \colon \ln g \in N_0\},$$

и отображение $\varphi_0(g) = (\lambda^1, \ldots, \lambda^k)$ множества U_0 в $\mathbb{R}^k$ определяют некоторую карту $\{U_0, \varphi_0, N_0\}$ в G_0. Она и другие карты, полученные при помощи трансляций в G_0, как это описано в § 25.11, называются *унаследованными* (*от* G). Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Если G_0 — замкнутая подгруппа G, а Λ и Λ_0 имеют описанный выше смысл, то G_0 со своими унаследованными картами представляет собой группу Ли, а Λ_0 — ее алгебру Ли.*

В следующих двух теоремах устанавливается, что если G_0 — замкнутая нормальная подгруппа, то факторгруппа G/G_0 может быть снабжена такой структурой многообразия, которая делает ее группой Ли; алгебра Ли этой группы изоморфна Λ/Λ_0; естественный гомоморфизм G на G/G_0 аналитичен по отношению к указанной структуре многообразия. Последняя из теорем данного параграфа представляет собой собственно теорему о гомоморфизмах.

Нетрудно видеть, что последние $n-k$ компонент $\lambda^{k+1}, \ldots, \lambda^n$ вектора λ относительно базиса $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, описанного выше, можно принять в качестве координат в G/G_0, ибо они постоянны в каждом смежном классе (группы G_0 в G) или, точнее, в пересечении смежного класса и подходящей окрестности V единицы в G, в которой могут быть использованы логарифмические координаты. В самом деле, если $e^{\lambda'}=e^{\lambda}e^{\mu}$, где $\mu \in \Lambda_0$, так что $e^{\lambda'}$ и e^{λ} находятся в одном смежном классе, то, согласно формуле КБХ,

$$\lambda'=\lambda+\mu+{}^1/_2[\lambda, \mu]+\ldots;$$

все члены правой части начиная с μ принадлежат Λ_0, поскольку Λ_0 является идеалом; поэтому λ' и λ имеют одни и те же последние $n-k$ компонент. Ясно также, что эти последние компоненты различны (по крайней мере одна из них) для различных смежных классов. В этих координатах функции умножения и обращения, $\mathfrak{m}(\cdot, \cdot)$ и $\mathfrak{l}(\cdot)$, в G/G_0 непрерывны (фактически аналитичны). Для любого произведения $e^{\lambda}e^{\lambda'}=e^{\lambda''}$ в G все n компонент вектора λ'' непрерывно зависят от всех компонент векторов λ и λ'; следовательно, в частности, это верно и для последних $n-k$ компонент, которые являются координатами соответствующих смежных классов. Естественный гомоморфизм G на G/G_0, при котором элемент группы e^{λ} отображается на смежный класс, представителем которого он является, непрерывно зависит от этих координат, ибо данное отображение заключается просто в игнорировании первых k компонент вектора λ.

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 4. *Допустим, что G, G_0, Λ, Λ_0, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ таковы, как описано выше. Тогда $\lambda^{k+1}, \ldots, \lambda^n$ можно взять в качестве координат $\varphi(\bar{g})$ ($\bar{g}$ обозначает смежный класс) в подмножестве $\bar{U}$ группы G/G_0 (состоящем из смежных классов, которые пересекаются с окрестностью V в G), таким образом определив карту, благодаря чему G/G_0 становится $(n-k)$-мерной группой Ли, называемой* факторгруппой Ли *(она также обозначается через G/G_0)* группы G по отношению к G_0. *Естественный гомоморфизм G на G/G_0 непрерывен и, значит, является гомоморфизмом группы Ли (следовательно, он аналитичен).*

Приведем пример, показывающий, что заключения теоремы могут не иметь места, если подгруппа G_0 не является *замкнутой.* Пусть G—двумерная группа тора, состоящая из матриц

$$\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \quad (\alpha, \beta \text{ вещественны}).$$

Пусть G_0—подгруппа из матриц

$$\begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{i\theta t} \end{pmatrix} \quad (t \text{ вещественно}),$$

где θ—фиксированное вещественное иррациональное число. Многообразие группы G является тором, а многообразие группы G_0—спиралевидной кривой, всюду плотной на этом торе. Подгруппа G_0 нормальна, но не замкнута. Алгебра Ли Λ представляет собой плоскость, и при отображении $e^{\lambda} \to \lambda$ группы G на Λ образом G_0 является множество параллельных прямых, всюду плотное в этой плоскости. Λ_0 есть прямая из этого множества, проходящая через начало координат. Относительно базиса $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, такого, что ε_1 лежит теперь на Λ_0, вторая координата λ^2 имеет различные значения на различных прямых множества, составляющего G_0, и поскольку любая окрестность начала координат пересекается бесконечным числом прямых указанного множества, то λ^2 не является постоянной ни в G_0, ни в любом смежном классе.

Теперь сформулируем без доказательства две последние теоремы.

Теорема 5. *Алгебра Ли группы G/G_0 изоморфна Λ/Λ_0.*

Теорема 6 (теорема о гомоморфизмах). *Если G_0—ядро гомоморфизма группы Ли G на $\overline{G}$, то $G/G_0 \cong \overline{G}$. Иначе говоря, если Ψ—изоморфизм (в смысле элементарной теории групп), определенный в* § 18.8, *то Ψ и обратное отображение Ψ^{-1} аналитичны.*

Первые семь из приведенных ниже упражнений имеют отношение к отчасти неясному вопросу (упомянутому в § 25.1) касательно того, какие группы Ли имеют точные представления и, следовательно, являются линейными группами, т. е. могут рассматриваться как группы матриц (или соответствующих линейных преобразований), как это обычно справедливо для групп, встречающихся в приложениях. Каждая алгебра Ли Λ имеет хотя бы одно представление, так называемое присоединенное представление алгебры Λ на себя (упражнение 2). Посредством экспоненциального отображения оно дает локальное представление группы Ли G на ее алгебру Λ. Это представление может быть, а может и не быть расширено до представления всей группы G, и в случае существования такого расширения оно может быть, а может и не быть точным.

Упражнение 8 связано с накрывающими группами. Группа $SU(2)$ есть универсальная накрывающая группа группы $SO(3)$. Основная теорема § 24.3 о накрывающих многообразиях гласит, что не существует никаких групп, которые накрывали бы $SU(2)$, будучи неизоморфными $SU(2)$. Следовательно, как утверждалось в § 21.1, не существует многозначных представлений группы $SO(3)$ кроме двузначных.

Упражнения

Центром C группы G называется множество таких элементов группы которые коммутируют с любым элементом группы, т. е.

$$C = \{g \in G\colon\ gh = hg \quad \forall h \in G\}.$$

Аналогично центр Z алгебры Ли есть множество таких элементов, которые коммутируют с каждым элементом этой алгебры, т. е.

$$Z = \{\lambda \in \Lambda\colon\ [\lambda, \mu] = 0 \quad \forall \mu \in \Lambda\}.$$

1. Покажите, что центр группы Ли является замкнутой нормальной подгруппой, а центр алгебры Ли — идеалом.

2. Напомним, что для любого λ из Λ Ad_λ есть линейное преобразование $\mu \longrightarrow [\lambda, \mu]$ алгебры Λ на себя. Покажите, что если произведение Ли двух таких преобразований определено обычным образом как

$$[\mathrm{Ad}_\lambda, \mathrm{Ad}_\mu] = \mathrm{Ad}_\lambda \mathrm{Ad}_\mu - \mathrm{Ad}_\mu \mathrm{Ad}_\lambda,$$

после чего множество $\{\mathrm{Ad}_\lambda\colon \lambda \in \Lambda\}$ всех таких преобразований становится алгеброй Ли, то отображение $\lambda \longrightarrow \mathrm{Ad}_\lambda$ является гомоморфизмом алгебры Λ на эту новую алгебру. Этот гомоморфизм называется *присоединенным представлением* Λ (на себя).

3. Покажите, что если Λ — *алгебра без центра*, т. е. $Z = \{0\}$, то присоединенное представление является точным (т. е. приведенный выше гомоморфизм есть изоморфизм).

4. Если G односвязна, то локальный гомоморфизм $e^\lambda \longrightarrow e^{\mathrm{Ad}_\lambda}$ группы G на группу линейных преобразований в алгебре Λ, рассмотренный в § 25.7, можно расширить до гомоморфизма всей группы G, который называется *присоединенным представлением группы* G на Λ. Покажите, что необходимое условие для того, чтобы этот гомоморфизм был изоморфизмом, заключается в отсутствии центра у группы G, т. е. C должен быть равен $\{1\}$; тогда данный гомоморфизм локально является изоморфизмом.

5. Для иллюстрации упражнения 4 возьмем $SU(2)$ в качестве G и примем за базис алгебры Ли Λ группы $SU(2)$ матрицы T_1, T_2, T_3 размера 2×2, определенные в (22.7.5). Тогда преобразования Ad_λ представляются вещественными матрицами размера 3×3. Покажите, что матрицы e^{Ad_λ} образуют группу $SO(3)$ и что гомоморфизм $e^\lambda \longrightarrow e^{\mathrm{Ad}_\lambda}$ в этом случае представляет собой знакомый нам $(2 \longrightarrow 1)$-гомоморфизм группы $SU(2)$ на группу $SO(3)$. Что является центрами групп $SU(2)$ и $SO(3)$?

6. Если C — центр группы G, то не обязательно отсутствие центра у факторгруппы G/G_0. Покажите это путем рассмотрения конечной группы

$$G = \{\pm 1,\ \pm i,\ \pm j,\ \pm k\},$$

где i, j, k — базисные единицы кватернионов, удовлетворяющие соотношениям

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

7. Покажите, что центр Z алгебры Ли Λ является идеалом и что факторалгебра Λ/Z является алгеброй без центра.

8. Пусть G — связная группа Ли, M' — универсальное накрывающее многообразие многообразия M группы G, и пусть ψ — проекция M' на M. Многообразие M' становится группой G', называемой *универсальной накрывающей группой* группы G, если в этом многообразии определить умножение следующим образом. Сначала выберем одну из точек в M', которая находится над единицей 1 группы G, и обозначим ее $1'$ [следовательно $\psi(1') = 1$ и $1'$

будет единицей группы G']. Теперь допустим, что g' и h' — две произвольные точки в M', а $g'(s)$ и $h'(s)$ — кривые в M', связывающие соответственно g' и h' с $1'$ так, что $g'(0)=h'(0)=1'$, тогда как $g'(1)=g'$ и $h'(1)=h'$.

Допустим далее, что $g(s)$ и $h(s)$ — проекции кривых $g'(s)$ и $h'(s)$ на многообразие M, т. е. $g(s)=\psi(g'(s))$ и $h(s)=\psi(h'(s))$. Тогда $k(s)$, равное произведению $g(s)h(s)$, будет некоторой кривой в M, выходящей из 1. Пусть $k'(s)$ — кривая в M', которая получается при поднятии $k(s)$ в многообразие M', причем так, что $k'(0)=1'$ (см. § 24.2); тогда произведением $g'h'$ в M' должна быть определена точка $k'(1)$.

Покажите, что это определение состоятельно (т. е. не зависит от выбора кривых; вспомним, что M' — односвязное многообразие) и что благодаря ему G' становится группой Ли. Покажите, что проекция ψ есть гомоморфизм группы Ли G' на G. Покажите, что если g_0' лежит над 1 [т. е. если $\psi(g_0')=1$; иначе говоря, если g_0' принадлежит ядру упомянутого гомоморфизма], то g_0' коммутирует с любым $h'\in G'$. *Указание.* Возьмите определяющие кривые в M' так, что $h'(s)=1'$ для $0\leqslant s\leqslant 1/2$, а $g_0'(s)=g_0'$ для $1/2\leqslant s\leqslant 1$.

25.15. ПРЯМАЯ И ПОЛУПРЯМАЯ СУММЫ АЛГЕБР ЛИ

Понятия, которые обсуждаются в этом параграфе, аналогичны прямому и полупрямому произведениям групп, определенным в § 18.15 в связи с кристаллографическими пространственными группами. Предположим, что некоторая алгебра Ли Λ может быть представлена в виде прямой суммы (в смысле векторного пространства) двух подпространств Λ_1 и Λ_2, т. е. любой вектор $\lambda\in\Lambda$ можно однозначно разложить в сумму $\lambda_1+\lambda_2$, где λ_1 принадлежит Λ_1, а λ_2 принадлежит Λ_2. Предположим, кроме того, что $[\lambda_1, \lambda_2]=0$ для любых $\lambda_1\in\Lambda_1$ и $\lambda_2\in\Lambda_2$. В таком случае Λ_1 и Λ_2 являются идеалами в Λ, а Λ называют их прямой суммой.

Теперь предположим, что Λ есть прямая сумма (в смысле векторного пространства) Λ_0 и M, где Λ_0 — идеал, а M — только подалгебра. Тогда для λ_1 и λ_2, принадлежащих Λ_0, и для μ_1 и μ_2, принадлежащих M,

$$[\lambda_1+\mu_1, \lambda_2+\mu_2]=[\lambda_1, \lambda_2]+[\mu_1, \lambda_2]+[\lambda_1, \mu_2]+[\mu_1, \mu_2].$$

Первые три члена в правой части содержатся в Λ_0 (поскольку Λ_0 является идеалом) и могут быть переписаны в виде

$$[\lambda_1, \lambda_2]+\mathrm{Ad}_{\mu_1}\lambda_2-\mathrm{Ad}_{\mu_2}\lambda_1,$$

тогда как четвертый член, $[\mu_1, \mu_2]$, содержится в M.

Такой же результат получается, если мы начинаем с алгебр Ли Λ_0 и M и строим Λ, но сначала следует отметить некоторые свойства линейных преобразований Ad_μ. Каждое из них преобразует идеал Λ_0 в себя, и отображение $\mu\to\mathrm{Ad}_\mu$ является представлением алгебры M на Λ_0 согласно упражнению 2 предыдущего параграфа, потому что для μ и ν, принадлежащих M,

$$\mathrm{Ad}_{[\mu, \nu]}=\mathrm{Ad}_\mu\,\mathrm{Ad}_\nu-\mathrm{Ad}_\nu\,\mathrm{Ad}_\mu.$$

Для фиксированного μ преобразование Ad_μ есть дифференцирование, т. е.

$$\mathrm{Ad}_\mu[\lambda_1, \lambda_2]=[\mathrm{Ad}_\mu\lambda_1, \lambda_2]+[\lambda_1, \mathrm{Ad}_\mu\lambda_2].$$

[В любой алгебре *дифференцирование* представляет собой линейное преобразование ρ, такое, что $\rho(x\circ y)=\rho(x)\circ y+x\circ\rho(y)$, где кружок означает операцию умножения в этой алгебре.]

Пусть теперь Λ_0 и M — две заданные произвольные алгебры Ли, и пусть преобразование $\mu\to\rho(\mu)$ является представлением алгебры M посредством дифференцирований в алгебре Λ_0. Алгебра Ли, которая называется *полупрямой суммой* алгебр Λ_0 и M и обозначается через $\Lambda_0\bigoplus_\rho M$, определяется следующим образом. Рассматриваемая как векторное пространство, она представляет собой прямую сумму Λ_0 и M, так что ее элементы суть упорядоченные пары $\{\lambda, \mu\}$, где $\lambda\in\Lambda_0$, а $\mu\in M$, и, кроме того, в ней определено произведение Ли следующим образом:

$$[\{\lambda_1, \mu_1\}, \{\lambda_2, \mu_2\}]=\{[\lambda_1, \lambda_2]+\rho(\mu_1)\lambda_2-\rho(\mu_2)\lambda_1, [\mu_1, \mu_2]\}.$$

Очевидно, что это произведение линейно по каждому множителю и антисимметрично.

Упражнение

1. Покажите, что определенное сейчас произведение удовлетворяет тождеству Якоби.

Пусть $\Lambda=\Lambda_0\bigoplus_\rho M$. Если отождествить Λ_0 с множеством элементов вида $\{\lambda, 0\}$, а M с множеством элементов вида $\{0, \mu\}$, то $\rho(\mu)$ станет в точности преобразованием Ad_μ в Λ, потому что

$$\mathrm{Ad}_{\{0,\mu\}}\{\lambda, 0\}=[\{0, \mu\}, \{\lambda, 0\}]=\{\rho(\mu)\lambda, 0\}.$$

Упражнение

2. Пусть G_0 и H — замкнутые подгруппы группы Ли G, причем G_0 нормальна. Допустим, что каждый элемент g из G имеет единственное представление в виде g_0h, где g_0 и h принадлежат соответственно G_0 и H. Пусть далее Λ, Λ_0 и M — алгебры Ли групп G, G_0 и H. Покажите, что $\Lambda=\Lambda_0\bigoplus_\rho M$, где $\rho(\mu)=\mathrm{Ad}_\mu$ для любого $\mu\in M$. *Указание*. Если для $\lambda\in\Lambda_0$ и $\mu\in M$ $\{\lambda, \mu\}$ означает $\ln(e^\lambda e^\mu)$, найдите произведение Ли двух таких пар, используя разложение формулы КБХ для

$$e^{\{\lambda_1, \mu_1\}}e^{\{\lambda_2, \mu_2\}}$$

и для каждого множителя отдельно.

Полупрямая сумма становится прямой суммой $\Lambda_0\bigoplus M$, если ρ — тривиальный гомоморфизм, который отображает каждый элемент μ из M на нулевое преобразование, т. е. $\rho(\mu)\lambda=0$ для всех λ. В этом случае Λ_0 и M являются идеалами в $\Lambda_0\bigoplus M$.

Фундаментальная теорема о структуре, которая доказывается на весьма поздней стадии развития рассматриваемой теории, утверждает, что любую алгебру Ли можно представить в виде повторной полупрямой суммы

$$(\ldots((\Lambda_0 \oplus_{\rho_1} \Lambda_0) \oplus_{\rho_2} \Lambda_2) \ldots \oplus_{\rho_k} \Lambda_k)$$

алгебр Ли, каждая из которых или одномерна, или проста; поэтому главной целью теории является классификация простых алгебр. Приведенная теорема справедлива как для вещественных, так и для комплексных алгебр Ли; весьма тонкое ее доказательство можно найти в книге Хаузнера и Шварца [1968].

25.16. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТЫХ КОМПЛЕКСНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Отношения, связывающие различные объекты рассматриваемой теории, показаны на следующей схеме:

Группа Ли $\to$ Вещественная алгебра Ли $\to$ Комплексная алгебра Ли

Простая комплексная алгебра Ли $\to$ Простые вещественные алгебры Ли $\to$ Группы Ли

Любая группа Ли определяет единственную вещественную алгебру Ли, в свою очередь определяющую единственную комплексную алгебру Ли при помощи процесса, называемого комплексификацией, который будет описан ниже. Комплексный случай проще вещественного, так же как и в элементарной теории матриц, потому что совокупность комплексных чисел $\mathbb{C}$ алгебраически замкнута, тогда как $\mathbb{R}$ не является таковой. (Вспомним, что вещественная матрица в общем случае имеет комплексные собственные значения и собственные векторы.) Имеется полная классификация простых комплексных алгебр Ли, а именно существуют четыре регулярные бесконечные серии алгебр и пять так называемых исключительных алгебр. Следующий шаг заключается в том, чтобы найти все простые вещественные алгебры, комплексификация которых приводит к данной комплексной алгебре. Такой шаг выполнен в книге Хаузнера и Шварца [1968], где читатель может ознакомиться с полной классификацией простых вещественных алгебр. Этот результат получить гораздо сложнее, чем классификацию комплексных алгебр, но зато реализуется два шага в классификации групп Ли; для этого нужно, во-первых, найти все возможные повторные прямые суммы одномерных и простых алгебр, как описано в конце предыдущего параграфа, а во-вторых, найти все (скажем, связные) группы Ли, которые дают данную вещественную алгебру Ли.

Мы дадим очень краткий набросок этой теории, используя классификацию простых комплексных алгебр. Алгебраические подробности и ряд лемм, необходимых для доказательств, читатель может найти в книге Хаузнера и Шварца [1968].

Как уже указывалось в предыдущем параграфе, нас в основном интересуют простые алгебры, но при их рассмотрении потребуются некоторые непростые алгебры, а именно полупростые, разрешимые и нильпотентные алгебры Ли. Для того чтобы их определить, заметим прежде всего, что если Λ_1 и Λ_2 — любые идеалы в некоторой вещественной или комплексной алгебре Ли Λ, то произведение $[\Lambda_1, \Lambda_2]$, определяемое как подпространство, которое является линейной оболочкой элементов вида $[\lambda_1, \lambda_2]$, где $\lambda_1 \in \Lambda_1$, а $\lambda_2 \in \Lambda_2$, т. е. подпространство

$$[\Lambda_1, \Lambda_2] = \text{линейная оболочка } \{[\lambda_1, \lambda_2]\colon \lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda_2\},$$

есть идеал, содержащийся как в Λ_1, так и в Λ_2. Теперь мы определим две нисходящие последовательности идеалов в Λ, а именно

$$\Lambda^1 = \Lambda \supset \Lambda^2 \supset \Lambda^3 \supset \ldots$$

и

$$\Lambda^{(1)} = \Lambda \supset \Lambda^{(2)} \supset \Lambda^{(3)} \supset \ldots,$$

используя индукцию

$$\Lambda^{k+1} = [\Lambda, \Lambda^k], \quad \Lambda^{(k+1)} = [\Lambda^{(k)}, \Lambda^{(k)}].$$

Говорят, что алгебра Λ *разрешима*, если $\Lambda^{(k)} = 0$ для некоторого k, и *нильпотентна*, если $\Lambda^k = 0$ для некоторого k. Легко видеть, что нильпотентная алгебра разрешима; действительно, $\Lambda^{(k)} \subset \Lambda^k$ для всех k, что устанавливается путем индукции по k.

Как и в § 25.12, алгебра Ли Λ более чем одного измерения *проста* в случае, когда она не содержит собственных ненулевых идеалов. Алгебра Ли называется *полупростой*, если она не содержит собственных ненулевых разрешимых идеалов (в этом случае сама алгебра Λ не может быть разрешима, так что слово «собственных» в последнем определении можно опустить).

При дальнейшем развитии теории окажется, что алгебра Λ будет полупростой тогда и только тогда, когда $\Lambda^2 = \Lambda$ (отсюда возникает требование, что $\dim\Lambda > 1$, ибо если $\dim\Lambda = 1$, то $\Lambda^2 = 0$); далее, алгебра Λ полупроста тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде прямой суммы идеалов

$$\Lambda = \Lambda_1 \oplus \ldots \oplus \Lambda_k,$$

где каждое слагаемое Λ_k является простой алгеброй.

Если Λ — вещественная алгебра Ли, то ее *комплексификация* определяется как комплексная алгебра Ли $\hat{\Lambda}$, элементами которой являются формальные суммы $\lambda + i\mu$, где λ и μ принадлежат Λ, и для которой линейные комбинации и произведения Ли определяются очевидным образом; в частности,

$$[\lambda_1 + i\mu_1, \lambda_2 + i\mu_2] = [\lambda_1, \lambda_2] + i[\mu_1, \lambda_2] + i[\lambda_1, \mu_2] - [\mu_1, \mu_2].$$

Алгебра $\hat{\Lambda}$ полупроста в том и только том случае, когда Λ полупроста. Если Λ проста, то ее комплексификация либо проста, либо представляет собой прямую сумму двух идентичных (т. е. изоморфных) простых комплексных алгебр.

Любая вещественная или комплексная алгебра Ли Λ содержит нильпотентные подалгебры (они, разумеется, не являются идеалами, если Λ полупроста); в частности, она содержит так называемую подалгебру Картана M, определяемую ниже, которая является нильпотентной. Для анализа структуры алгебры Λ исследуют структуру подалгебры M и соотношение между элементами M и остальными элементами алгебры Λ. Это соотношение описывается при помощи операторов Ad_μ, $\mu \in M$; оператор Ad_μ преобразует элемент алгебры Λ в некоторый другой элемент Λ, а именно преобразует λ в $[\mu, \lambda]$. Отображение $\mu \to \mathrm{Ad}_\mu$ есть представление подалгебры M на векторном пространстве Λ; поэтому теория начинается с рассмотрения общих представлений разрешимых и нильпотентных алгебр Ли.

Изучение представления ρ абстрактной алгебры Λ имеет то преимущество, что, в то время как λ из Λ представляет собой абстрактный объект, $\rho(\lambda)$ является линейным преобразованием в векторном пространстве, и, значит, могут быть применены стандартные методы линейной алгебры; например, в комплексном случае преобразование $\rho(\lambda)$ имеет по крайней мере одно собственное значение и один собственный вектор. Кроме того, произведение Ли преобразований $\rho(\lambda)$ и $\rho(\mu)$ есть просто $\rho(\lambda)\rho(\mu) - \rho(\mu)\rho(\lambda)$.

Пусть ρ — представление любой алгебры Ли Λ на векторном пространстве V. Назовем $\mathbf{v}$ из V *весовым вектором* представления ρ, если он является одновременно собственным вектором всех преобразований $\rho(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, т. е. если

$$\rho(\lambda)\mathbf{v} = \alpha(\lambda)\mathbf{v} \quad \forall \lambda \in \Lambda,$$

где $\alpha(\cdot)$ — скалярнозначная функция, очевидно линейная, определенная на Λ и называемая соответствующим *весом* представления ρ. Вектор $\mathbf{v}$ из V является *обобщенным весовым вектором* представления ρ, соответствующим весу $\alpha(\cdot)$, если для некоторого целого k

$$(\rho(\lambda) - \alpha(\lambda)I)^k\mathbf{v} = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda,$$

где I — тождественное преобразование в V. Множество всех обобщенных весовых векторов для данного $\alpha(\cdot)$ называется соответствующим *весовым пространством* и обозначается через V_α. Таким образом, вес, весовой вектор и весовое пространство соответствуют собственному значению, собственному вектору и алгебраическому собственному подпространству для случая единственного линейного преобразования. В этом последнем случае, если V — комплексное векторное пространство, то оно является прямой суммой всех алгебраических собственных подпространств $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$, соответствующих собственным значениям $z_1, \ldots, z_k$,—это отражение того факта, что любая матрица может быть приведена к жордановой нормальной форме. Аналогичные результаты имеют место для весов и весовых векторов, когда рассматриваемая алгебра Ли разрешима или нильпотентна.

Теорема 1. *Если ρ—представление разрешимой комплексной алгебры Ли M на векторном пространстве V, то ρ имеет хотя бы один весовой вектор* $\mathbf{v}$ *и соответствующий вес $\alpha(\cdot)$.*

Если далее допустить, что M нильпотентна, то мы имеем следующий результат.

Теорема 2. *Если ρ—представление нильпотентной комплексной алгебры Ли M на векторном пространстве V, то весовые пространства представления ρ натягивают V; иначе говоря, V является прямой суммой весовых пространств:*

$$V = V_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus V_{\alpha_k},$$

где V_{α_j}—весовое пространство, соответствующее весу $\alpha_j(\cdot)$, $j=1, \ldots, k$.

Доказательство каждой из этих теорем осуществляется при помощи индукции по размерности n алгебры M; идеал M^2 не совпадает с M, и если N есть подпространство M размерности $n-1$, содержащее M^2, то N является подалгеброй (на самом деле идеалом), причем она разрешима в случае теоремы 1 и нильпотентна в случае теоремы 2; следовательно, индуктивное предположение может быть применено к N. Индукция начинается с $n=1$, но в этом случае с точностью до скалярного множителя имеется лишь одно линейное преобразование $\rho(\lambda)$ и утверждения теорем сводятся к хорошо известным соответствующим фактам линейной алгебры. Алгебраическая работа для выполнения этих доказательств вполне проста, но объем ее столь велик, что может обескуражить слабого духом.

Теперь введем два понятия, играющих важную роль при анализе общей алгебры Ли Λ: *симметричная билинейная форма* и *подалгебра Картана*. Первое понятие относится к симметричной форме (λ, μ), определенной для всех λ и μ из Λ посредством равенства

$$(\lambda, \mu) = \operatorname{tr}(\operatorname{Ad}_\mu \operatorname{Ad}_\lambda),$$

где tr означает след[1]). Эта форма может быть вещественно- или

[1]) Эта билинейная форма иногда называется формой Киллинга.— *Прим. перев.*

комплекснозначной в зависимости от того, является ли Λ вещественной или комплексной алгеброй Ли, но (λ, μ) не является положительно определенной, исключая специальный случай, о котором будет сказано ниже. Основная теорема, именуемая *критерием Картана*, гласит, что вещественная или комплексная алгебра Ли полупроста в том и только том случае, когда симметричная билинейная форма невырожденна, а это означает, что не существует отличного от нуля элемента λ, для которого $(\lambda, \mu)=0$ при всех μ.

Если Λ — любая комплексная алгебра Ли, а M — нильпотентная подалгебра, то мы можем применить теорему 2 к присоединенному представлению подалгебры M на Λ, заменяя символы $\rho(\mu)$ и V на Ad_μ и Λ. Веса, весовые векторы и весовые пространства этого представления в таком случае называются соответственно *корнями*, *корневыми векторами* и *корневыми пространствами* подалгебры M в Λ. Если $\alpha(\cdot)$ есть корень, то соответствующее корневое пространство обозначается через Λ_α; оно является подпространством пространства Λ. Из нильпотентности M следует, что нулевая функция, т. е. $\alpha(\lambda)=0$ для всех λ, представляет собой один из таких корней, а соответствующее корневое пространство, обозначаемое через Λ_0, содержит M. Если нильпотентная подалгебра M может быть выбрана так, что Λ_0 совпадает с M, то M называется *подалгеброй Картана* алгебры Λ. Основная теорема гласит, что любая комплексная алгебра Ли имеет подалгебру Картана.

Оказывается, что в случае комплексной *полупростой* алгебры Ли Λ: (а) подалгебра Картана M коммутативна; (б) для каждого $\alpha \neq 0$ корневое пространство Λ_α одномерно; (в) если α — корень, то $-\alpha$ также корень; (г) если λ и λ' — ненулевые векторы в Λ_α и в $\Lambda_{-\alpha}$, то $[\lambda, \lambda']$ есть ненулевой вектор в M и $(\lambda, \lambda') \neq 0$. Пронумеруем ненулевые корни так: $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \ldots, \pm\alpha_k$, выберем векторы λ_i и λ_{-i} в Λ_{α_i} и в $\Lambda_{-\alpha_i}$ нормированными так, что $(\lambda_i, \lambda_{-i})=1$, и введем обозначения

$$\mu_i=[\lambda_i, \lambda_{-i}], \quad i=1, \ldots, k.$$

Можно показать, что M является линейной оболочкой векторов μ_i.

Из пунктов (а) и (б) предыдущего абзаца следует, что в случае полупростой алгебры появляются только обычные корневые векторы (т. е. нет обобщенных векторов). Для корневых векторов (λ_α ($\alpha \neq 0$) это следует из одномерности подпространства Λ_α; и любой вектор ν в $\Lambda_0=M$ есть корневой вектор, потому что $\mathrm{Ad}_\mu \nu=0$ для всех μ в M.

Подалгебра Картана не единственна, но можно показать, что если M' — любая другая подалгебра Картана в Λ, то M и M' имеют одинаковую размерность и существует автоморфизм алгебры Λ, который переводит M в M'; следовательно, любая из таких подалгебр может быть использована для исследования структуры алгебры Λ.

Обнаружено, что конфигурация векторов μ_i полностью определяет алгебру Ли. Описание этой конфигурации сильно упрощается при учете того счастливого обстоятельства, что если M_r обозначает вещественное векторное пространство, состоящее из линейных комбинаций μ_i с вещественными коэффициентами, то естественная билинейная форма $(\cdot\,,\,\cdot)$ является вещественной и положительно определенной в M_r; следовательно, M_r представляет собой евклидово пространство, если $(\cdot\,,\,\cdot)$ взять в качестве скалярного произведения. Можно показать, что вещественная размерность пространства M_r совпадает с комплексной размерностью пространства M, и мы обозначим ее через m. Тогда (комплексная) размерность алгебры Λ равна $m+2k$. Длина вектора μ в M_r есть $\|\mu\|=(\mu,\ \mu)^{1/2}$, а угол между двумя такими векторами определяется равенством

$$\cos \angle \mu,\ \nu = (\mu,\ \nu)/(\|\mu\|\|\nu\|).$$

Звезда в M_r, которая состоит из векторов μ_i, выходящих из начала координат, имеет довольно высокую степень симметрии и может быть описана следующим образом.

1) Для любой заданной простой алгебры Λ либо все μ_i имеют одинаковую длину, либо существуют две длины, причем часть векторов μ_i обладает одной длиной, остальная часть—другой.

2) Угол между любыми двумя векторами представляет собой целое кратное 30 или 45°.

3) Если угол равен 30 или 150°, то один вектор длинный, а другой—короткий, причем отношение длин равно $\sqrt{3}$. Если угол равен 45 или 135°, то отношение длин равно $\sqrt{2}$. Если угол равен 60 или 120°, то оба вектора имеют одинаковую длину.

4) Вся звезда симметрична относительно отражения в каждой гиперплоскости, перпендикулярной к одному из μ_i.

Любая минимальная звезда, удовлетворяющая этим условиям, определяет единственную простую комплексную алгебру Ли, и различные звезды определяют различные алгебры. Если Λ полупроста и является прямой суммой простых алгебр, т. е. $\Lambda=\Lambda_1\oplus\ldots\oplus\Lambda_k$, то M_r натягивается на k взаимно ортогональных подпространств, каждое из которых содержит звезду одной из простых алгебр.

Допустим теперь, что алгебра Λ проста. Когда M_r одномерно, звезда состоит из двух противоположных векторов одинаковой длины и алгебра Λ, обозначаемая через A_1, имеет размерность $l=3$. Когда M_r двумерно, существуют три возможные звезды, которые изображены на рис. 25.2, где приведены также размерности l и обозначения соответствующих алгебр, а именно A_2, B_2, G_2 Когда M_r трехмерно, также существуют три возможные звезды, соответствующие алгебрам A_3, B_3, C_3. Звезда алгебры A_3 состоит из шести пар противоположных векторов μ_i и μ_{-i}, причем все они имеют одинаковую длину и соединяют начало координат с серединами ребер куба, углы между векторами равны 60, 90, 120 и 180°. В звезде алгебры B_3 имеется шесть пар длинных векторов, расположенных, как и в A_3, т. е. ведущих к ребрам куба, и три пары взаимно ортогональных коротких векторов, образующих углы 45° с ближайшими длинными векторами, причем отношение длин равно $\sqrt{2}$; короткие векторы соединяют начало

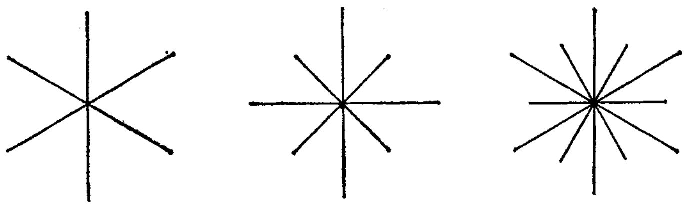

Рис. 25.2. Двумерные звезды простых комплексных алгебр Ли.

координат с центрами граней куба. Звезда алгебры C_3 представляет собой звезду алгебры B_3, в которой длинные и короткие векторы поменялись местами, так что эта звезда соответствует ромбическому додекаэдру. Размерности, соответствующие алгебрам A_2, B_2, G_2, A_3, B_3, C_3, равны 8, 10, 14, 15, 21, 21.

Конечно, бессмысленно говорить о длинах и направлениях векторов λ_i, поскольку они лежат в комплексном пространстве Λ, для которого $(\cdot\,,\cdot)$ не является даже эрмитовым скалярным произведением. Но вполне разумно найти произведения Ли $[\lambda, \mu]$ для достаточно многих пар λ, μ так, чтобы определить структуру алгебры Λ. Наилучшим образом это делается при помощи моделей, которые будут описаны в следующем параграфе.

Для того чтобы определить возможные звезды в случае, когда M_r имеет более трех измерений, используют метод, предложенный Е. Б. Дынкиным. *Простым множеством* векторов в звезде назовем некоторое множество Π, состоящее из m векторов μ_i (m всегда меньше $2k$), такое, что при помощи операций сложения и вычитания начиная с векторов множества Π можно получить все векторы данной звезды, причем таким путем можно получить лишь одно множество векторов, удовлетворяющее приведенным выше условиям 1—4, т. е. лишь одну звезду. Можно доказать, что всегда возможно выбрать простое множество векторов. Более того, хотя множество Π в общем случае не единственно, но если допустить, что Π' — другое простое множество, то можно установить некоторый автоморфизм алгебры Λ, при котором M инвариантно, а Π переходит в Π'; следовательно, неважно, какое простое множество используется. Возможными углами между любыми двумя векторами множества Π будут 90, 120, 135 и 150°.

Диаграмма Дынкина представляет собой множество m точек (или кружков) на плоскости по одной для каждого вектора из Π. Если угол между двумя векторами из Π равен 120, 135 или 150°, то соответствующие точки диаграммы соединяются одинарной,

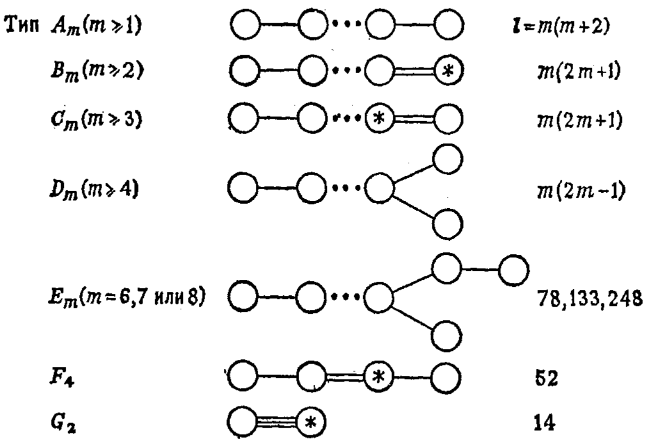

Рис. 25.3. Диаграммы Дынкина для простых комплексных алгебр Ли.

двойной или тройной линией в зависимости от перечисленных значений угла; если угол равен 90°, то соответствующие точки не соединяются. Если угол равен 135 или 150°, то точка, соответствующая короткому вектору, отмечается звездочкой. Можно доказать ряд результатов, относящихся к диаграммам простых комплексных алгебр, например: диаграмма не содержит никаких петель, она связна, она содержит самое большее одну двойную или тройную линию, она может иметь не более одного ветвления и т. п. Как следствие этих правил обнаружено, что существует в точности семь типов диаграмм Дынкина, приведенных на рис. 25.3 (где m — число точек, которое равно размерности пространства M, а l — размерность алгебры Λ).

Типы A_m, B_m, C_m и D_m представляют собой *регулярные серии*, а остальные пять алгебр называются *исключительными*.

25.17. МОДЕЛИ ПРОСТЫХ КОМПЛЕКСНЫХ АЛГЕБР ЛИ

Вышеуказанная классификация получается благодаря наложению различных условий, которым должна удовлетворять простая комплексная алгебра Ли и которые появляются в результате весьма продолжительных алгебраических рассмотрений. Для того чтобы показать, что никаких дополнительных условий нет и, следовательно, все упомянутые выше алгебры в самом деле существуют, строятся модели этих алгебр. Модели регулярных серий суть алгебры матриц, которые будут определены ниже. Мы будем по-прежнему обозначать элементы алгебр символами λ, μ, . . ., несмотря на то, что для матриц могут казаться более подходящими другие символы.

1. A_m состоит из всех комплексных матриц размера $(m+1)\times\times(m+1)$ с нулевым следом; см. упражнения ниже. Для B_m и D_m необходимо ввести антидиагональную матрицу J размера $p\times p$

$$J=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & ⋰ & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2. B_m состоит из всех комплексных матриц λ размера $(2m+1)\times(2m+1)$, таких, что $\lambda J+J\lambda^T=0$ $(p=2m+1)$.

3. D_m состоит из всех комплексных матриц λ размера $2m\times 2m$, таких, что $\lambda J+J\lambda^T=0$ $(p=2m)$.

Для C_m необходимо ввести антидиагональную матрицу размера $2m\times 2m$

$$J'=\left[\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} & & 1 \\ & ⋰ & \\ 1 & & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} & & -1 \\ & ⋰ & \\ -1 & & \end{matrix} & 0 \end{array}\right]$$

4. C_m состоит из всех комплексных матриц λ размера $2m\times 2m$, таких, что $\lambda J'+J'\lambda^T=0$.

Следующие упражнения имеют отношение к серии A_m. Серии B_m, C_m, D_m вполне аналогичны. Более сложные модели исключительных алгебр приведены в книге Хаузнера и Шварца.

Упражнения

1. Пусть Λ' — алгебра Ли комплексных матриц λ размера $(m+1)\times(m+1)$ с произведением $[\lambda, \mu]=\lambda\mu-\mu\lambda$. Вычислите естественную билинейную форму

$$(\lambda, \mu)=\operatorname{tr}(\mathrm{Ad}_\lambda \mathrm{Ad}_\mu).$$

[Отметим, что $\mathrm{Ad}\lambda$ и Ad_μ — линейные преобразования в некотором $(m+1)^2$-мерном пространстве, а именно в Λ'.] Покажите, что

$$(\lambda, \mu)=2((m+1)\operatorname{tr}(\lambda\mu)-(\operatorname{tr}\lambda)(\operatorname{tr}\mu)).$$

Покажите, что (λ, μ) вырождена в Λ' но не вырождена в подалгебре $\Lambda=A_m$ матриц с нулевым следом, так что A_m является полупростой.

2. Обозначим через M коммутативную подалгебру алгебры Ли Λ из упражнения 1, состоящую из диагональных матриц (с нулевым следом). Рас-

смотрите присоединенное представление подалгебры M на Λ: $\mu \longrightarrow \mathrm{Ad}_\mu$, где

$$(\mathrm{Ad}_\mu \lambda)_{rs} = (\mu_{rr} - \mu_{ss})\,\lambda_{rs} \quad (r,\ s = 1,\ \ldots,\ n).$$

Рассмотрите корни и корневые векторы этого представления. Покажите, что корневое пространство Λ_0, состоящее из всех матриц λ, таких, что $(\mu_{rr} - \mu_{ss})^k \lambda_{rs} = 0$ для некоторого k и для всех μ из M, состоит также из диагональных матриц; следовательно, $\Lambda_0 = M$, а значит, M есть подалгебра Картана. Покажите, что другие корни $\alpha(\cdot)$ и соответствующие корневые векторы λ_α можно получить, выбрав фиксированные i и k и положив

$$\alpha(\mu) = \mu_{ii} - \mu_{kk}, \quad \lambda_\alpha = \lambda(i,\ k),$$

где $\lambda(i,\ k)$ есть матрица

$$(\lambda(i,\ k))_{i'k'} = [2(m+1)]^{-1/2}\,\delta_{ii'}\delta_{kk'},$$

и что вектор μ_α есть диагональная матрица, элементы которой имеют вид

$$(\mu_\alpha)_{ii} = 1/[2(m+1)], \quad (\mu_\alpha)_{kk} = -1/[2(m+1)],$$
$$(\mu_\alpha)_{i'k'} = 0 \text{ во всех остальных случаях.}$$

Покажите, что простое множество корней есть множество

$$\alpha_i(\mu) = \mu_{i+1\, i+1} - \mu_{ii}, \quad i = 1,\ \ldots,\ m.$$

Покажите, что угол между μ_{α_i} и $\mu_{\alpha_{i+1}}$ равен 120°, а во всех остальных случаях угол между векторами μ_{α_i} и μ_{α_j} равен 90°, так что диаграмма Дынкина алгебры Λ имеет тип A_m, т. е.

○—○—···—○ (m кружков)

Классификациию и модели простых вещественных алгебр Ли, которые нужны для классификации групп Ли, читатель может найти в книге Хаузнера и Шварца. Напомним, что если Λ — простая вещественная алгебра Ли, то ее комплексификация $\hat{\Lambda}$ является либо простой алгеброй, либо прямой суммой двух идентичных (т. е. изоморфных) простых комплексных алгебр. Следовательно, для классификации простых вещественных алгебр нужно изучить каждую простую комплексную алгебру, а затем найти все простые вещественные алгебры, из которых ее можно получить путем комплексификации.

Если задана простая комплексная алгебра $\hat{\Lambda}$, то возможный способ построения алгебры Λ заключается в том, что Λ рассматривается как линейное пространство элементов алгебры $\hat{\Lambda}$ не над полем скаляров $\mathbb{C}$, а над полем $\mathbb{R}$, но этот способ не является единственно возможным. Другие возможности обнаруживаются при рассмотрении так называемых сопряжений в $\hat{\Lambda}$. *Сопряжение* в комплексной алгебре Ли представляет собой антилинейное отображение C [т. е. $C(a\lambda + b\mu) = \bar{a}C\lambda + \bar{b}C\mu$], которое сохраняет произведения Ли (т. е. $C[\lambda,\ \mu] = [C\lambda,\ C\mu]$), причем квадрат этого отображения совпадает с тождественным отображением [т. е. $C(C\lambda) = \lambda$]. Множество всех элементов λ из $\hat{\Lambda}$, таких, что $C\lambda = \lambda$, с $\mathbb{R}$ в качестве поля скаляров представляет собой простую вещественную алгебру Ли. Полный анализ сопряжений в простых комплексных алгебрах Ли, а также перечень получающихся простых вещественных алгебр приведены в книге Хаузнера и Шварца. Если в качестве примера $\hat{\Lambda}$ рассмотреть простую комплексную алгебру A_1, состоящую из матриц размера 2×2 с нулевым следом, то имеется три соответствующие простые вещественные алгебры, а именно сама A_1 (с $\mathbb{R}$ в качестве поля скаляров), алгебра

$RA_1 = \{$вещественные матрицы размера 2×2 с нулевым следом$\}$

и алгебра

$QA_1 = \{$матрицы размера 2×2 вида iH, где H эрмитова и имеет след, равный нулю$\}$.

Отметим, кстати, что некоторые из соответствующих групп Ли являются группами $SL(2, \mathbb{C})$, $\mathscr{L}_p$, $SL(2, \mathbb{R})$, $SU(2)$ и $SO(3)$.

Каждой простой комплексной алгебре A_m с $m > 1$ соответствуют $4 + [(m+1)/2]$ простых вещественных алгебр, где [ ] означает целую часть.

Исключительной алгебре G_2 соответствуют три вещественных алгебры: G_2 (над $\mathbb{R}$), $HG_2^{(3)}$, $HG_3^{(1)}$.

25.18. О ПРИМЕНЕНИИ ГРУПП ЛИ И АЛГЕБР ЛИ В ФИЗИКЕ

В гл. 22 была обсуждена роль группы вращений $SO(3)$ как группы симметрии в квантовой механике. В расчетах обычно появляется соответствующая алгебра Ли, а не сама группа. Алгебру Ли группы $SO(3)$, которая, конечно, совпадает с алгеброй Ли группы $SU(2)$, являющейся универсальной накрывающей группой группы $SO(3)$, можно реализовать либо как алгебру Ли вещественных кососимметричных матриц размера 3×3, либо как алгебру Ли косоэрмитовых матриц размера 2×2 с нулевым следом (в предыдущем параграфе эта алгебра была обозначена через QA_1). Кроме того, эту алгебру можно реализовать как алгебру Ли операторов в гильбертовом пространстве $\boldsymbol{H}$ состояний некоторой физической системы. Если $\boldsymbol{H}$ рассматривать как пространство $L^2(\mathbb{R}^3)$ волновых функций $\psi(\mathrm{x})$ нерелятивистской частицы с нулевым спином, то отображения

$$g: \psi(\mathrm{x}) \to \psi(g^{-1}\mathrm{x}) \quad [g \in SO(3)]$$

образуют представление группы $SO(3)$ на $\boldsymbol{H}$, как в § 20.9. Так называемые инфинитезимальные операторы этого представления, рассматривавшиеся в § 20.9, имеют вид

$$L_j = x^l \partial/\partial x^k - x^k \partial/\partial x^l \quad (j\,k\,l = 1\,2\,3,\ 2\,3\,1,\ 3\,1\,2).$$

Самосопряженные операторы $i\hbar L_j$ соответствуют составляющим момента импульса частицы. Линейные комбинации операторов L_j с вещественными коэффициентами дают некоторую реализацию алгебры Ли Λ группы $SO(3)$.

В физике элементарных частиц подходящие группы симметрии часто неизвестны из-за отсутствия полной теории элементарных частиц, но иногда находятся различные алгебры Ли Λ, играющие определенную роль на эмпирической основе.

Может возникнуть путаница из-за того, что слово «группа» часто используется для обозначения алгебры Ли. В частности, бывают ссылки на «группу G_2». Согласно § 25.16, G_2 является алгеброй Ли, а точнее комплексной алгеброй Ли. Группа, фигурирующая в физической теории, представляет собой, видимо, группу, алгебра Ли которой является одной из трех вещественных алгебр Ли, которые упомянуты в предыдущем параграфе и комплексификация которых дает алгебру G_2. Как же в таком случае выделить единственную группу? Самый простой и естественный способ состоит в учете следующего обстоятельства: только одна из вещественных алгебр Λ, комплексификация которых приводит к данной алгебре $\hat{\Lambda}$, является алгеброй Ли компактной группы (или, возможно, нескольких компактных групп), а из всех групп Ли G, имеющих данную вещественную алгебру Λ, только одна является односвязной. Следовательно, в частности, существует единственная компактная односвязная группа Ли, соответствующая алгебре G_2. Но поскольку многие из групп симметрии в физике не являются ни компактными, ни односвязными, разрешение вопроса об идентификации группы, которую следует ассоциировать с заданной алгеброй Ли в физике частиц, требует, по-видимому, дальнейшего развития теории.

Алгебра G_2 использовалась также при изучении атомов с частично заполненными f-оболочками; см. Рака́ [1951]. В этом случае теория столь полна, что существует совершенно определенная соответствующая алгебре G_2 группа, которая, согласно Рака́ (см. также статью Берендса, Дрейтлейна, Фронсдейла и Ли [1962]), является подгруппой группы $SO(7)$.

Приложение к главе 25.

ДВЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ ЛИ

В данном приложении мы приведем два примера групп Ли, которые не являются линейными, т. е. не имеют точных конечномерных представлений, а значит, не могут быть реализованы как группы матриц.

Для первого примера возьмем в качестве G так называемую *группу Гейзенберга*

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1 & x & z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}:\ x, y, z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Обозначив введенные матрицы через $g_{x,y,z}$, путем непосредственных вычислений мы получим, что

$$\begin{aligned} g_{x,0,0}^{-1} &= g_{-x,0,0},\\ g_{0,y,0}^{-1} &= g_{0,-y,0}, \\ g_{x,0,0}\, g_{0,y,0}\, g_{x,0,0}^{-1}\, g_{0,y,0}^{-1} &= g_{0,0,xy}. \end{aligned} \tag{25.A.1}$$

Отсюда следует, что если ρ—любое представление группы G, то $\rho(g_{0,0,z})$ представляет собой унимодулярную матрицу для любого z, поскольку $\det(\rho(g_{0,0,xy}))$ равен

$$\det\rho(g_{x,0,0})\det\rho(g_{0,y,0})\det\rho(g_{x,0,0})^{-1}\det\rho(g_{0,y,0})^{-1}=1.$$

Допустим теперь, что G_0—нормальная подгруппа группы G:

$$G_0=\left\{\begin{pmatrix}1&0&n\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}: n \text{ целое}\right\}.$$

Будет показано, что любое конечномерное представление факторгруппы G/G_0 не является точным; следовательно, G/G_0 не может быть линейной группой. Пусть $\bar{g}_{x,y,z}$, $0\leqslant z<1$, обозначает элемент группы G/G_0 (смежный класс в G), который содержит $g_{x,y,z}$. Иначе говоря, $\bar{g}_{x,y,z}$ есть бесконечное множество матриц размера 3×3, а именно матриц

$$\bar{g}_{x,y,z}=\left\{\begin{pmatrix}1&x&z+n\\0&1&y\\0&0&1\end{pmatrix}: n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\right\}.$$

Нетрудно видеть, что по аналогии с (25.A.1)

$$\bar{g}_{x,0,0}\,\bar{g}_{0,y,0}\,\bar{g}_{x,0,0}^{-1}\,\bar{g}_{0,y,0}^{-1}=\bar{g}_{0,0,z},$$

где $z\equiv xy \pmod 1$. Отсюда, как и выше, для любого представления ρ группы G/G_0 $\det\rho(\bar{g})=1$, если $\bar{g}$ принадлежит подгруппе

$$H=\{\bar{g}_{0,0,z}: 0\leqslant z<1\}<G/G_0.$$

Но H изоморфна группе $SO(2)$, когда $2\pi z$ играет роль угла θ; следовательно, H является компактной и абелевой группой. Согласно общей теории представлений, рассмотренной в § 21.1—21.4, любое представление компактной группы эквивалентно унитарному представлению, а любое унитарное представление абелевой группы вполне приводимо к прямой сумме одномерных представлений. Следовательно, если ρ—любое m-мерное представление факторгруппы G/G_0, то относительно подходящего базиса в пространстве V^m представление ρ подгруппы $H\cong SO(2)$ имеет диагональный вид:

$$\rho(\bar{g}_{0,0,z})=\begin{pmatrix}e^{2\pi i n_1 z}&&(0)\\&\ddots&\\(0)&&e^{2\pi i n_m z}\end{pmatrix}.$$

Каждое из одномерных представлений, задаваемых диагональными элементами этой матрицы, имеет детерминант, равный 1 для всех $\bar{g}$ из H; поэтому все целые числа $n_1,\ \ldots,\ n_m$ равны нулю. Иначе говоря, все элементы подгруппы H представляются единичными матрицами размера $m\times m$; поэтому представление ρ факторгруппы G/G_0 не является точным.

Второй пример не столь элементарен (по крайней мере предстоящее его рассмотрение), потому что используется достаточно глубокая теорема о представлениях алгебр Ли. Будет показано, что если $\tilde{G}$—универсальная накрывающая группа группы $SL(2,\mathbb{R})$ (т. е. группа вещественных матриц размера 2×2 с детерминантом, равным единице), то $\tilde{G}$ не имеет никаких точных конечномерных представлений.

Получим канонический вид любой матрицы M группы $SL(2,\mathbb{R})$. Пусть R—вращение [элемент подгруппы $SO(2)$], которое преобразует первый столбец матрицы M в вектор с компонентами a, 0, где $a>0$. Тогда RM имеет вид

$$RM=\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix},\quad ac=1,$$

Возьмем $a=e^x$; $c=e^{-x}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix} RM = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для некоторого вещественного y. Отсюда, если вращение $R^{-1}=R_\theta$, мы имеем

$$M=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (25.A.2)$$

Это и есть искомый канонический вид. Отсюда следует, что многообразие группы $SL(2, \mathbb{R})$ есть прямое произведение окружности и двух прямых, $C^1\times\mathbb{R}^2$. Так как универсальным покрытием C^1 является $\mathbb{R}$, многообразие группы $\tilde{G}$ есть $\mathbb{R}^3$.

Алгебра Ли Λ группы $SL(2, \mathbb{R})$ имеет в качестве базиса матрицы

$$L_1=\frac{\partial M}{\partial\theta}\Big|_0=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$L_2=\frac{\partial M}{\partial x}\Big|_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$L_3=\frac{\partial M}{\partial y}\Big|_0=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где во всех случаях индекс нуль указывает на то, что приведенные матрицы вычислены при $\theta=x=y=0$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} &[L_1, L_2]=2L_1+4L_3, \\ &[L_2, L_3]=2L_3, \\ &[L_3, L_1]=L_2. \end{aligned} \qquad (25.A.3)$$

Эти уравнения можно разрешить относительно L_1, L_2, L_3, т. е. произведения Ли, стоящие в левых частях равенств, также образуют базис для алгебры Λ. Из определения произведения Ли через коммутаторы в группе следует, что эта группа порождается коммутаторами, т. е. элементами вида $ghg^{-1}h^{-1}$. Используя рассуждения, приведенные в первом примере, можно получить, что для всех g из $SL(2, \mathbb{R})$ $\det\rho(g)=1$, когда ρ — любое представление.

Поскольку $\tilde{G}$ и $SL(2, \mathbb{R})$ изоморфны в окрестности единичного элемента, они имеют совпадающие алгебры Ли и Λ также является (в смысле изоморфизма) алгеброй Ли группы $\tilde{G}$. Следовательно, если ρ — любое представление группы $\tilde{G}$, то $\det\rho(\tilde{g})=1$ для всех $\tilde{g}$ из $\tilde{G}$. Иначе говоря, любое представление группы $\tilde{G}$ унимодулярно.

Можно показать, что алгебра Ли Λ проста. В самом деле, если Λ имеет идеал J, содержащий ненулевой вектор $\lambda=aL_1+bL_2+cL_3$, то J содержит также три вектора $[L_j, \lambda]$ и девять векторов $[L_k, [L_j, \lambda]]$. Непосредственные вычисления с использованием формул (25.A.3) показывают, что L_1, L_2, L_3 можно выразить в виде некоторых линейных комбинаций этих 13 векторов (при этом совсем не обязательно переходить к произведениям Ли порядка выше первого); следовательно, J совпадает с Λ, т. е. Λ является простой алгеброй Ли.

Обозначим через $g_{\theta, x, y}$ элемент (25.A.2) группы $SL(2, \mathbb{R})$, где $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. Тогда θ, x, y с неограниченным θ могут быть взяты в качестве координат элементов $\tilde{g}_{\theta, x, y}$ в группе $\tilde{G}$ таким образом, чтобы в накрытии группы $SL(2, \mathbb{R})$ группой $\tilde{G}$ элемент $\tilde{g}'_{\theta', x, y}$ из $\tilde{G}$ лежал над элементом $g_{\theta, x, y}$ из $SL(2, \mathbb{R})$, когда $\theta'\equiv\theta \pmod{2\pi}$.

Пусть теперь ρ — представление группы $\tilde{G}$ на m-мерном векторном пространстве $V^m = \mathbb{C}^m$. Будет показано, что ρ не является точным. Некоторое представление алгебры Λ, которое будем также обозначать через ρ, индуцируется обычным образом:

$$\rho(L_1) = \partial\rho(\tilde{g}_{\theta, x, y})/\partial\theta \,|_{\theta=x=y=0} \quad \text{и т. д.}$$

Согласно Хаузнеру и Шварцу [1968, с. 143, теорема 2], представление (вещественной или комплексной) *простой* алгебры Ли Λ вполне приводимо, т. е. V^m может быть представлено в виде прямой суммы $V^{k_1} \oplus V^{k_2} \oplus \ldots$ инвариантных подпространств, в каждом из которых ρ неприводимо $\left(\sum k_j = m\right)$. Группа $\tilde{G}$ порождается элементами вида e^{λ} $(\lambda \in \Lambda)$, и $\rho(e^{\lambda}) = e^{\rho(\lambda)}$; следовательно, представление ρ группы $\tilde{G}$ также вполне приводимо. Точнее говоря, каждое из подпространств V^{k_j} пространства V^m инвариантно относительно $\rho(\tilde{g})$ для всех $\tilde{g} \in \tilde{G}$ и сужение ρ_j представления ρ к подпространству V^{k_j} неприводимо. Пусть $\tilde{g}_1$ — элемент $\tilde{g}_{2\pi, 0, 0}$; $\tilde{g}_1$ и все его степени лежат над единичным элементом группы $SL(2, \mathbb{R})$ и, значит, коммутируют со всеми $\tilde{g} \in \tilde{G}$; следовательно, по лемме Шура $\rho_j(\tilde{g}_1) = \lambda I$, где I — единичная матрица размера $k_j \times k_j$. Так как каждое представление унимодулярно, $\det \rho_j(\tilde{g}) = 1$ для всех $\tilde{g}$; отсюда $\lambda^{k_j} = 1$. Это верно для любого j; следовательно, существует степень $\tilde{g}_1^l$ элемента $\tilde{g}_1$ $\left(\text{например, } l = \prod_j k_j\right)$, такая, что $\rho(\tilde{g}_1^l) = \rho(\tilde{g}_1)^l = I$ [единичная матрица размера $m \times m$]. Но $\tilde{g}_1^l$ не является единицей группы $\tilde{G}$; поэтому ρ не является точным представлением.