Глава 26

МЕТРИКА И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА МНОГООБРАЗИИ

Скалярные, векторные и тензорные поля; скобки Ли; ковариантные и контравариантные векторы; законы преобразования; внутреннее и внешнее произведения; свертка; закон частного; производные; метрический тензор; положительно определенная и неопределенная (индефинитная) метрика; римановы и псевдоримановы многообразия; поднятие и опускание индексов; геодезические; вариационное уравнение Эйлера; естественный (натуральный), аффинный или предпочтительный параметр; трехиндексные символы Кристоффеля; пространственноподобные, нулевые и временноподобные геодезические; задачи с начальными данными и двухточечные задачи о геодезических; интегральные уравнения Вольтерра; итерации Пикара; теорема Уайтхеда; продолжение геодезических; аффинно связные многообразия; римановы и псевдоримановы накрывающие многообразия.

Предварительные сведения: элементарная теория многообразий (гл. 23 и 24).

Многообразие по определению гл. 23 — это объект, полностью характеризуемый своей локальной топологией: оно является локально n-мерным пространством, удовлетворяющим аксиоме Хаусдорфа об отделимости. В этой и в двух следующих главах многообразие будет наделено геометрической структурой путем введения новых понятий, таких, как геодезические кривые (геодезическая — это аналог прямой в евклидовой геометрии), длины, углы и т. д. Наиболее важным из них является понятие *геодезической*, которое в основных интересующих физиков геометриях получается либо из понятия метрики, либо из понятия аффинной связности; для нас исходным будет понятие метрики, поскольку она подобна расстоянию в общеизвестной евклидовой геометрии.

Грубо говоря, геометрические свойства есть нечто противоположное глобальным топологическим свойствам данного многообразия, для которого последние выражаются посредством целочисленных или дискретных величин, подобных числу компонент, фундаментальной группе, высшим гомотопическим группам, тогда как геометрия описывается непрерывными вещественными величинами — длинами, углами, натуральным параметром вдоль геодезической (см. § 26.6, 26.7 и 26.12).

Риманова геометрия исходит из метрической дифференциальной формы $ds^2 = \sum g_{jk}\, dx^j\, dx^k$ (в данной координатной системе), которая и определяет геометрические свойства. Геометрия единичной двумерной сферы служит простым и известным примером неплоской двумерной геометрии; для нее $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$

(в сферической системе координат). Геодезическая (наикратчайший путь) между двумя точками на сфере—дуга большого круга; отсюда следуют различные теоремы сферической геометрии, например сумма углов треугольника (сторонами которого служат геодезические) превышает π на величину, равную площади треугольника.

Хотя общее риманово многообразие в принципе можно было бы рассматривать как вложенное в некоторое евклидово пространство E^N достаточно большой размерности (точно так же, как двумерную сферу можно рассматривать как поверхность единичного шара в E^3), при изучении внутренних геометрических понятий, порождаемых метрикой, удобнее пользоваться внутренними (собственными) координатами.

Если метрическая форма на многообразии M положительно определена (см. § 26.4), то M называется римановым многообразием; если она не положительна (индефинитна), то M называется псевдоримановым многообразием—такие многообразия фигурируют в общей теории относительности. Как мы увидим, существуют глубокие отличия между этими двумя типами многообразий. Далее предполагается, что M является связным и C^k-гладким многообразием, где k достаточно велико, чтобы обеспечивать существование любых встречающихся в данной теории производных,—для этой и следующих двух глав достаточно взять $k=4$. В теории относительности нельзя предполагать, что M принадлежит классу C^∞, потому что метрика определяется распределением материи, которое необязательно бесконечно дифференцируемо, а также потому, что уравнения гравитационного поля, будучи гиперболическими, допускают распространение разрывов различных производных от $g_{\mu\nu}$ в виде гравитационных волн.

26.1. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА МНОГООБРАЗИИ

В евклидовом пространстве с декартовыми координатами $x^1, \ldots, x^n$ векторное поле описывается n функциями $v^i(x^1, \ldots, x^n)$, $i=1, \ldots, n$, причем при преобразовании декартовых координат вращением осей компоненты $v^1, \ldots, v^n$ векторов преобразуются той же матрицей вращения, что и координаты $x^1, \ldots, x^n$.

Если рассматриваются криволинейные координаты, то становится необходимым различать два типа векторов: ковариантные и контравариантные, которые имеют различное физическое или математическое происхождение (иногда вводятся также так называемые векторные плотности разнообразных порядков; это часто удобно, но не необходимо).

Прежде всего рассмотрим *скалярное поле* (*скаляр*) на многообразии M, т. е. функцию $f(P)$ на M, вещественнозначную, если не сказано другое. Когда $f(P)$ задана во всех точках $P \in M$, как в § 23.5, с каждой картой $\{U, \varphi, N\}$ связана функция $\hat{f}(x^1, \ldots, x^n) = \hat{f}(\mathrm{x})$, определяемая уравнениями

$$\hat{f}(\mathrm{x}) = f(P), \quad \mathrm{x} = \varphi(P) \quad \forall P \in U. \tag{26.1.1}$$

Множество всех функций $\hat{f}(\ldots)$, связанных с каждой картой, можно рассматривать как определение скалярного поля $f(P)$. Если $\{U', \varphi', N'\}$—другая координатная карта, то связь между соответствующими функциями $\hat{f}$ и $\hat{f}'$ на перекрытии двух карт выражается просто:

$$\hat{f}(\mathrm{x}) = \hat{f}'(\mathrm{x}'), \tag{26.1.2}$$

где

$$\mathrm{x} = \varphi(P), \quad \mathrm{x}' = \varphi'(P). \tag{26.1.3}$$

Соотношение (26.1.2) интерпретируется следующим образом: оно становится тождеством по $x^1, \ldots, x^n$, если x'^i (в правой части) выражаются через x^i, или тождеством по $x'^i, \ldots, x'^n$, если x^i (в левой части) выражаются через x'^i; $\hat{f}$ и $\hat{f}'$ принимают одно и то же значение в данной точке $P \in M$.

В то время как скалярное поле представляет собой множество функций $\hat{f}(\cdots)$, связанных с каждой картой, векторное поле или тензорное поле являются множествами *наборов* функций, причем с каждой картой связан один набор. На перекрытии двух карт два соответствующих набора функций связаны законом преобразования, являющимся обобщением условия (26.1.2) для скаляров.

В качестве первого примера векторного поля рассмотрим градиент скаляра $f(P)$ (относительно скаляра предполагается, что он принадлежит классу C^1). На карте $\{U, \varphi, N\}$ градиент состоит из частных производных функции (26.1.1), а именно

$$v_i(x^1, \ldots, x^n) = \partial\hat{f}(x^1, \ldots, x^n)/\partial x^i, \tag{26.1.4}$$

или, короче,

$$v_i(\mathrm{x}) = \partial\hat{f}(\mathrm{x})/\partial x^i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{26.1.5}$$

Если на перекрытии двух карт связи, устанавливаемые уравнениями (26.1.3), описываются (как и в § 23.2) функциями

$$x^i = \hat{x}^i(x'^1, \ldots, x'^n), \tag{26.1.6}$$

$$x'^i = \hat{x}'^i(x^1, \ldots, x^n) \tag{26.1.7}$$

и если на второй карте также записан соответствующий градиент

$$v'_i(\mathrm{x}') = \partial\hat{f}'(\mathrm{x}')/\partial x'^i, \tag{26.1.8}$$

то связь между двумя наборами функций $\{v_i\}$ и $\{v'_i\}$ на перекрытии двух координатных систем выражается равенством

$$v'_i(\mathrm{x}') = (\partial\hat{x}^k(\mathrm{x}')/\partial x'^i)\, v_k(\mathrm{x}). \tag{26.1.9}$$

(Здесь используется *соглашение о суммировании*, согласно которому правая часть равенства означает сумму по k от 1 до n; k называют *немым индексом*.) Как и (26.1.1), равенство (26.1.9) интерпретируется как тождество, если x^i выражены через x'^i или x'^i выражены через x^i.

В дальнейшем указание на аргументы будет опускаться; тогда равенство (26.1.9) записывается короче:

$$v_i' = (\partial x^k / \partial x'^i)\, v_k; \qquad (26.1.10)$$

это равенство выражает закон преобразования для ковариантных векторов.

Обозначение x^k можно использовать как для переменной, так и для функции; в (26.1.10) оно использовано для функции, и нужно смотреть на «знаменатель» частной производной, чтобы узнать, какие переменные являются независимыми: если там есть штрих, то независимыми переменными являются $x'^1, \ldots, x'^n$, а если там два штриха, то независимые переменные — $x''^1, \ldots, x''^n$, и т. д. Это соглашение является стандартным.

Ковариантное[1]) *векторное поле* на M определяется как множество наборов $\{v_i\}$ n функций, причем с каждой картой на M связан один такой набор, а соотношение между двумя такими наборами на перекрытии соответствующих карт выражается законом преобразования (26.1.10).

Замечания. (1) Векторное поле не обязательно является градиентом какого-то скалярного поля, как это было в предыдущем примере. (2) Две карты могут перекрываться в точности по их общей области определения $U \subset M$; в этом случае о законе преобразования (26.1.10) говорят как о замене независимых переменных в обычном смысле.

Закон преобразования *транзитивен*: если вслед за (26.1.10) делается другое преобразование координат x'^j в координаты x''^j, то v_j'' и v_j связаны должным образом, потому что на перекрытии трех карт

$$v_j'' = \frac{\partial x'^k}{\partial x''^j} v_k' = \frac{\partial x'^k}{\partial x''^j} \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} v_l = \frac{\partial x^l}{\partial x''^j} v_l. \qquad (26.1.11)$$

Чтобы получить теперь пример так называемого *контравариантного векторного поля*, рассмотрим течение жидкости на M. Если в момент времени t частица жидкости изображается точкой

---

[1]) Префикс «ко» означает «так же, как», «одинаковый» и т. д., а префикс «контра» (см. ниже) указывает на противоположность. Здесь термин «ковариантный» (вектор, тензор) поясняет, что данный объект изменяется при преобразовании координат так же, как градиент (т. е. при помощи транспонированной обратной матрицы Якоби преобразования $\mathbf{x} \to \mathbf{x}'$); контравариантные объекты преобразуются «противоположным» образом, т. е. при помощи матрицы Якоби, например так же, как скорость (см. далее).— *Прим. перев.*

$P(t)$, то в некоторой карте $\{U, \varphi, N\}$ ее координатами являются $x^k(t)$, где $\mathbf{x}(t) = \varphi(P(t))$; величины

$$v^k(t) = dx^k(t)/dt, \quad k = 1, \ldots, n,$$

называются *компонентами обобщенной скорости*. [Они являются декартовыми компонентами скорости соответствующей точки $\mathbf{x}(t)$ в координатном пространстве $\mathbb{R}^n$.] Если $x'^k(t)$ и $v'^k(t)$ — соответствующие координаты и компоненты скорости относительно другой карты $\{U', \varphi', N'\}$, то

$$v'^k(t) = (\partial \hat{x}'^k/\partial x^j)\, v^j(t).$$

Если для описания течения всей жидкости (а не одной частицы) рассматриваются компоненты $v^i(\mathbf{x})$ скорости частицы жидкости, которая в момент времени t находится в точке $\mathbf{x}$, то закон преобразования выглядит так:

$$v'^k(\mathbf{x}') = (\partial \hat{x}'^k(\mathbf{x})/\partial x^j)\, v^j(\mathbf{x}).$$

Подобно (26.1.1) и (26.1.9), это равенство является тождеством на перекрытии карт, если обе его части выражены либо в переменных x^i, либо в переменных x'^i. Мы снова будем опускать излишние подробности обозначений.

Контравариантное векторное поле на $\boldsymbol{M}$ определяется как множество наборов $\{v^j\}$ n функций; с каждой картой связан один набор, причем закон преобразования

$$v'^k = (\partial x'^k/\partial x^j)\, v^j \qquad (26.1.12)$$

выполняется для любых двух таких наборов на перекрытии соответствующих карт. Отличие этого преобразования от (26.1.10) подчеркивается местоположением штриха в производной.

Этот закон преобразования также транзитивен.

Замечание. В римановых и псевдоримановых пространствах (включая евклидовы пространства) любой вектор может быть представлен как в ковариантной, так и в контравариантной форме; формулы для поднятия и опускания индексов при помощи метрического тензора g_{jh} будут приведены ниже (см. § 26.5). Однако в некоторых случаях, например в варианте Вейля единой теории поля, расстояния и длины векторов только относительны, метрического тензора вообще нет, а есть только так называемая аффинная связность (см. § 26.12). В таких случаях ковариантные и контравариантные векторы имеют существенно разную природу. Отметим также, что координаты $x^1, \ldots, x^n$ *не являются* компонентами вектора, потому что они не преобразуются по закону (26.1.12), за исключением случая однородных линейных преобразований.

Когда на многообразии добавляют или исключают согласованные карты, как это описано в гл. 23, предполагается, что и соответствующие наборы компонент векторов $\{v_j\}$ или $\{v^j\}$ также добавляются или исключаются согласно законам преобразования (26.1.10) или (26.1.12). Свойства векторных полей, инвариантные при таких добавлениях и исключениях, рассматриваются как их внутренние свойства. В этом смысле понятие ковариантного (или контравариантного) векторного поля не зависит от координат.

Упражнения

1. Пусть u^j и v^j — гладкие контравариантные векторные поля, и пусть

$$w^j = u^k \partial v^j/\partial x^k - v^k \partial u^j/\partial x^k. \qquad (26.1.13)$$

Покажите, что величины $\{w^j\}_1^n$ преобразуются согласно равенству (26.1.12) и поэтому образуют векторное поле.

Введем обозначение $\mathbf{w} = [\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ и назовем $\mathbf{w}$ *скобкой Ли* векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$[1]. Ясно, что $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$. Покажите, что если u^j, v^j, w^j — произвольные гладкие векторные поля, то

$$[[\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbf{w}] + [[\mathbf{v}, \mathbf{w}], \mathbf{u}] + [[\mathbf{w}, \mathbf{u}], \mathbf{v}] = 0 \quad \text{(тождество Якоби)}.$$

Отсюда следует, что если, исходя из двух или более C^∞-векторных полей на C^∞-многообразии, получить все возможные векторные поля при помощи линейных комбинаций (с постоянными коэффициентами) и скобок Ли, то в результате возникнет алгебра Ли (возможно, бесконечномерная).

2. Пусть u^j и v^j — гладкие контравариантные векторные поля, скобка Ли которых равна нулю, т. е.

$$u^k \partial v^j/\partial x^k = v^k \partial u^j/\partial x^k.$$

Нужно показать, что если точка Q на многообразии является концом пути, начинающегося в точке P и следующего вдоль интегральной кривой векторного поля u^j, т. е. вдоль решения системы

$$dx^j/dt = u^j \quad (j = 1, \ldots, n),$$

до момента времени t_1, а затем вдоль интегральной кривой поля v^j до момента t_2, то той же точки Q можно достичь, следуя от точки P сначала по интегральной кривой поля v^j до некоторого момента t_3, а затем — по интегральной кривой поля u^j до некоторого момента времени t_4. С этой целью возьмем поверхность $x^j(s, t)$ на многообразии, определяемую следующими задачами с начальными данными:

$$\partial x^j(s, 0)/\partial s = u^j(\mathbf{x}(s, 0)),$$
$$x^j(0, 0) \text{ задано (точка } P),$$

и

$$\partial x^j(s, t)/\partial t = v^j(\mathbf{x}(s, t)),$$
$$x^j(s, 0) \text{ задано (из предыдущей задачи)}$$

(см. рис. 26.1). Покажите, что тогда $x(s, t)$ удовлетворяет и уравнению

$$\partial x^j(s, t)/\partial s = u^j(\mathbf{x}(s, t))$$

при $t = 0$, для чего докажите, что величины в обеих частях этого уравнения являются решениями указанных задач с начальными данными (относительно t), а именно тех же самых «обыкновенных» дифференциальных уравнений (s фик-

---

[1] Или их коммутатором.— *Прим. перев.*

сировано)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial s}x^j(s, t)\right)=\frac{\partial v^j(\mathbf{x}(s, t))}{\partial x^k}\left(\frac{\partial}{\partial s}x^k(s, t)\right),$$

т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t}(u^j(\mathbf{x}(s, t)))=\frac{\partial v^j(\mathbf{x}(s, t))}{\partial x^k}u^k(\mathbf{x}(s, t)))$$

с теми же самыми начальными условиями, потому что

$$\partial x^j(s, 0)/\partial s=u^j(\mathbf{x}(s, 0)).$$

Поверхность $x^j(s, t)$ состоит из точек, которых можно достичь, следуя из P по зигзагообразным путям, каждый отрезок которых является отрезком

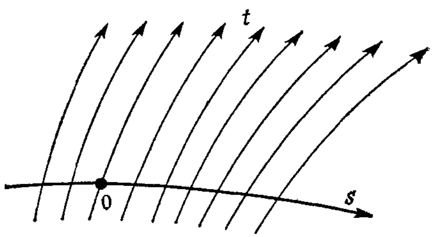

Рис. 26.1.

интегральной кривой либо для поля u^j, либо для поля v^j.

26.2. ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

Контравариантные тензоры T^{jk}, T^{jkl} и т. д. произвольного ранга (*ранг*—это число индексов) преобразуются согласно закону

$$T'^{jk\ldots}=(\partial x'^j/\partial x^r)(\partial x'^k/\partial x^s)\ldots T^{rs\ldots}. \qquad (26.2.1)$$

Соглашение о суммировании применяется здесь ко всем повторяющимся индексам r, s,... в правой части равенства; в результате получается кратная сумма. Ковариантные тензорные поля T_{jk}, T_{jkl} и т. д. преобразуются согласно закону

$$T'_{jk\ldots}=(\partial x^r/\partial x'^j)(\partial x^s/\partial x'^k)\ldots T_{rs\ldots}, \qquad (26.2.2)$$

а смешанные тензоры—согласно правилу, указанному в следующем примере:

$$T'^{jk}{}_l{}^m=\frac{\partial x'^j}{\partial x^r}\frac{\partial x'^k}{\partial x^s}\frac{\partial x^t}{\partial x'^l}\frac{\partial x'^m}{\partial x^u}T^{rs}{}_t{}^u. \qquad (26.2.3)$$

Все эти законы преобразования транзитивны. О последнем тензоре говорят, что он имеет *контравариантный ранг* 3 и *ковариантный ранг* 1.

Законы преобразования показывают, что если u^j, v^j — контравариантные векторы, а w_j, z_j — ковариантные векторы, то величины

$$T^{jk} = u^j v^k, \quad T_{jk} = w_j z_k, \quad T^j{}_k = u^j w_k, \quad T^{jk}{}_l = u^j v^k w_l$$

и т. д. определяют тензоры обозначенного типа. Вообще если

$$T^{j_1 j_2 \ldots}{}_{k_1 k_2 \ldots}{}^{l_1 l_2 \ldots}\ldots \quad \text{и} \quad S^{r_1 r_2 \ldots}{}_{s_1 s_2 \ldots}{}^{t_1 t_2 \ldots}\ldots$$

— любые два тензора, то произведения

$$(T^{j_1 j_2 \ldots}{}_{k_1 k_2 \ldots}{}^{l_1 l_2 \ldots}\ldots)(S^{r_1 r_2 \ldots}{}_{s_1 s_2 \ldots}{}^{t_1 t_2 \ldots}\ldots)$$

являются компонентами тензора

$$R^{j_1 j_2 \ldots}{}_{k_1 k_2 \ldots}{}^{l_1 l_2 \ldots}\ldots{}^{r_1 r_2 \ldots}{}_{s_1 s_2 \ldots}{}^{t_1 t_2 \ldots}\ldots,$$

контравариантные и ковариантные ранги которого суть суммы соответствующих рангов тензоров T и S. Описанный процесс построения тензоров называется *внешним умножением* [1]) векторов и тензоров.

Если у некоторого тензора один и тот же символ встречается как в верхних, так и в нижних индексах, то вступает в силу соглашение о суммировании (относительно повторяющихся индексов) и в результате получается тензор меньшего ранга; например, если задан тензор $R^j{}_{klm}$, то можно определить тензор $R_{kl} = R^j{}_{klj}$, или, например, из тензора $S^{jk}{}_{lm}$ можно получить скаляры $S^{jk}{}_{jk}$ и $S^{jk}{}_{kj}$. Такая процедура называется *сверткой*. Внешнее умножение с последующей сверткой называется *внутренним умножением*, например если v^j и w_j — векторы, то $v^j w_j$ — скаляр [2]).

Легко проверяемым обращением последнего результата служит *закон частного* [3]), который утверждает, что если задано множество наборов величин $\{v^j\}$ и с каждой картой, содержащей некоторую точку P_0, связан один такой набор и если для *каждого* ковариантного вектора $\{w_j\}$, определенного в точке P_0, величина $v^j w_j$ является скаляром (инвариантом при изменении координатных систем), то наборы $\{v^j\}$ определяют контравариантный вектор (в точке P_0). Ковариантные и контравариантные векторы здесь можно поменять ролями. Вообще если, например, заданы наборы n^3 величин $\{T_{jk}{}^l\}$, такие, что величины

$$S_j = T_{jk}{}^l v^k w_l$$

[1]) Чаще это умножение называется *тензорным*, а внешним умножением (кососимметрических) тензоров называют альтернирование тензорного произведения (см., например, Мищенко и Фоменко [1980]). — *Прим. перев.*

[2]) То есть обычное скалярное произведение векторов. — *Прим. перев.*

[3]) Наиболее общую формулировку этой теоремы см. Векуа [1978, с. 73]. — *Прим. перев.*

преобразуются согласно закону преобразования ковариантных векторов (26.1.10) для любых векторов $\{v^k\}$ и $\{w_l\}$, определенных в точке P_0, то $\{T_{jk}{}^l\}$ преобразуется согласно закону преобразования тензоров соответствующего типа — ковариантных ранга 2 и контравариантных ранга 1. Короче говоря, $T_{jk}{}^l$ является тензором.

Замечание о терминологии, встречающейся в некоторых книгах по дифференциальной геометрии. Часто используется иное определение векторного поля, которое будет приведено ниже: если v^j — контравариантное векторное поле, то линейный оператор $L \overset{\text{def}}{=} v^j\partial/\partial x^j$, примененный к дифференцируемому скаляру f, дает скаляр $Lf = v^j(\partial f/\partial x^j)$. Если многообразие и функции f и v^j принадлежат классу C^∞, то L отображает класс C^∞ функций в себя. Более того, если f и g — любые две такие функции, то

$$Lfg = fLg + gLf; \tag{26.2.4}$$

линейный оператор, обладающий этим свойством, называется, как и в гл. 25, *дифференцированием*. Обратно, если L — любое дифференцирование на алгебре C^∞-функций, то может быть построено такое векторное поле v^j, что $L = v^j(\partial/\partial x^j)$, если оператор L имеет достаточно локальный характер. Для того чтобы L был представим в таком виде, необходимо, очевидно, чтобы в случае согласованности скаляров f и g в некоторой окрестности $U \subset M$ скаляры Lf и Lg также были бы согласованы в U. Верно даже большее: если L можно представить таким образом, P — произвольная точка, а равенство

$$\partial f/\partial x^j|_P = \partial g/\partial x^j|_P \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{26.2.5}$$

выполняется на любой карте (следовательно, на любой карте, содержащей P), то Lf и Lg должны быть согласованы в P. (Оказывается, что любой линейный оператор L, удовлетворяющий этому условию, обязательно является дифференцированием.) Чтобы построить поле v^j в любой точке P данной карты, определим функции $f^{(j)}(\mathbf{x})$, $j = 1, \ldots, n$, равенствами

$$f^{(j)}(\mathbf{x}) = x^j,$$

выполняющимися в окрестности точки P, а затем положим

$$v^j(\mathbf{x}) = Lf^{(j)}(\mathbf{x}).$$

Это определяет функции $v^j(\mathbf{x})$ на всей карте. Введем обозначение

$$g(\mathbf{x}) = x^j(\partial f/\partial x^j|_P)$$

для любого C^∞-скаляра $f(\mathbf{x})$ и для любой точки P на карте. Ясно, что f и g удовлетворяют равенствам (26.2.5); следовательно,

$$Lf|_P = Lg|_P = v^j\partial f/\partial x^j|_P. \tag{26.2.6}$$

Поскольку в левой части стоит скаляр, из закона частного следует, что v^j преобразуются при замене координат как компоненты контравариантного векторного поля и что L является дифференцированием. Поэтому между локальными дифференцированиями и векторными полями существует взаимно однозначное соответствие, и на основании этого некоторые авторы определяют векторное поле как *локальное дифференцирование на алгебре C^∞-функций на многообразии*. Мы будем использовать первое определение, которое является традиционным для большинства областей физики.

26.3. МЕТРИКА В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Если $X^1, \ldots, X^n$ — декартовы координаты в евклидовом пространстве, а $x^1, \ldots, x^n$ — криволинейные координаты, через которые декартовы координаты выражаются в виде $X^i = X^i(x^1, \ldots, x^n)$, $i = 1, \ldots, n$, то мы получаем играющий важную роль *метрический тензор* g_{jk}:

$$g_{jk} = g_{jk}(x^1, \ldots, x^n) = \frac{\partial X^1}{\partial x^j}\frac{\partial X^1}{\partial x^k} + \ldots + \frac{\partial X^n}{\partial x^j}\frac{\partial X^n}{\partial x^k}. \quad (26.3.1)$$

Очевидно, что для данной координатной системы $x^1, \ldots, x^n$ мы получим те же самые функции $g_{jk}(\ldots)$, если X^j заменить на другие декартовы координаты, скажем $\tilde{X}^j$, полученные из X^j вращением осей координат (или вообще путем любого движения). Пусть теперь x^i и $x^i + \Delta x^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ — координаты двух точек P_1 и P_2, а X^i и $X^i + \Delta X^i$ — их декартовы координаты, т. е.

$$\begin{gathered} X^i = X^i(x^1, \ldots, x^n), \\ X^i + \Delta X^i = X^i(x^1 + \Delta x^1, \ldots, x^n + \Delta x^n). \end{gathered} \quad (26.3.2)$$

Квадрат расстояния между P_1 и P_2 определяется равенством

$$(d(P_1, P_2))^2 = (\Delta X^1)^2 + \ldots + (\Delta X^n)^2; \quad (26.3.3)$$

если Δx^i — малые величины, то после разложения (26.3.2) в ряды Тейлора получается

$$(d(P_1, P_2))^2 = g_{jk}(x^1, \ldots, x^n)\, \Delta x^j \Delta x^k + O(|\Delta x|^3), \quad (26.3.4)$$

где $|\Delta x| = \max\limits_{(j)} |\Delta x^j|$. Это равенство обычно записывают в виде

$$ds^2 = g_{jk}\, dx^j\, dx^k; \quad (26.3.5)$$

величина ds называется *линейным элементом*. Из (26.3.1) следует, что при преобразовании координат $x^1, \ldots, x^n$ в другие координаты $x'^1, \ldots, x'^n$ функции $g_{jk}(\ldots)$ преобразуются как компоненты ковариантного тензора второго ранга, что согласуется с обозначением g_{jk}. Более того, этот тензор симметричен: $g_{jk} = g_{kj}$. Равенство (26.3.4) показывает, что числа g_{jk} образуют положительно определенную матрицу. Далее будет предполагаться, что аналогичный метрический тензор существует в любом римановом пространстве, хотя и необязательно в виде (26.3.1), поскольку декартова система координат может не существовать, если пространство не является евклидовым.

26.4. РИМАНОВЫ И ПСЕВДОРИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Риманово многообразие—это n-мерное многообразие M, на котором определен тензор второго ранга g_{jk}; этот тензор на всем M (1) *симметричен* ($g_{jk}=g_{kj}$) и (2) *положительно определен* ($g_{jk}v^jv^k>0$ для любого ненулевого вектора $\{v^j\}$). Все собственные значения матрицы (g_{jk}) положительны. Заметим, что если тензор g_{jk} симметричен, то и тензор

$$g'_{jk}=(\partial x^r/\partial x'^j)(\partial x^s/\partial x'^k)\,g_{rs} \tag{26.4.1}$$

симметричен. Заметим также, что положительная определенность при этом законе преобразования сохраняется, потому что $g_{jk}v^jv^k$—скаляр.

Детерминант матрицы (g_{jk}) обозначается через g или $g(x^1, \ldots, x^n)$; он не образует скалярного поля, поскольку его значение в данной точке многообразия зависит от системы координат.

Закон преобразования (26.4.1) в матричных обозначениях выглядит так:

$$G'=JGJ^T, \tag{26.4.2}$$

где G—матрица (g_{jk}), а J—матрица Якоби.

Для *псевдориманова многообразия* не требуется, чтобы матрица (g_{jk}) была положительно определенной; необходимо лишь, чтобы она была *невырожденной* и *симметричной*. Каждое собственное значение G либо >0, либо <0; *сигнатурой* s матрицы G называется число положительных собственных значений минус число отрицательных собственных значений. Согласно *закону инерции* Сильвестра для квадратичных форм, сигнатура матрицы $G'=JGJ^T$ совпадает с сигнатурой матрицы G; доказательство можно найти в книге Бохера [1922]. Следовательно, сигнатура s в каждой точке не зависит от выбора системы координат. Собственные значения матрицы G являются непрерывными функциями ее элементов g_{jk}, а значит, и координат $x^1, \ldots, x^n$ и никогда не обращаются в нуль; следовательно, никакое собственное значение не может изменять своего знака при изменении $\{x^i\}$. Так как M—связное многообразие, сигнатура s матрицы G постоянна на M. В общей теории относительности M имеет размерность 4 и сигнатуру 2, так что G на всем M имеет три положительных и одно отрицательное собственные значения.

Поскольку $\det G \neq 0$, матрица G обратима; элементы обратной матрицы обозначаются через $g^{jk} = g^{jk}(x^1, \ldots, x^n)$; эти функции преобразуются по формуле

$$g'^{jk} = (\partial x'^j/\partial x^r)(\partial x'^k/\partial x^s)\, g^{rs}. \tag{26.4.3}$$

Это равенство можно получить при помощи вычисления матрицы, обратной матрице (26.4.2), учитывая при этом, что матрицы Якоби обратных преобразований являются обратными матрицами. Отсюда следует, что g^{jk} является контравариантным тензором ранга 2.

Если $\mathcal{S}$ есть n-мерная гиперповерхность в евклидовом пространстве E^N, где $N > n$, то $\mathcal{S}$ можно рассматривать как риманово многообразие с той метрикой, которую $\mathcal{S}$ *наследует* из E^N. Если $x^1, \ldots, x^n$ — внутренние координаты на части U гиперповерхности $\mathcal{S}$ и $X^1, \ldots, X^N$ — декартовы координаты в E^N, причем на U

$$X^i = X^i(x^1, \ldots, x^n), \quad i = 1, \ldots, N,$$

то, как и в § 26.2, расстояние d (в E^N) между двумя точками x^j и $x^j + \Delta x^j$ на $\mathcal{S}$ получается по формуле

$$\begin{aligned} d^2 &= \sum_{i=1}^{N} [X^i(x^1, \ldots, x^n) - X^i(x^1 + \Delta x^1, \ldots, x^n + \Delta x^n)]^2 = \\ &= g_{jk}\Delta x^j \Delta x^k + O(|\Delta x^3|), \end{aligned}$$

где

$$g_{jk} = \sum_{i=1}^{N} (\partial X^i/\partial x^j)(\partial X^i/\partial x^k).$$

Говорят, что $\mathcal{S}$ *погружено* в E^N и что g_{jk} — *наследственный* (индуцированный) метрический тензор.

Пример

Если $x^1 = \theta$ и $x^2 = \varphi$ — сферические координаты на единичной сфере, где $0 < \theta < \pi$, $-\pi < \varphi < \pi$, а X, Y, Z — декартовы координаты в E^3, то

$$X = \sin x^1 \cos x^2, \quad Y = \sin x^1 \sin x^2, \quad Z = \cos x^1$$

и

$$g_{11} = 1, \; g_{12} = g_{21} = 0, \; g_{22} = \sin^2 x^1.$$

Это обычно записывают в виде $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$; то же самое можно получить из выражения для линейного элемента $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$ в сферической системе координат в E^3, положив $r = 1$, $dr = 0$.

Заметим (доказательство см. в книге Эйзенхарта [1926]), что n-мерное риманово многообразие можно всегда погрузить в E^N, где $N = {}^1/_2 n(n+1)$, хотя для того, чтобы погрузить многообразие как гиперповерхность без самопересечения (т. е. *вложить*), требуется пространство большей размерности (см. обсуждение бутылки Клейна в § 23.1)[1]).

Псевдориманово многообразие также можно погрузить в плоское пространство (обобщенное пространство Минковского) подходящей размерности и сигнатуры. Однако это утверждение имеет ограниченное обращение: гладкая поверхность в такого рода плоском пространстве является псевдоримановым многообразием только в том случае, когда она нигде не параллельна световому конусу.

Упражнения

1. Пусть $\mathcal{S}$ — риманово многообразие с одной координатной системой $x^1=\xi$, $x^2=\eta$ и с метрическим тензором, задаваемым матрицей

$$(g_{jk})=\frac{1}{(1+\xi^2+\eta^2)^2}\begin{pmatrix}1+\eta^2 & -\xi\eta\\ -\xi\eta & 1+\xi^2\end{pmatrix};$$

координаты ξ и η могут изменяться на всей (ξ,η)-плоскости. Покажите, что $\mathcal{S}$ может быть погружено в E^3 как полусфера.

2. Аналогично найдите погружение в E^3 многообразия с метрическим тензором

$$(g_{jk})=\begin{pmatrix}1+\eta^2 & \xi\eta\\ \xi\eta & 1+\xi^2\end{pmatrix}.$$

26.5. ПОДНЯТИЕ И ОПУСКАНИЕ ИНДЕКСОВ

Если v^j — любой контравариантный вектор на римановом или псевдоримановом многообразии, то ковариантный вектор $v_j=g_{jk}v^k$, полученный как внутреннее произведение v^j на метрический тензор, рассматривается как просто другое представление v^j; говорят, что v_j получено из v^j *опусканием индекса*, и когда один и тот же символ используется для контравариантного и ковариантного векторов, предполагают, что они связаны именно таким образом. Аналогично, если w_j — произвольный ковариантный вектор, говорят, что контравариантный вектор $w^j=g^{jk}w_k$ получен *поднятием индекса*. Если индекс сначала поднимается, а затем опускается (или наоборот), получается исходный вектор, потому что (g_{jk}) и (g^{jk}) — взаимно обратные матрицы, так что $g_{jk}g^{kl}w_l=w_j$. Точно так же можно опустить или поднять любой индекс любого тензора, например

$$S_j{}^k{}_l=g^{km}S_{jml}=g_{jm}S_l{}^{km} \text{ и т. д.};$$

заметим, что горизонтальное упорядочивание индексов должно сохраняться, если тензор не является симметрическим. Ясно, что g^{jk} — это просто результат поднятия обоих индексов g_{jk}; смешан-

[1]) Отображение ψ многообразия M в E^N называется *погружением* (*иммерсией*), если его матрица Якоби в любой точке невырождена; оно называется *вложением*, если является взаимно однозначным отображением многообразия M на его образ в E^N.— *Прим. перев.*

ная форма метрического тензора имеет вид

$$g^j_k = g^{jl} g_{lk} = \begin{Bmatrix} 1 & \text{при} & j = k \\ 0 & \text{при} & j \neq k \end{Bmatrix} = \delta^j_k;$$

в этом частном случае привычно писать индексы без горизонтального разделения (g^j_k вместо $g^j{}_k$ или $g_k{}^j$), что допустимо вследствие симметрии.

26.6 ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

Оставшаяся часть главы, за исключением последнего параграфа, посвящена геодезическим. Однако это еще не совсем геометрия, потому что мы будем иметь дело в основном с аналитическими методами и связями. Геометрические свойства появятся в следующей главе с введением таких понятий, как параллельный перенос вдоль кривой.

Пусть $\mathscr{C}$—гладкая кривая на римановом многообразии M с началом P_1 и концом P_2. Предположим сначала, что $\mathscr{C}$ лежит на одной координатной карте и в этой карте описывается функциями $x^j(w)$, $a \leqslant w \leqslant b$, которые принадлежат классу C^2. Преобразования одной карты в другую будут рассмотрены позднее. Величина

$$L = \int_a^b \sqrt{g_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l}\, dw = \int_a^b ds \tag{26.6.1}$$

называется *длиной* кривой $\mathscr{C}$. (Если M погружено в евклидово пространство E^N более высокой размерности, как это описано в § 26.4, то L—в точности длина $\mathscr{C}$, как кривой в E^N.) Подкоренное выражение в (26.6.1) положительно, потому что метрический тензор в римановом пространстве положительно определен (о псевдоримановых пространствах см. § 26.7). Это подкоренное выражение следует рассматривать как функцию от w:

$$g_{kl}(x^1(w), \ldots, x^n(w))\,(dx^k(w)/dw)\,(dx^l(w)/dw) \overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=} \Phi(x^1, \ldots, x^n, \dot{x}^1, \ldots, \dot{x}^n), \tag{26.6.2}$$

где точка обозначает d/dw, а каждый аргумент функции $\Phi(\ldots)$ понимается как соответствующая функция от w.

Заметим, между прочим, что если кривая $\mathscr{C}$ лежит на пересечении двух карт, то в любой из них длина L оказывается одним и тем же числом, поскольку выражение (26.6.2) является скаляром и для любого w значение Φ не зависит от выбора системы координат; следовательно, значение L, полученное из (26.6.1), оказывается инвариантом. Если $\mathscr{C}$—кусочно гладкая кривая, то под ее длиной понимается сумма длин ее гладких кусков.

Если можно найти такую гладкую кривую $\mathscr{C}_0$ от P_1 до P_2, определяемую функциями y^k:

$$\mathscr{C}_0\colon\ x^k = y^k(w) \quad (a \leqslant w \leqslant b), \tag{26.6.3а}$$

что интеграл L для $\mathscr{C}_0$ оказывается меньше, чем для любых других кривых, соединяющих P_1 и P_2, то очевидно, что $\mathscr{C}_0$ является самой короткой среди таких кривых. Чтобы сравнить $\mathscr{C}_0$ с соседними кривыми, рассмотрим кривые $\mathscr{C}$ вида

$$\mathscr{C}\colon\ x^k = y^k(w) + \varepsilon z^k(w), \tag{26.6.3б}$$

где ε — малый параметр, а z^k — произвольные C^2-функции, такие, что $z^k(a) = z^k(b) = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$; тогда

$$L = L_0 + \frac{1}{2}\varepsilon \int_a^b \Phi^{-1/2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} z^k + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^k}\dot{z}^k\right) dw + O(\varepsilon^2), \tag{26.6.4}$$

где L_0 — длина $\mathscr{C}_0$. У функции Φ и ее производных аргументы x^k и $\dot{x}^k$ следует рассматривать как функции на $\mathscr{C}_0$, т. е. как $y^k(w)$ и $\dot{y}^k(w)$. Чтобы значение L было минимумом, интеграл в (26.6.4) должен обращаться в нуль при любом выборе функций $z^k(w)$, а это условие приводит к дифференциальным уравнениям относительно функций $y^k(w)$, описывающих кривую $\mathscr{C}_0$. Если этот интеграл обращается в нуль при всех z^k, т. е. если y^k удовлетворяют этим дифференциальным уравнениям, то кривая $\mathscr{C}_0$ называется *геодезической* (или *геодезической кривой*) на M; кривая $\mathscr{C}_0$ может быть *наикратчайшим* путем от P_1 до P_2, а может и не быть им (см. примеры ниже), однако в любом случае значение L *стационарно* на $\mathscr{C}_0$.

В частности, если M — евклидово n-мерное пространство и $x^1, \ldots, x^n$ — криволинейные координаты, так что метрический тензор задается формулой (26.3.1), то кривая $\mathscr{C}_0$ представляет собой отрезок прямой, описанный в криволинейных координатах.

Для упрощения последующих вычислений удобно выбрать параметр w на кривой $\mathscr{C}_0$ таким образом, чтобы Φ оказалось константой на $\mathscr{C}_0$ (но не обязательно на соседних кривых $\mathscr{C}$; в самом деле, w нельзя выбрать таким, чтобы Φ было одной и той же константой на $\mathscr{C}_0$ и на соседних кривых, потому что для этих кривых $w = a$ и $w = b$ в P_1 и P_2 соответственно; значит, если w можно было бы выбрать указанным образом, то все эти кривые имели бы одну и ту же длину). Это можно сделать введением на $\mathscr{C}_0$ нового параметра $\lambda = \lambda(w)$ равенством

$$\lambda(w_1) = \int_a^{w_1} \sqrt{g_{kl}\dot{y}^k\dot{y}^l}\, dw, \quad a \leqslant w_1 \leqslant b \tag{26.6.5}$$

(λ—*длина дуги* вдоль $\mathscr{C}_0$); используя λ в качестве переменной интегрирования вместо w, получим вместо (26.6.5)

$$\lambda_1 = \int_0^{\lambda_1} \sqrt{g_{kl}\dot{y}^k\dot{y}^l}\, d\lambda;$$

поэтому после дифференцирования по λ_1 получаем

$$\sqrt{g_{kl}\dot{y}^k\dot{y}^l} = \sqrt{\Phi} \equiv 1 \quad \text{на } \mathscr{C}_0.$$

Множитель $\Phi^{-1/2}$ можно теперь вынести за знак интеграла (26.6.4). Иначе говоря, *если в качестве параметра λ взята длина дуги $\mathscr{C}_0$, то вариационные задачи*

$$\delta \int_a^b \sqrt{\Phi}\, d\lambda = 0 \quad \text{и} \quad \delta \int_a^b \Phi\, d\lambda = 0 \tag{26.6.6}$$

имеют одно и то же решение. Хотя $\Phi = 1$ на $\mathscr{C}_0$, частные производные Φ в (26.6.4) не обращаются в нуль, потому что они включают дифференцирования по другим направлениям, а не только вдоль $\mathscr{C}_0$.

Интегрирование по частям второго слагаемого в (26.6.4) после удаления $\Phi^{-1/2}$ (проинтегрированные члены обращаются в нуль, поскольку $z^k = 0$ в P_1 и P_2) и приравнивание интеграла нулю дают

$$\int_a^b \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} - \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^k} \right) z^k(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

В силу произвольности $z^k(\lambda)$ отсюда следует, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} - \frac{d}{d\lambda}\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}^k} = 0 \quad \text{на } \mathscr{C}_0 \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{26.6.7}$$

Слова «на $\mathscr{C}_0$» означают, что в качестве функций $x^k(\lambda)$, входящих в Φ (см. § 26.6.2), нужно брать функции $y^k(\lambda)$, которые описывают кривую $\mathscr{C}_0$. Уравнения (26.6.7) являются *вариационными уравнениями Эйлера* задачи

$$\delta \int_a^b \Phi\, d\lambda = 0. \tag{26.6.8}$$

Из определения (26.6.2) функции Φ ясно, что уравнения Эйлера выглядят, в частности, так [в (26.6.7) k заменяется на m]:

$$\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\dot{x}^k\dot{x}^l - \frac{d}{d\lambda}(g_{ml}\dot{x}^l + g_{km}\dot{x}^k) = 0$$

(два члена в скобках, конечно, равны друг другу), или

$$\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x^l} \right)\dot{x}^k\dot{x}^l - 2g_{ml}\ddot{x}^l = 0; \tag{26.6.9}$$

именно этим уравнениям ($m=1, \ldots, n$) должны удовлетворять функции $x^k(w)=y^k(w)$ для того, чтобы кривая $\mathscr{C}_0$ была геодезической.

Эти уравнения удобно записать с использованием *трехиндексных символов Кристоффеля* первого и второго рода, имеющих вид соответственно

$$[kl, m]=\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{km}}{\partial x^l}\right) \qquad (26.6.10)$$

и

$$\left\{{r \atop k\ l}\right\}=g^{rm}[kl, m] \quad \text{(просуммировано по } m\text{).} \qquad (26.6.11)$$

Тогда после умножения (26.6.9) на g^{rm} и суммирования по m получаются уравнения (для геодезической)

$$\ddot{x}^r+\left\{{r \atop k\ l}\right\}\dot{x}^k\dot{x}^l=0 \quad (r=1, \ldots, n) \qquad (26.6.12)$$

(здесь, как и везде, используется соглашение о суммировании). Символ $\left\{{r \atop k\ l}\right\}$ является функцией от $x^1, \ldots, x^n$, причем считается, что взяты $x^1(\lambda), \ldots, x^n(\lambda)$. Любая кривая $\mathscr{C}$: $x^k=x^k(\lambda)$, удовлетворяющая (26.6.12), называется *геодезической*; параметр λ называется *натуральным параметром* (или *аффинным*, или *предпочтительным*, или *естественным*) на $\mathscr{C}$. Очевидно, что уравнения (26.6.12) не изменяются при подстановке $\lambda\to a\lambda+b$, где $a\neq 0$ и b — константы; следовательно, натуральный параметр определен с точностью до таких линейных преобразований. На римановом многообразии λ можно взять как длину дуги.

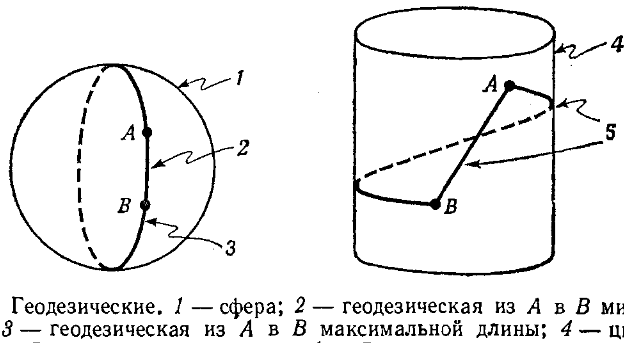

Рис. 26.2. Геодезические. *1* — сфера; *2* — геодезическая из A в B минимальной длины; *3* — геодезическая из A в B максимальной длины; *4* — цилиндр; *5* — две геодезические из A в B минимальной длины.

Достигает ли на $\mathscr{C}$ интеграл L действительно минимума (а не максимума или даже просто стационарного значения) и является ли этот минимум единственным, невозможно выяснить без дополнительных исследований (см. примеры на рис. 26.2; заметьте также, что на сфере имеется бесконечно много геодезических между данной точкой и диаметрально ей противоположной, причем все эти геодезические имеют одну и ту же длину). Однако ниже мы убедимся в том, что для любой заданной точки A многообразия найдется такая ее окрестность N_A, что для любой точки $B \in N_A$ имеется только одно решение $\mathscr{C}_0$ уравнений (26.6.12), идущее из A в B и лежащее в N_A, причем на этой кривой $\mathscr{C}_0$ интеграл L достигает минимума.

Замечания. Величины $[kl, m]$ не являются компонентами какого-либо тензора ранга 3, равно как и величины $\{_k{}^r{}_m\}$, поскольку для них не выполняются соответствующие законы преобразования; например, в евклидовом пространстве все эти величины тождественно равны нулю в декартовых координатах, но не в криволинейных координатах. Величины $\dot{x}^k$ есть компоненты контравариантного вектора, но $\ddot{x}^k$ таковыми не являются. Тем не менее уравнения (26.6.12) в некотором смысле инвариантны: если в некоторой системе координат им удовлетворяет данная кривая $P(\lambda)$, то эта кривая удовлетворяет им и в любой другой системе координат, потому что эти уравнения выведены из инвариантного уравнения (26.6.8). Геодезическая и натуральный параметр являются инвариантными объектами. Левые части уравнений (26.6.12), вычисленные не обязательно на геодезической, образуют в любой точке кривой $\mathscr{C}$ контравариантный вектор (полученный при помощи так называемого абсолютного дифференцирования вектора $\dot{x}^k$ — см. § 27.6), хотя отдельные члены в (26.6.12) сами по себе не являются компонентами какого-либо вектора. Если кривая $\mathscr{C}$ проходит через несколько карт и в каждой из них удовлетворяет (26.6.12), то $\mathscr{C}$ также называется *геодезической* на многообразии.

26.7. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА ПСЕВДОРИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

В этом случае Φ может быть отрицательным, поэтому величина L, определенная как $\int_a^b \Phi^{1/2}\, dw$, не имеет смысла длины. Даже если переопределить L как $\int_a^b |\Phi|^{1/2} dw$, то L еще не будет длиной в обычном смысле, так как для любых данных точек P и Q всегда можно найти такую (кусочно гладкую) кривую от P до Q, что для нее $L=0$. Тем не менее кривая $\mathscr{C}$: $x^k = x^k(\lambda)$, удовлетворяющая (26.6.12), по-прежнему называется *геодезической*, а λ называется *натуральным параметром*. Величина $\Phi = g_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k$ постоянна на $\mathscr{C}$, и возможны три случая:

$$
\begin{aligned}
&\text{если } \Phi > 0, \text{ то } \mathscr{C} \text{ называется} \\
&\qquad \textit{пространственноподобной} \text{ геодезической;} \\
&\text{если } \Phi = 0, \text{ то } \mathscr{C} \text{ называется} \\
&\qquad \textit{нулевой} \text{ геодезической;} \\
&\text{если } \Phi < 0, \text{ то } \mathscr{C} \text{ называется} \\
&\qquad \textit{временноподобной} \text{ геодезической.}
\end{aligned}
\tag{27.7.1}
$$

Так как Φ — квадратичная по $\dot{x}^k$ функция, эта классификация не зависит от выбора натурального параметра. Параметр λ можно выбрать так, чтобы в первом случае было $\Phi = 1$, а в третьем $\Phi = -1$; в этом случае λ называется соответственно *расстоянием* и *собственным временем* вдоль кривой $\mathscr{C}$. Геодезические играют важную роль в общей теории относительности.

26.8. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ. ЗАДАЧА С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ. УСЛОВИЕ ЛИПШИЦА

Пусть $a^1, \ldots, a^n$ — координаты (на данной карте) произвольной точки P_0 риманова или псевдориманова многообразия M. Задача с начальными данными для нахождения геодезической, идущей из точки P_0 по направлению касательного вектора $\xi^1, \ldots, \xi^n$ в P_0, с натуральной параметризацией состоит в следующем: нужно решить дифференциальные уравнения

$$\frac{dx^j}{d\lambda} = p^j, \quad \frac{dp^j}{d\lambda} = -\left\{{}_k{}^j{}_l\right\} p^k p^l \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{26.8.1}$$

с начальными условиями

$$x^j(0) = a^j, \quad p^j(0) = \xi^j \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{26.8.2}$$

В следующем параграфе будет показано, что эта задача всегда имеет единственное решение для λ из некоторого интервала $[-\lambda_0, \lambda_0]$.

Удобно ввести обозначения

$$
\begin{aligned}
y^k &= x^k - a^k \quad (k = 1, \ldots, n), \\
y^{n+k} &= p^k \qquad\quad (k = 1, \ldots, n)
\end{aligned}
$$

и переписать дифференциальные уравнения в виде

$$dy^k/d\lambda = f^k(y^1, \ldots, y^{2n}), \quad k = 1, \ldots, 2n, \tag{26.8.3}$$

где через f^k обозначены функции в правой части k-го уравнения (26.8.1) для $k = 1, \ldots, 2n$, а символы Кристоффеля теперь рассматриваются как функции от $y^1, \ldots, y^{2n}$. Функции f^k для всех $y^1, \ldots, y^{2n}$ определяются так, что соответствующая точка $x^1, \ldots, x^n$ лежит на заданной карте. Предполагается, что все $\left\{{}_k{}^j{}_l\right\}$ и их первые производные непрерывны на этой карте; оказывается, что в этом случае функции f^k удовлетворяют условию Липшица на любой компактной области $(y^1, \ldots, y^{2n})$-пространства, на которой они определены. Это означает, что для любой постоянной δ, такой, что f^k определены для всех $y^1, \ldots, y^{2n}$ в кубе $W = \{y: |y^i| \leqslant \delta, i = 1, \ldots, 2n\}$ найдется такая постоянная $L = L(\delta)$, что для любых двух точек $\{y^i\}$ и $\{\bar{y}^i\}$ из W

$$|f^k(y^1, \ldots, y^{2n}) - f^k(\bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^{2n})| \leqslant L \max_{(j=1, \ldots, 2n)} |y^j - \bar{y}^j|, \quad k = 1, \ldots, 2n. \tag{26.8.4}$$

Доказательство этого свойства $\{f^k\}$ предлагается в качестве упражнения. Оно основано на использовании вида f^k, заданного в (26.8.1), и предположения, что символы Кристоффеля являются функциями класса C^1 по переменным $y^1, \ldots, y^n$. В новых обозначениях задача с начальными данными принимает вид

$$dy^k/d\lambda = f^k(y^1, \ldots, y^N), \quad y^k(0) = y_0^k \text{ задано} \quad (k = 1, \ldots, N = 2n). \tag{26.8.5}$$

В следующем параграфе будет доказано, что эта задача имеет единственное решение вблизи $\lambda = 0$; следовательно, выполняется и следующая теорема.

Теорема 1. *Задача с начальными данными* (26.8.1), (26.8.2) *о геодезических, идущих из точки P_0 в направлении начального касательного вектора $\{\xi^k\}$, имеет единственное решение $x^k(\lambda)$ на некотором интервале* $-\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0$ $(\lambda_0 > 0)$.

Следствие 1. *Если кривая $\mathscr{C}$ есть геодезическая $P(\lambda)$ на M с натуральной параметризацией и удовлетворяет начальным условиям* (26.8.2), *то $P(\lambda)$ единственна на всем ее протяжении*[1]*.*

Доказательство. Предположим, что $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$ — две такие кривые и что λ_1 — точка, в которой они расходятся, т. е.

$$\lambda_1 = \sup\{\lambda: P_1(\lambda') = P_2(\lambda'),\ 0 \leqslant \lambda' \leqslant \lambda\}.$$

Положим $P_0 = P_1(\lambda_1) = P_2(\lambda_1)$ и применим теорему 1 к задаче с начальными данными в λ_1; тогда оказывается, что если $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$ определены за точкой $\lambda = \lambda_1$, то они совпадают на некотором интервале $(\lambda_1 - \lambda_0, \lambda_1 + \lambda_0)$, а следовательно, они не расходятся в λ_1 вопреки предположению.

Если начальный касательный вектор $\{\xi^k\}$ заменить на вектор того же направления, но другой длины, то в качестве множества точек в M получается та же самая геодезическая, но с другим выбором натурального параметра λ, т. е. из структуры уравнений (26.8.1) следует, что если $\{x^k(\lambda), p^k(\lambda)\}$ — какое-то решение для $\lambda \in [0, \lambda_0]$, то при $a > 0$ $\{x^k(a\lambda), ap^k(a\lambda)\}$ — решение для $\lambda \in [0, \lambda_0/a]$. В качестве начального касательного вектора вместо $\{\xi^k\}$ берется вектор $\{a\xi^k\}$. Если положить $a = \lambda_0$, то отсюда следует, что для любого заданного направления всегда существует решение, определенное для

[1] То есть $\mathscr{C}$ не может разветвляться.— *Прим. перев.*

всех $\lambda \in [0, 1]$, первоначально идущее в этом направлении и такое, что все компоненты его начального касательного вектора меньше некоторой положительной константы. Можно также доказать, что эта константа непрерывно зависит от направления $\{\xi^k\}$, а значит, имеет нижнюю грань или минимум. Поэтому верна следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть, как и выше,* $a^1, \ldots, a^n$ *— координаты (в некоторой карте) точки* P_0. *Существует такая положительная константа* $K = K(P_0)$, *что задача с начальными данными* (26.8.1), (26.8.2) *о геодезической имеет решение на интервале* $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ *для всех векторов* $\{\xi^k\}$, *таких, что* $|\xi^k| < K$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Эта теорема будет использована в следующей главе для доказательства существования в окрестности точки так называемых римановых координат.

26.9. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ. ИТЕРАЦИИ ПИКАРА

Данный параграф содержит материал, не относящийся непосредственно к теории многообразий; он посвящен доказательству фундаментального свойства обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно существования решения задачи с начальными данными (26.8.5) в случае выполнения условия Липшица (26.8.4). И теорема существования, и сам метод ее доказательства широко применяется во многих областях физики и математики.

Перепишем задачу с начальными данными (26.8.5) в виде интегрального уравнения Вольтерра (в котором независимая переменная λ оказывается верхним пределом интеграла):

$$y^k(\lambda) = y^k(0) + \int_0^\lambda f^k(\mathbf{y}(\lambda'))\, d\lambda', \quad k = 1, \ldots, N, \tag{26.9.1}$$

где $\mathbf{y}$ — вектор с компонентами $y^1, \ldots, y^N$. Далее удобно использовать норму $\|\mathbf{x}\| = \max\limits_{(i)} |x^i|$, которая позволяет записать условие Липшица в виде

$$|f^k(\mathbf{y}) - f^k(\bar{\mathbf{y}})| < L \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{26.9.2}$$

Решение интегрального уравнения (26.9.1) получается здесь *итерационным методом Пикара*, в котором $y^k(\lambda, q)$ обозначает q-ю итерацию, $y^k(\lambda, 0)$ есть $y^k(0)$ (не зависит от λ), а последовательные приближения задаются формулой

$$y^k(\lambda, q+1) = y^k(0) + \int_0^\lambda f(\mathbf{y}(\lambda', q))\, d\lambda', \quad q = 1, 2, \ldots. \tag{26.9.3}$$

Чтобы оценить скорость сходимости, введем обозначения (для $q = 1, 2, \ldots$):

$$\Delta y^k(\lambda, q) = y^k(\lambda, q) - y^k(\lambda, q-1),$$
$$\Delta f^k(\lambda, q) = f^k(\mathbf{y}(\lambda, q)) - f^k(\mathbf{y}(\lambda, q-1)).$$

Вычитая последовательные уравнения (26.9.3) одно из другого (для $q+1$ и q), получаем

$$\Delta y^k(\lambda,\ q+1)=\int_0^\lambda \Delta f^k(\lambda',\ q)\,d\lambda'. \tag{26.9.4}$$

Это уравнение выполняется не только для $q=1,\ 2,\ \ldots$, но и для $q=0$, если положить $y^k(\lambda,\ -1)=0$ и заметить, что $f^k(0)=0$.

Скорость сходимости оценивается в следующей лемме.

Лемма. *Предположим, что*

$$\|\mathbf{y}(0)\|<\delta/2 \tag{26.9.5}$$

[*т. е. что* $\mathbf{y}(0)$ *лежит не просто в кубе* W, *а в его центральной части*] *и что* $|\lambda|\leqslant \ln 2/L$, *где* L — *константа Липшица в* (26.9.2). *Тогда для* $q=1,\ 2,\ \ldots$

$$\|\Delta\mathbf{y}(\lambda,\ q)\|\leqslant(\delta/2)(1/q!)(L|\lambda|)^q \tag{26.9.6}$$

и

$$\|\mathbf{y}(\lambda,\ q)\|<\delta. \tag{26.9.7}$$

Доказательство. Случай $q=1$ следует из (26.9.4) и (26.9.5), а далее доказательство можно продолжить индукцией по q, поскольку

$$\int_0^\lambda \lambda^q\,d\lambda=\lambda^{q+1}/(q+1)$$

и

$$\|\mathbf{y}(\lambda,\ q\|=\left\|\sum_{r=0}^{q}\Delta\mathbf{y}(\lambda;\ r)\right\|\leqslant$$
$$\leqslant(\delta/2)\sum_{r=0}^{q}(1/r!)\,(L|\lambda|)^r<(\delta/2)\,e^{\ln 2}=\delta. \tag{26.9.8}$$

Оценка (26.9.8) обеспечивает допустимость использования условия Липшица для любого q.

Ясно, что именно сомножитель $1/q!$ в (26.9.6) обеспечивает эффективность метода. Так как сумма в (26.9.8) мажорируется степенным рядом функции $e^{L|\lambda|}$, соответствующий ей ряд сходится абсолютно и равномерно по λ на любом конечном интервале. Поэтому эту сумму можно почленно проинтегрировать, а после этого окажется, что функция $\mathbf{y}(\lambda)=\lim\limits_{q\to\infty}\mathbf{y}(\lambda,\ q)$ удовлетворяет интегральному уравнению (26.9.1) и, следовательно, является решением задачи с начальными данными (26.8.5).

Тем самым доказана и теорема 1 из предыдущего параграфа.

26.10. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ. ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

В евклидовой геометрии любые две точки P и Q могут быть связаны единственным отрезком прямой $\overline{PQ}$. То же самое локально верно и для риманова и псевдориманова многообразия M с заменой прямой на геодезическую. Рассмотрим задачу нахождения таких функций $x^j(\lambda)$ $(j=1, \ldots, n)$, что

$$\begin{gathered} \ddot{x}^j = -\left\{{}_k{}^j{}_l\right\} \dot{x}^k \dot{x}^l \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1,\ j=1, \ \ldots, \ n), \\ x^j(0) \text{ и } x^j(1) \text{ заданы } (j=1, \ \ldots, \ n). \end{gathered} \tag{26.10.1}$$

Уайтхед в 1932 г. доказал следующую теорему.

Теорема. *Любая точка $P_0 \in M$ имеет такую окрестность V, что для любых двух точек Q_0 и Q_1 из V с координатами $x^j(0)$ и $x^j(1)$ $(j=1, \ \ldots, \ n)$ соответственно существует единственная геодезическая, соединяющая Q_0 и Q_1 и целиком лежащая в V.*

Требование принадлежности всей геодезической окрестности V часто необходимо для обеспечения ее единственности: см. рис. 26.2, где геодезическая на цилиндре идет по длинному пути вокруг цилиндра, а не по кратчайшему пути от начальной до конечной точки.

Эту теорему легко доказать в несколько более слабой форме: существуют такие окрестности V_1 и V_2, $P_0 \in V_1 \subset V_2$, что если $Q_0, Q_1 \in V_1$, то имеется только одна геодезическая, соединяющая Q_0 и Q_1 и лежащая в V_2; доказательство Уайтхеда возможности совпадения V_1 и V_2 содержит некоторые топологические соображения.

Следующие два результата, получающиеся при доказательстве теоремы Уайтхеда, приводятся также без доказательства.

Следствие 1. *Если кривая $x^i(\lambda)$ непрерывна при $a \leqslant \lambda \leqslant b$ и удовлетворяет уравнению геодезической при $a < \lambda < b$, то она удовлетворяет этому уравнению и при $\lambda = a$ и $\lambda = b$.*

Следствие 2. *Если (отражая зависимость геодезической от концевых точек) решение двухточечной задачи, получающееся в теореме Уайтхеда, записать как $x^j(\lambda, Q_0, Q_1)$, то для любого $\lambda \in [0, 1]$ функции $x^j(\lambda, Q_0, Q_1)$ непрерывно зависят от координат $x^j(0)$ и $x^j(1)$ начальной и конечной точек Q_0 и Q_1.*

Доказательство существования решения двухточечной задачи аналогично доказательству существования решения задачи с начальными данными: система уравнений (26.10.1) сводится к интегральному уравнению, которое решается методом итераций Пикара. Процедура доказательства несколько сложнее, потому что здесь получается интегральное уравнение Фредгольма (верхний предел интегралов равен 1, а не λ), и поэтому здесь нет ни множителя $1/q!$, ни явной зависимости от λ, как это было в (26.9.6). Подробности см. в работе Уайтхеда [1932].

26.11. ПРОДОЛЖЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

Для римановых многообразий можно доказать, что если кривая $x^j(\lambda)$ удовлетворяет уравнению геодезической при $a < \lambda < b$ и лежит в компактной области многообразия, то существуют пределы $x^j(\lambda)$ при $\lambda \to a$ и $\lambda \to b$ и поэтому, в частности, применимо следствие 1 теоремы Уайтхеда. Для псевдоримановых многообразий это неверно, что показывает следующий пример. Пусть M — поверхность цилиндра, $x^1 = z$ и $x^2 = \theta$ — цилиндрические координаты, а метрика на M задается матрицей

$$(g_{jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2z^2 \end{pmatrix} \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} < z < \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

При таких ограничениях на z M оказывается псевдоримановым многообразием. Читатель легко может проверить, что кривая

$$z = \lambda, \quad \theta = 1/\lambda \quad (0 < \lambda < {}^1/_2)$$

является геодезической. При $\lambda \to 0$ геодезическая бесконечное число раз огибает цилиндр и приближается к окружности $z = 0$.

Однако если кривая $x^j = x^j(\lambda)$ $(j = 1, \ldots, n)$ удовлетворяет уравнению геодезической при $a < \lambda < b$ и непрерывна при $a \leqslant \lambda \leqslant b$, то применимо указанное следствие 1 и величины $x^j(b)$, $\dot{x}^j(b)$ можно использовать как начальные данные для теоремы существования в § 26.8, чтобы продолжить геодезическую на некоторые значения $\lambda > b$; аналогично геодезическую можно продолжить и на некоторые значения $\lambda < a$.

Если под *геодезической* (в отличии от отрезка геодезической) понимать решение уравнения геодезической, продолженное настолько, насколько это возможно (вполне вероятно через несколько карт), то указанный выше результат можно сформулировать так: для римановых или псевдоримановых многообразий *геодезическая не может иметь на многообразии ни начала, ни конца.*

Замечание. Это не означает, что для геодезической $\lambda \to \pm\infty$, и не означает, что геодезическая не может иметь начала или конца в некотором пространстве, в которое погружено данное многообразие.

26.12. АФФИННО СВЯЗНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Поскольку законы преобразования тензоров известны, а g_{jk} является тензором, легко найти закон преобразования для трехиндексного символа Кристоффеля $\{{}_j{}^i{}_k\}$ из уравнений (26.6.10), (26.6.11). Если

$\left\{{}_j{}^i{}_k\right\}'$ относится к координатам $x'^1, \ldots, x'^n$, а $\left\{{}_j{}^i{}_k\right\}$ — к координатам $x^1, \ldots, x^n$, то они связаны равенством

$$\left\{{}_j{}^i{}_k\right\}' = \left[\left\{{}_s{}^r{}_t\right\} \frac{\partial x^s}{\partial x'^j} \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^j \, \partial x'^k} \right] \frac{\partial x'^i}{\partial x^r}. \qquad (26.12.1)$$

Так как в уравнение геодезической (26.6.12) входит только $\left\{{}_j{}^i{}_k\right\}$, а не непосредственно g_{jk}, можно получить геометрию более общего вида, называемую *аффинной геометрией*, если совсем не предполагать существование метрического тензора g_{jk}, а предполагать существование только набора величин, преобразующихся подобно $\left\{{}_j{}^i{}_k\right\}$ и помещаемых на место $\left\{{}_j{}^i{}_k\right\}$ в уравнении геодезической. Тогда существование (или отсутствие) тензора g_{jk}, при помощи которого эти величины могут быть найдены из уравнений (26.6.10), (26.6.11), не играет особой роли.

Аффинная связность многообразия M определяется (по аналогии с тензором) как множество наборов n^3 функций $\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$, причем с каждой картой на M связан один такой набор, а на перекрытии двух карт два соответствующих набора функций связаны законом преобразования

$$\Gamma'^i{}_{jk} = \left[\Gamma^r{}_{st} \frac{\partial x^s}{\partial x'^j} \frac{\partial x^t}{\partial x'^k} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^j \partial x'^k} \right] \frac{\partial x'^i}{\partial x^r} \qquad (26.12.2)$$

(совпадающим с (26.12.1)). Так как уже не предполагается, что $\Gamma^i{}_{jk}$ вычисляются по значениям метрического тензора g_{jk} как $\left\{{}_j{}^i{}_k\right\}$, то необходимо проверить непосредственно, что этот закон преобразования транзитивен (см. § 26.1), для того чтобы гарантировать самосогласованность определения аффинной связности; это предоставляется сделать читателю в качестве упражнения.

В *аффинно связном многообразии* M (т. е. в многообразии, на котором определена аффинная связность) гладкая кривая $\mathscr{C}$: $x^i = x^i(\lambda)$ $(i = 1, \ldots, n)$ называется *геодезической*, а λ — *натуральным параметром* на $\mathscr{C}$, если $\mathscr{C}$ удовлетворяет уравнениям

$$\ddot{x}^r + \Gamma^r{}_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l = 0 \quad (r = 1, \ldots, n) \qquad (25.12.3)$$

(точки означают дифференцирование по λ). Сравните эти уравнения с (26.6.12).

Как и в римановой геометрии, уравнения геодезических (26.12.3) инвариантны относительно замены систем координат в том смысле, что если кривая $\mathscr{C}$ лежит на перекрытии двух карт, то она удовлетворяет уравнениям (26.12.3) в одной из координатных систем тогда и только тогда, когда она удовлетворяет этим уравнениям и в другой системе координат. Эти уравнения инвариантны также относительно преобразования $\lambda \to a\lambda + b$ $(a \neq 0)$ натурального параметра данной геодезической.

Теоремы § 26.8, относящиеся к задаче с начальными данными о геодезической, остаются справедливыми, если коэффициенты Γ^i_{jk} аффинной связности являются C^1-функциями, для чего, согласно (26.12.2), требуется C^3-гладкость многообразия.

Выполняется и теорема Уайтхеда (на самом деле Уайтхед сформулировал и доказал ее первоначально именно для аффинно связных многообразий): *для каждой точки P найдется такая окрестность V, что любые две точки в V можно соединить единственной геодезической, целиком лежащей в V.*

Вопрос о том, можно ли найти (по заданным на многообразии коэффициентам Γ^i_{jk} аффинной связности) такой метрический тензор g_{jk}, чтобы он был согласован со связностью, т. е. чтобы $\Gamma^i_{jk}=\left\{{i \atop j\,k}\right\}$, обсуждается вкратце в конце § 27.10.

Геометрическая структура, обусловленная геодезическими на аффинно связном многообразии, называется *геометрией путей*; некоторые ее аспекты обсуждаются в следующей главе. Из (26.12.3) ясно, что при этом следует предполагать симметричность коэффициентов связности по нижним индексам:

$$\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}. \tag{26.12.4}$$

В более общем случае иногда вводится дополнительное геометрическое понятие—*кручение*, которое основано на антисимметрической части $^1/_2\,(\Gamma^i_{jk}-\Gamma^i_{kj})$ связности; см. Фландерс [1963]. Так как кручение не действует на геодезические, его следует рассматривать как нечто внешнее по отношению к ним и накладывать на геометрию многообразия, определяемую геодезическими.

26.13. РИМАНОВЫ И ПСЕВДОРИМАНОВЫ НАКРЫВАЮЩИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Пусть M—накрывающее многообразие для N, а ψ—проекция M на N. Для любой функции $f(P)$ на N (скажем, класса C^k) о функции $\tilde f(Q) \overset{\text{def}}{=} f(\psi(Q))$, определенной на M, говорят, что она *поднята из N* на M (по аналогии с поднятием кривых и поверхностей, описанным в § 24.2).

Предположим теперь, что N—риманово многообразие. Пусть $\varphi^i(P)$—координаты в некоторой правильной окрестности $V\subset N$, а g_{jk}—компоненты метрического тензора в этих координатах. Все φ^i и g_{jk} являются функциями на N, и их можно поднять на M как функции $\tilde\varphi^i$ и $\tilde g_{jk}$. Тогда каждая связная компонента U_i из $\psi^{-1}(V)$ становится картой с координатами $\tilde\varphi^i$ и метрическим тензором $\tilde g_{jk}$ и нетрудно показать, что тем самым M превращается в риманово многообразие, которое называют *римановым накрывающим многообразием* для N. Если M—универсальное накрывающее многообразие многообразия N, то M называется его *универсальным римановым накрывающим многообразием*.

Аналогично определяются и псевдоримановы накрывающие многообразия.

Рассмотрим теперь задачу построения многообразий N, накрываемых данным римановым многообразием M. Для общего многообразия M такое N было получено в § 24.6 посредством такого гомеоморфизма σ M на себя, что если P — любая точка M, то множество точек P, $\sigma(P)$, $\sigma(\sigma(P))$, ..., $\sigma^{-1}(P)$, ... дискретно (не имеет предельной точки в M); построение накрываемого многообразия N осуществляется отождествлением всех точек этого множества для каждой точки P, т. е. множество всех точек, получающихся из P посредством гомеоморфизма σ, рассматривается как одна точка искомого многообразия N. Для того чтобы в результате такого построения получилось *риманово* многообразие, необходимо потребовать только, чтобы отображение σ было *изометрическим* гомеоморфизмом, т. е. чтобы оно сохраняло метрику. Пусть $\{U, \varphi, N\}$ — произвольная карта на M, а U' — множество всех точек $Q=\sigma(P)$ для $P \in U$. Положим $\varphi'(Q)=\varphi(\sigma^{-1}(Q))$. Ясно, что $\{U', \varphi', N\}$ — допустимая карта на M (т. е. согласованная с ранее определенными картами) в силу определения гомеоморфизма. Тогда g'_{jk} полагаются теми же самыми функциями координат $x'^i=\varphi'^i$ второй карты, что и g_{jk}, зависящие от координат $x^i=\varphi^i$ первой карты. Но тогда все карты, полученные из $\{U, \varphi, N\}$ посредством гомеоморфизма σ и его суперпозиций, имеют совпадающие метрические тензоры, и могут быть отождествлены для получения одной карты на N.

Эти идеи используются в гл. 28 при изучении глобальных свойств многообразий Эйнштейна.