Глава 27

РИМАНОВЫ, ПСЕВДОРИМАНОВЫ И АФФИННО СВЯЗНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Метрика, псевдометрика, связность и топология; геодезические (римановы) координаты; геометрия в смысле Клейна; приближенная конгруэнтность; конгруэнтность звезд; ковариантная производная; абсолютная производная; параллельный перенос; ориентируемость, лоренцева ориентируемость; лапласиан; даламбертиан; тензор Римана; тензор Риччи; скалярная риманова кривизна; получение вторых производных метрического тензора по тензору Римана; условия согласованности аффинной связности с метрикой; внутренняя кривизна многообразия; плоские многообразия; условия Штеккеля, Робертсона и Эйзенхарта разделения переменных в волновом уравнении.

Предварительные сведения: гл. 23, 24, 26.

Тема этой главы — геометрия многообразия, на котором определена метрика, псевдометрика или аффинная связность. Разграничение данной и предыдущей глав условно и довольно произвольно, поскольку в конце предыдущей главы изучаются геодезические кривые, а в начале этой — геодезические координаты. Однако между ними есть и важное различие. Предыдущая глава носила в основном аналитический характер, и единственное геометрическое понятие, использованное в ней,— это расстояние между двумя точками; данная глава носит в основном геометрический характер, причем в смысле Евклида, за исключением некоторых концептуальных обобщений и аналитичности формулировок. Такие фундаментальные понятия, как параллельность, длина, кривизна, угол, являются в действительности геометрическими, и их следует именно так и рассматривать. Использование аналитических методов не затрагивает геометрической природы этих понятий точно так же, как введение Декартом координат в евклидову геометрию. С этой точки зрения один из основных результатов предыдущей главы — теорема Уайтхеда — служит той же цели, что и постулат Евклида о том, что через две различные точки можно провести одну и только одну прямую, только в теореме Уайтхеда требуется, чтобы эти две точки были не слишком далеки друг от друга.

В современной математике, все направления которой до некоторой степени сливаются, трудно понять, что является геометрией, а что анализом, однако, конечно же, те понятия, которые восходят непосредственно к Евклиду, следует признать геометрическими. Во времена Евклида геометрию понимали как науку, изучающую окружающее нас физическое пространство. Если общая теория относительности верна, то таковыми же являются риманова, псевдориманова и аффинная геометрии; даже если эта теория будет модифицирована, ее главные идеи, разработанные за 60 лет, несомненно, будут продолжать быть основой теории физического пространства-времени.

Мы достигнем наилучшего понимания рассматриваемой темы, если на передний план выдвинем геометрические идеи (подобные параллельному переносу вектора вдоль кривой), а подробные аналитические формулы используем как незначительную детализацию их фона.

27.1. ТОПОЛОГИЯ И МЕТРИКА

Согласно гл. 23, топология многообразия определяется набором его координатных карт.

Главное различие между римановыми и псевдоримановыми (или аффинно связными) многообразиями состоит в том, что у последних связь между топологией и метрикой является не столь тесной, как у первых. В связном римановом многообразии расстоянием $d(P, Q)$ между любыми двумя точками P и Q есть инфимум длины кривой между ними, который берется относительно всех путей из P в Q. Многообразие тогда является метрическим пространством, что означает, что на нем определена функция d (расстояние), удовлетворяющая следующим соотношениям:

$$d(P, Q) \geqslant 0 \quad \forall P, Q;$$
$$d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q;$$
$$d(P, Q) \leqslant d(P, R) + d(R, Q).$$

Топология в этом пространстве определяется указанной метрикой, потому что множества

$$S(\varepsilon, P) = \{Q\colon d(P, Q) < \varepsilon\}$$

(открытые шары) являются открытыми множествами, а все другие открытые множества представляют собой объединения открытых шаров. В римановом многообразии эта топология совпадает с топологией, определенной ранее при помощи координатных карт.

В псевдоримановом многообразии, где матрица (g_{jk}) не является положительно определенной, только что определенное расстояние $d(P, Q)$ всегда равно нулю и поэтому не является метрикой. Тем не менее это многообразие обладает коррректно определенной топологией, порождаемой картами, как указывалось в § 23.3, и то же самое верно для аффинно связных многообразий, для которых нет даже понятия расстояния вдоль кривой.

27.2. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ (РИМАНОВЫ) КООРДИНАТЫ

Ключом к исследованию локальных геометрических свойств риманова многообразия в окрестности точки P_0, где метрический тензор g_{jk} задан в системе координат $x^1, \ldots, x^n$, содержащей точку P_0, является выбор новой системы координат $x'^1, \ldots, x'^n$, которая становится все более похожей на декартову при приближении к P_0. Было бы желательно, чтобы преобразованный метрический тензор g'_{jk} был равен δ_{jk} в P_0 (это всегда можно сделать), а вблизи P_0 был бы близок к δ_{jk}. Мы увидим, что можно обратить в нуль все первые производные от g'_{jk} в P_0, а некоторые линейные комбинации этих производных даже в целой окрестности P_0. В этом смысле новые координаты будут настолько близки к декартовым, насколько это возможно. Оставшееся отклонение g'_{jk} от δ_{jk} будет отражать тогда неевклидов характер геометрии.

Случай псевдоримановых многообразий аналогичен, только здесь мы стремимся сделать g'_{jk} равным $\pm\delta_{jk}$ в P_0, причем знаки $+$ и $-$ определяются в соответствии с сигнатурой тензора g_{jk}.

В аффинно связных многообразиях мы стремимся к тому, чтобы обратить в нуль в P_0 все коэффициенты связности Γ'^i_{jk} и оставить их малыми вблизи P_0.

В данном параграфе мы рассмотрим аффинно связные многообразия, для которых $\Gamma^i{}_{jk}=\Gamma^i{}_{kj}$, а позднее уточним полученные результаты для других случаев. Пусть $\{U, \varphi, N\}$ — карта, содержащая точку P_0, а $x^1, \ldots, x^n$ обозначают координаты в этой карте. Рассмотрим семейство всех геодезических, проходящих через P_0, натуральный параметр λ для каждой из которых выбран так, что $\lambda=0$ в P_0. Координаты на такой геодезической задаются решениями $x^k(\lambda)$ задачи с начальными данными

$$d^2x^k/d\lambda^2+\Gamma^k{}_{lm}(dx^l/d\lambda)\,dx^m/d\lambda=0, \tag{27.2.1}$$

$$x^k(0)=\varphi^k(P_0), \tag{27.2.2}$$

$$dx^k/d\lambda\,|_{\lambda=0}=y^k, \tag{27.2.3}$$

где $y^1, \ldots, y^n$ — вещественные числа, не все равные нулю и определяющие направление, по которому геодезическая выходит из P_0. Согласно теореме 2 § 26.8, эта задача имеет решение $x^k(\lambda;\, y^1, \ldots$ $\ldots, y^n)$, $k=1, \ldots, n$, для $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ и для всех векторов $y^1, \ldots, y^n$ в некоторой окрестности начала координат. Если разложить это решение по степеням λ, а коэффициенты первых трех членов разложения получить из этой задачи, то обнаружится, что

$$x^k(\lambda;\; y^1, \;\ldots,\; y^n)=x^k(0)+\lambda y^k-{}^1\!/_2\Gamma^k{}_{lm}|_0\, y^l y^m+O(\lambda^3\,|\,y\,|^3),$$

где $|y|$ обозначает $\max\limits_{(k)}|y^k|$. Индекс 0 означает, что коэффициент связности $\Gamma^k{}_{lm}$ вычислен в точке P_0. Выражение в правой части равенства можно было бы рассматривать и как степенной ряд по малым величинам $\lambda y^1, \ldots, \lambda y^n$; следовательно, без потери общности можно положить $\lambda = 1$, если y^k сами по себе достаточно малы. Тогда

$$x^k(1;\ y^1,\ \ldots,\ y^n) = x^k(0) + y^k - {}^1/_2\Gamma^k{}_{lm}|_0\, y^l y^m + O(|y|^3). \qquad (27.2.4)$$

Из этого равенства следует, что матрица Якоби

$$\partial x^k(1;\ y^1,\ \ldots,\ y^n)/\partial y^l$$

равна δ^k_l в P_0 (где не все y^k равны нулю), а отсюда следует, что уравнения

$$x^k = x^k(1;\ y^1,\ \ldots,\ y^n) \quad (k = 1,\ \ldots,\ n)$$

можно обратить в некоторой окрестности точки P_0 для получения $\{y^j\}$ как функций от $\{x^j\}$. Несколько первых членов соответствующего разложения y^k выглядят так:

$$y^k = x^k - x^k(0) + {}^1/_2\Gamma^k{}_{lm}|_0\,(x^l - x^l(0))(x^m - x^m(0)) + \ldots . \qquad (27.2.5)$$

Числа $y^1,\ \ldots,\ y^n$ называют *геодезическими* (или *римановыми*) координатами вблизи P_0.

В этих формулах коэффициенты связности $\Gamma^k{}_{lm}$ зависят от исходных координат. Соответствующие коэффициенты в геодезической системе координат будут обозначаться через $\mathring{\Gamma}^k{}_{lm}$; их значения можно вычислить следующим образом. Геодезическая задается в геодезической системе координат уравнением $y^k = y^k(\lambda) = \lambda\xi^k$, где $\xi^1, \ldots, \xi^n$ — константы; значит, $d^2y^k/d\lambda^2 = 0$, а сравнение с общим уравнением (27.2.1) (с заменой x^k на y^k, а $\Gamma^k{}_{lm}$ на $\mathring{\Gamma}^k{}_{lm}$) показывает, что на геодезической $\mathring{\Gamma}^k{}_{lm}\xi^l\xi^m = 0$ для всех λ и всех $\xi^1, \ldots$ $\ldots, \xi^n$. В силу этого в точке P_0

$$\mathring{\Gamma}^k{}_{lm} = 0 \quad \text{для всех } k,\ l,\ m \qquad (27.2.6)$$

и вообще

$$\mathring{\Gamma}^k{}_{lm}(y^1,\ \ldots,\ y^n)\, y^l y^m = 0 \quad \text{для всех } k \qquad (27.2.7)$$

во всей окрестности точки P_0, в которой определены геодезические координаты.

Замечание. За исключением плоских пространств, геодезические координаты в окрестности P_0, вообще говоря, не являются геодезическими координатами в окрестности соседней точки Q_0. Иначе говоря, прямая $y^k = \lambda\xi^k + a^k$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ координат $y^1, \ldots$ $\ldots, y^n$ в общем случае не является геодезической, если хотя бы одна из констант $a^1,\ \ldots,\ a^n$ отлична от нуля, т. е. если прямая не проходит через начало координат $\mathbb{R}^n$.

Новые координаты в окрестности P_0 пока не единственны; эту неединственность описывает следующая теорема.

Теорема. *В окрестности заданной точки P_0 произвольное преобразование координат x^i сводится к однородному линейному преобразованию соответствующих геодезических координат y^i.*

Доказательство. Пусть $x'^1, \ldots, x'^n$ — координаты в любой другой карте, содержащей P_0, а $y'^1, \ldots, y'^n$ — соответствующие геодезические координаты в окрестности P_0. Любая геодезическая $P(\lambda)$, проходящая через P_0, для которой $P(0)=P_0$, выражается в геодезических системах координат в виде

$$P(\lambda):\ y^j=\lambda\xi^j \quad \text{и} \quad y'^j=\lambda\xi'^j,$$

где ξ^j и ξ'^j — константы. С точностью до наименьшего порядка малых величин $(\lambda \approx 0)$ x^j согласованы с y^j, а x'^j с y'^j. Поэтому

$$\xi'^j=\partial x'^j/\partial x^k\,|_{P_0}\,\xi^k;$$

следовательно, для любой данной точки $P(\lambda)$ на геодезической, проходящей через P_0,

$$y'^j=\partial x'^j/\partial x^k\,|_{P_0}\,y^k, \tag{27.2.8}$$

а это и есть указанное в теореме линейное преобразование.

Упражнение

Покажите, что следующий член ряда (27.2.4) можно записать в виде

$$-(1/3!)\,\Gamma^k_{lmr}\,|_{P_0}\,y^l y^m y^r, \tag{27.2.9}$$

где

$$\Gamma^k_{lmr}=\frac{1}{3}\sum\left(\partial\Gamma^k_{mr}/\partial x^l-2\Gamma^k_{sl}\Gamma^s_{mr}\right), \tag{27.2.10}$$

причем суммирование осуществляется по циклическим перестановкам индексов l, m и r. Члены высшего порядка с коэффициентами $\Gamma^k_{lm\ldots v}$ обсуждаются у Эйзенхарта [1926].

В случае римановых и псевдоримановых многообразий, когда коэффициенты связности получаются при помощи метрического тензора как $\Gamma^k_{lm}=\left\{ {k \atop l\ m} \right\}$, где $\left\{ {k \atop l\ m} \right\}$ заданы формулами (26.6.10), (26.6.11), из (27.2.6) следует, что первые частные производные метрического тензора равны нулю в начале геодезических координат, потому что

$$\partial g_{km}/\partial x^l=[kl,\ m]+[ml,\ k].$$

27.3. НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ В РИМАНОВЫХ И ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

При наличии метрического тензора можно еще больше упростить работу с геодезическими координатами, если подобрать такое линейное преобразование координат y^i, что в точке P_0

$$(g_{jk}) = \begin{pmatrix} +1 & & & & & & & \\ & +1 & & & & & (0) & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & +1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & (0) & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix} \qquad (27.3.1)$$

(в случае римановых многообразий у всех ненулевых членов будет знак $+$.

Это можно сделать следующим образом. Сначала можно преобразовать y^i при помощи ортогональной матрицы так, чтобы матрица (g_{jk}) стала в точке P_0 диагональной. Пусть диагональными элементами являются числа $d_1, \ldots, d_n$, где первыми идут положительные числа (и все $d_i \neq 0$). Затем сделаем еще одно преобразование $y'^i = \sqrt{|d_i|}\, y^i$ (здесь соглашение о суммировании не используется), после которого матрица (g_{jk}) примет указанную выше стандартную форму.

Такие y^i единственны с точностью до ортогонального преобразования (вращения, возможно, с инверсией) в случае римановых многообразий и с точностью до преобразования Лоренца в случае псевдоримановых многообразий. Эти числа y^i называются *нормальными*, или *нормальными геодезическими*, или *нормальными римановыми координатами*.

Если риманово многообразие погрузить как n-мерную поверхность S в евклидово пространство E^N большей размерности, как это описано в § 26.4, то нормальные координаты совпадают с декартовыми координатами n-мерной гиперплоскости, касательной к S в точке P_0; поверхность проектируется на эту гиперплоскость так, что геодезические, проходящие через P_0, переходят в касательные линии, а длины вдоль геодезических переходят в длины вдоль касательных.

(В некоторых старых книгах любые координаты, в которых первые частные производные от g_{jk} в точке P_0 обращаются в нуль, называются геодезическими координатами в окрестности P_0.)

27.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ. ПРИНЦИП ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Геометрия имеет дело с точками и линиями, а также с объектами, построенными из них; в частности, она имеет дело с пространствами точек, в которых выделены определенные множества точек, называемые прямыми или геодезическими. В рассматриваемых здесь геометриях предполагается также, что такое пространство является n-мерным континуумом в том смысле, что он обладает топологическими свойствами n-мерного многообразия.

Основным геометрическим понятием является *конгруэнтность* (сравнимость) [1]. Обычно имеется некоторая группа преобразований пространства, называемая *группой конгруэнтности*; преобразования, входящие в эту группу, сохраняют геометрические соотношения. В качестве примеров можно указать группу движений в евклидовом пространстве и группу Пуанкаре (неоднородную группу Лоренца) в пространстве Минковского. О двух фигурах (множествах точек) говорят как о *конгруэнтных*, если одну фигуру можно преобразовать в другую при помощи некоторого преобразования этой группы. (В «Эрлангенской программе» Феликса Клейна (1872 г.) господствует противоположная точка зрения: когда на пространстве задается группа преобразований, она служит для определения геометрии, состоящей из тех отношений, которые сохраняются при этих преобразованиях.)

По аналогии с геометриями Евклида и Минковского можно предполагать, что в пространстве с метрическим тензором g_{jk} группа конгруэнтности должна состоять из тех преобразований, при которых тензор g_{jk} сохраняет свои значения. Однако в большинстве случаев таких преобразований вообще нет (за исключением тождественного преобразования), если только пространство не является плоским или не имеет постоянную кривизну. Следовательно, в большинстве случаев нет и обычного понятия конгруэнтности.

Для очень малых фигур можно определить приближенное понятие конгруэнтности. Рассмотрим сначала риманово многообразие. Пусть $y^1, \ldots, y^n$ — нормальные координаты в окрестности точки P_0, а $w^1, \ldots, w^n$ — нормальные координаты в окрестности другой точки Q_0. Пусть ψ — отображение окрестности P_0 в окрестность Q_0, задаваемое приравниванием соответствующих нормальных координат (т. е. точка P с координатами $y^1, \ldots, y^n$ отображается в точку Q с координатами $w^1, \ldots, w^n$, если $y^i = w^i$, $i = 1, \ldots, n$). Говорят, что малая фигура вблизи P_0 приближенно конгруэнтна малой фигуре вблизи Q_0, если первая фигура отображается преобразованием ψ во вторую.

Так как система нормальных координат единственна с точностью до ортогональных преобразований, в результате получается прибли-

[1] Отношение эквивалентности геометрических фигур. — *Прим. перев.*

женно евклидова геометрия. Геодезические, проходящие через P_0, переходят при ψ в геодезические, проходящие через Q_0; легко убедиться в том, что угол между двумя такими геодезическими (см. формулу ниже) при этом отображении сохраняется. (Геодезические, не проходящие через P_0, обычно не переходят в геодезические, если пространство не является плоским.)

Если в точке P_0 пересекаются три или несколько гладких кривых, то звезда, образованная в P_0 их касательными векторами, отображается в аналогичную звезду в Q_0 с сохранением всех углов. Если P_0AB — маленький треугольник с вершиной P_0, т. е. если P_0A, P_0B и AB — короткие геодезические, то его образ при отображении ψ есть фигура Q_0CD, где Q_0C и Q_0D — геодезические с теми же длинами, что и P_0A и P_0B, а CD — почти геодезическая, если треугольник мал, и имеет длину, почти равную длине AB. Если P_0 и Q_0 — одна и та же точка, а y^k и w^k — две системы нормальных координат около этой точки, то конгруэнтности определяются вращениями и отражениями, оставляющими точку P_0 на месте.

Углы определяются по формуле для углов в криволинейных координатах евклидова пространства. Если в точке с координатами $x^i(\lambda_0)=\overline{x}^i(\mu_0)$ пересекаются две гладкие кривые $x^i=x^i(\lambda)$ и $x^i=\overline{x}^i(\mu)$, то соответствующие их направления в этой точке задаются касательными векторами $\xi^i=\dot{x}^i(\lambda_0)$, $\overline{\xi}^i=\dot{\overline{x}}^i(\mu_0)$, а угол θ между этими направлениями определяется формулой

$$\cos\theta=g_{jk}\xi^j\overline{\xi}^k/(\|\xi\|\|\overline{\xi}\|), \tag{27.4.1}$$

где

$$\|\xi\|=|g_{jk}\xi^j\xi^k|^{1/2}, \quad \|\overline{\xi}\|=|g_{jk}\overline{\xi}^j\overline{\xi}^k|^{1/2}. \tag{27.4.2}$$

Знаки абсолютной величины в (27.4.2) здесь не являются необходимыми и включены в запись формул лишь для последующего их использования в случае псевдоримановых многообразий.

Аналогичные рассуждения применимы и к псевдоримановым многообразиям. Как и выше, пусть $y^1, \ldots, y^n$ и $w^1, \ldots, w^n$ — нормальные координаты в окрестностях точек P_0 и Q_0 соответственно, т. е. геодезические координаты, в которых метрический тензор имеет стандартную форму (27.3.1). Эти координаты единственны только с точностью до преобразований Лоренца; следовательно, получается приближенная геометрия Минковского, а не геометрия Евклида. При отображении ψ, задаваемом как и ранее, условием $w^i=y^i$, геодезические, проходящие через P_0, отображаются в геодезические, проходящие через Q_0, причем с сохранением их типа (пространственноподобные, нулевые или временноподобные) и с сохранением угла между двумя геодезическими, задаваемого формулой (27.4.1). Теперь, однако, $\cos\theta$ может быть или больше 1, или меньше —1, значит, θ может быть мнимым.

Если же ξ (или $\bar{\xi}$) — нулевой вектор, то $\cos\theta$ принимает бесконечное или неопределенное значение в зависимости от того, отлична от нуля величина $g_{jk}\xi^j\bar{\xi}^k$ или нет.

Следует заметить, что, даже если ξ и $\bar{\xi}$ — оба пространственноподобные или оба временноподобные векторы, значение $\cos\theta$, получаемое по (27.4.1), может оказаться вне интервала $[-1, 1]$.

Упражнение

Покажите, что необходимое и достаточное условие для того, чтобы $|\cos\theta| < 1$, состоит в том, чтобы все линейные комбинации ξ и $\bar{\xi}$ были пространственноподобными (или все временноподобными). Если $\cos\theta = \pm 1$, то найдется нулевой вектор вида $a\xi + b\bar{\xi}$ с ненулевыми a и b. (В римановом многообразии этот нулевой вектор — вектор с нулевыми компонентами, поэтому $\bar{\xi}$ представляет собой произведение ξ на скаляр.)

Для фигур в аффинно связном многообразии углы и длины не определены; тем не менее существуют некоторые геометрические соотношения, инвариантные относительно преобразования ψ, заданного выше условием $y^i = w^i$. Здесь y^i и w^i — произвольные геодезические координаты, никакого понятия нормальных координат нет и геодезические координаты определяются с точностью до невырожденных линейных или аффинных преобразований. Например, если ξ, $\bar{\xi}$ и $\bar{\bar{\xi}}$ — векторы, касательные в точке P_0 к трем кривым, и если $\bar{\bar{\xi}}$ лежит в той же плоскости, что и векторы ξ и $\bar{\xi}$, т. е. если эти три вектора линейно зависимы, то это же верно и после преобразования. В действительности при отображении ψ сохраняется любое соотношение вида $\bar{\bar{\xi}} = a\xi + b\bar{\xi}$ при заданных a и b. И вообще любое множество таких векторов линейно зависимо тогда и только тогда, когда линейно зависимо множество их образов при отображении ψ.

Геометрическое понятие *параллельного смещения* или *параллельного переноса* вдоль кривой, которое будет описано в § 27.7, было введено Леви-Чивитой в 1917 г. Идея такова: в плоских геометриях — евклидовой, Минковского или аффинной, — где группа конгруэнтности (в декартовых координатах) состоит из преобразований вида

$$\mathbf{x} \longrightarrow M\mathbf{x} + \mathbf{a},$$

где M — ортогональная, лоренцева или произвольная невырожденная матрица, особую роль играет подгруппа чистых сдвигов (трансляций)

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}.$$

(Заметим, что в случае пространства Минковского сюда не включается никакое относительное *движение*, кроме смещения.) А именно, если одна фигура может быть отображена в другую при помощи чистого сдвига, то об этих фигурах говорят не только как о конгруэнтных, но и как об имеющих одну и ту же *ориентацию* в пространстве или как о переводимых одна в другую параллельным смещением. В искривленном пространстве этому понятию параллельного смещения соответствует понятие параллельного переноса малой фигуры вдоль кривой с получением, однако, обычно разных результатов в зависимости от выбора кривой, связывающей начальную и конечную точки.

Наш подход к этим вопросам обусловлен аналогией с принципом эквивалентности общей теории относительности, согласно которому некоторые ее законы можно сформулировать просто утверждением, что соответствующие законы специальной теории относительности выполняются в инерциальной системе отсчета (системе «свободного падения»). Системы геодезических координат в окрестности точки играют роль инерциальных систем. Например, параллельный перенос вектора вдоль кривой будет определен так, что в момент прохождения вектора через точку P кривой его компоненты, соответствующие y^i (где $y^1, \ldots, y^n$ — геодезические координаты в окрестности P), почти не изменяются, т. е. имеют нулевые производные по параметру кривой.

27.5. КОВАРИАНТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В этом и двух следующих параграфах обсуждаются три тесно связанных понятия (ковариантное дифференцирование, абсолютное дифференцирование и параллельный перенос), любое из которых можно принять за основное, а остальные вывести из него. Мы рассматриваем здесь аффинно связное многообразие общего вида.

Частные производные компонент тензора преобразуются подобно компонентам тензора ранга, на единицу большего, но только в случае *линейных* преобразований, а в случае более общих преобразований изменяются по другому закону. Например, на евклидовой плоскости векторное поле с постоянными декартовыми компонентами имеет переменные компоненты в полярной системе координат; поэтому то, что частные производные по r и θ компонент этого вектора не обращаются в нуль, является особенностью системы координат r, θ. Чтобы исключить явления такого рода, мы определим некоторый тензор более высокого ранга, задавая его компоненты в любой точке P в *геодезической* системе координат в окрестности этой точки как соответствующие частные производные; тогда для вычисления компонент этого тензора в других системах координат нужно использовать законы преобразования тензоров.

Пусть P: $x^i = a^i$ — произвольная точка, и пусть $y^1, \ldots, y^n$ — соответствующие геодезические координаты. Как и в § 27.2,

$$x^i = a^i + y^i - {}^1/_2 \Gamma^i{}_{jk} y^j y^k + \ldots, \qquad (27.5.1)$$

$$y^i = x^i - a^i + {}^1/_2 \Gamma^i{}_{jk} (x^j - a^j)(x^k - y^k) + \ldots . \qquad (27.5.2)$$

В этих равенствах коэффициенты связности относятся к системе координат x^i и их следует вычислять в точке P. Пусть $v_i(x^1, \ldots, x^n)$ — произвольное ковариантное векторное поле; обозначим его компоненты в геодезической системе координат через $\overset{\circ}{v}_i(y^1, \ldots, y^n)$. Ковариантный тензор второго ранга $v_{i;\,j}$ — *ковариантная производная* вектора v_i — определяется (в точке P) заданием его компонент в системе координат y^j:

$$\overset{\circ}{v}_{i;\,j}|_P = \partial\overset{\circ}{v}_i/\partial y^j|_P \quad (i,\ j = 1,\ \ldots,\ n). \tag{27.5.3}$$

Найдем вид этого равенства в системе x^i. В точке P мы имеем $\overset{\circ}{v}_i = v_i$ и $\overset{\circ}{v}_{i;\,j} = v_{i;\,j}$, потому что в точке P $\partial x^i/\partial y^j = \delta_{ij}$. Однако $\overset{\circ}{v}_i$, находящиеся в правой части равенства (27.5.3), нужно знать не только в точке P, но и вблизи нее (для выполнения дифференцирования). Вблизи P

$$\overset{\circ}{v}_i = v_k\, \partial x^k/\partial y^i;$$

поэтому

$$v_{i;\,j}|_P = \overset{\circ}{v}_{i;\,j}|_P = \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\left(v_k \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right)\right)_P = \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^l}\frac{\partial x^l}{\partial y^j}\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right)_P + v_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^j\,\partial y^i}\bigg|_P.$$

В точке P $\partial x^l/\partial y^j = \delta_{lj}$ и т. д., а вторая производная равна $-\Gamma^k_{ij}$ (по 27.5.1). Поэтому

$$v_{i;\,j} = \partial v_i/\partial x^j - \Gamma^k_{ij} v_k \tag{27.5.4}$$

(просуммировано по k); это и есть правило ковариантного дифференцирования в произвольной координатной системе; $v_{i;\,j}(x^1, \ldots, x^n)$ образуют дважды ковариантное тензорное поле.

Это правило показывает, что если тензор $v_{i;\,j}$ определяется в точке P формулой (27.5.3) в частной геодезической системе координат в окрестности P, то он правильно определяется тем же равенством и в любой другой геодезической системе в окрестности P. Действительно, если x^i — геодезические координаты, то $\Gamma^k_{ij} = 0$ в P и (27.5.4) согласуется с (27.5.3).

Непосредственным применением ковариантного дифференцирования получаем, что если v_i — градиент скаляра f в евклидовом пространстве, то лапласиан от f в произвольной криволинейной системе координат имеет вид

$$g^{ij} v_{i;\,j} = g^{ij}\left(\partial^2 f/\partial x^i\,\partial x^j - \Gamma^k_{ij}\,\partial f/\partial x^k\right),$$

поскольку эта величина является скаляром (т. е. инвариантом) и, очевидно, равна лапласиану от f в декартовой системе координат.

Упражнение

1. (а) Покажите, что если $v^i = v^i(x^1, \ldots, x^n)$ — контравариантное векторное поле, то формула

$$v^i{}_{;j} = \partial v^i/\partial x^j + \Gamma^i_{jk} v^k \tag{27.5.5}$$

определяет смешанный тензор второго ранга. (б). Покажите, что если T_{ij} — ковариантное тензорное поле второго ранга, то формула

$$T_{ij;\,k} = \partial T_{ij}/\partial x^k - \Gamma^l_{ik} T_{lj} - \Gamma^l_{jk} T_{il} \tag{27.5.6}$$

определяет ковариантное тензорное поле третьего ранга.

Ковариантная производная тензора общего вида имеет один дополнительный член (в дополнение к частной производной), как в (27.5.4), для каждого ковариантного индекса и один дополнительный член, как в (27.5.5), для каждого контравариантного индекса. Ковариантная производная скалярного поля f есть просто его градиент: $f_{;\,k} = df/dx_k$.

Операция ковариантного дифференцирования обеспечивает основу для инвариантной формулировки теорий поля и вообще для тех физических теорий, в которых встречаются уравнения с частными производными.

Упражнение

2. Покажите, что эта операция удовлетворяет правилу дифференцирования произведения. Для начала убедитесь в том, что если T_{ij} в (27.5.6) равно $v_i w_j$, то

$$(v_i w_j)_{:k} = v_{i;\,k} w_j + v_i w_{j;\,k}. \tag{27.5.7}$$

После этого докажите, что если $T^{\cdots}_{\cdots}$ и $S^{\cdots}_{\cdots}$ — произвольные тензоры, то

$$(T^{\cdots}_{\cdots} S^{\cdots}_{\cdots})_{;\,k} = T^{\cdots}_{\cdots;\,k} S^{\cdots}_{\cdots} + T^{\cdots}_{\cdots} S^{\cdots}_{\cdots;\,k}, \tag{27.5.8}$$

где указанное произведение может быть как внешним, так и произвольным внутренним произведением, т. е. свернутым произвольное число раз.

Замечание. В старой литературе ковариантное дифференцирование обозначали часто запятой вместо точки с запятой. Теперь запятой чаще обозначают обычную частную производную, так что $v_{i;\,j} = v_{i,\,j} - \Gamma^l_{ij} v_l$.

Упражнение

3. Покажите, что в римановом или псевдоримановом многообразии метрический тензор ведет себя по отношению к ковариантному дифференцированию как константа, т. е.

$$g_{ij;\,k} = 0, \quad g^{ij}{}_{;\,k} = 0, \quad \delta^i{}_{j;\,k} = 0. \tag{27.5.9}$$

(Напомним, что в этих многообразиях $\Gamma^i_{jk} = \left\{ {}_j{}^i{}_k \right\}$.)

Как следствие этого упражнения получаем, что ковариантное дифференцирование коммутирует с поднятием и опусканием индексов: если $v_i = g_{ij} v^j$, то $v_{i;\,k} = g_{ij} v^j{}_{;\,k}$.

Следует заметить, что результат последовательных ковариантных дифференцирований обычно не симметричен по соответствующим индексам: $v_{j;\,k;\,l} \neq v_{j;\,l;\,k}$; исключением служит случай плоского пространства, где в декартовых координатах оба этих выражения сводятся к $\partial^2 v_j/\partial x^k \partial x^l$. Эта асимметрия — следствие внутренней кривизны пространства и появляется ниже (в § 27.9) в определении тензора кривизны Римана.

27.6. АБСОЛЮТНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ВДОЛЬ КРИВОЙ

Пусть $\mathscr{C}$: $P = P(\lambda)$ — гладкая кривая, произвольным образом параметризованная и заданная в римановом, или псевдоримановом, или аффинно связном многообразии, и пусть дано векторное или тензорное поле, определенное по меньшей мере на $\mathscr{C}$. Мы хотим определить другой вектор (или тензор) на $\mathscr{C}$ так, чтобы в каждой точке $\mathscr{C}$ он описывал скорость изменения первого вектора (или тензора) относительно λ, причем в некотором абсолютном (инвариантном) смысле.

Предположим, что $\mathscr{C}$ лежит в координатной карте $\{U, \varphi, N\}$ и описывается уравнением $x^i = x^i(\lambda) = \varphi^i(P(\lambda))$; предположим также, что $v_i(\lambda)$ — компоненты ковариантного вектора, определенного на $\mathscr{C}$ в той же системе координат. Определим другой ковариантный вектор $w_i(\lambda)$, который представляет скорость изменения $v_i(\lambda)$. Очевидно, мы не можем написать просто $w_i(\lambda) = dv_i(\lambda)/d\lambda$, потому что эти величины преобразуются не по тензорному закону. Поэтому мы применяем здесь принцип эквивалентности. Пусть $P_0 = P(\lambda_0)$ — точка на $\mathscr{C}$, а $y^1, \ldots, y^n$ — геодезические координаты в окрестности P_0, совпадающие с x^i с точностью до первого порядка. Пусть $\mathring{v}_i(\lambda)$ — компоненты v_i в геодезической системе координат; $\mathring{v}_i(\lambda) = v_i(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$, но это равенство обычно не выполняется при $\lambda \neq \lambda_0$. Положим

$$w_i(\lambda_0) = d\mathring{v}_i(\lambda)/d\lambda\,|_{\lambda=\lambda_0},$$

а затем преобразуем это равенство в исходную систему координат; при $\lambda = \lambda_0$ мы получим, что

$$w_i(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\left(v_k(\lambda)\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\right) = \frac{dv_k(\lambda)}{d\lambda}\frac{\partial x^k}{\partial y^i} + v_k(\lambda)\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^i\,\partial y^j}\frac{dy^j(\lambda)}{d\lambda}.$$

При $\lambda = \lambda_0$ x^i и y^i совпадают с точностью до первого порядка, а вторые производные, согласно (27.5.1), равны $-\Gamma^k_{ij}$. Иначе говоря,

$$w_i(\lambda) = dv_i(\lambda)/d\lambda - v_k(\lambda)\,\Gamma^k_{ij}\,dx^j(\lambda)/d\lambda.$$

Поскольку здесь уже нет геодезических координат, это равенство справедливо в любой точке $\mathscr{C}$ и в любой системе координат. Обычно w_i обозначают через $\delta v_i/\delta\lambda$ и называют *абсолютной про-*

изводной от v_i *вдоль* $\mathscr{C}$, т. е. вдоль кривой $\mathscr{C}$:

$$\delta v_i/\delta\lambda = dv_i/d\lambda - \Gamma^k_{ij} v_k\, dx^j/d\lambda. \qquad (27.6.1)$$

Если векторное поле v_i задано не только на $\mathscr{C}$, но и в некоторой области, содержащей $\mathscr{C}$, то

$$\delta v_i/\delta\lambda = v_{i;\,j}\, dx^j/d\lambda. \qquad (27.6.2)$$

Абсолютные производные вдоль $\mathscr{C}$ от других тензоров определяются аналогично, как это делалось и для ковариантных производных. Например, если на $\mathscr{C}$ задан контравариантный вектор v^i, то

$$\delta v^i/\delta\lambda = dv^i/d\lambda + \Gamma^i_{jk} v^j\, dx^k/d\lambda. \qquad (27.6.3)$$

Для абсолютного дифференцирования, как и для ковариантного, справедлива формула дифференцирования произведения, метрический тензор ведет себя как константа и абсолютная производная скаляра f является обычной производной $df/d\lambda$ (т. е. другим скаляром).

В частности, если v^i — *касательный к* $\mathscr{C}$ *вектор*, задаваемый равенством

$$v^i(\lambda) = dx^i/d\lambda,$$

то сравнение (27.6.3) с уравнением геодезической (26.12.3) показывает, что $\delta v^i/\delta\lambda = 0$ на $\mathscr{C}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{C}$ является геодезической, а λ — натуральный параметр. В этом смысле геодезическую можно трактовать как кривую, касательный вектор к которой является константой на всем ее протяжении.

27.7. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС

В § 27.4 уже упоминалась задача о параллельном переносе. Нам нужно для вектора, заданного в точке P_0 кривой $\mathscr{C}$, определить вектор в любой другой точке кривой так, чтобы его можно было считать полученным из данного вектора путем параллельного смещения вдоль кривой. Согласно принципу эквивалентности, если взять любую другую точку P_1 кривой и любую систему геодезических координат в окрестности P_1, то компоненты вектора относительно этой системы координат должны оставаться неизменными при переходе через точку P_1. Иначе говоря, абсолютная производная вектора вдоль кривой $\mathscr{C}$ должна быть равна нулю. Поэтому если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — компоненты данного вектора в P_0, то преобразованный вектор в любой точке $P(\lambda)$ кривой получается как решение $v_i(\lambda)$ задачи с начальными данными

$$\delta v_i(\lambda)/\delta\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \mathscr{C}, \quad v_i(\lambda_0) = \xi_i, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (27.7.1)$$

Заметим, что если вектор $v_i(\lambda)$ преобразуется при переходе к другой системе координат $x'^1, \ldots, x'^n$, то он снова оказывается решением соответствующей задачи с начальными данными

$$\delta v'_i/\delta\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \mathscr{C}, \quad v'_i(\lambda_0) = \xi'_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где ξ'_i получаются из ξ_i в соответствии с законом преобразования для вектора в P_0. Вот почему $\delta v_i/\delta\lambda$ оказывается вектором, и если все его компоненты обращаются в нуль в одной системе координат, то они обращаются в нуль и в любой другой.

Аналогично определяется параллельный перенос вдоль кривой контравариантного вектора или вообще любого тензора.

Рассмотрим, в частности, риманово или псевдориманово многообразие. Поскольку $\delta g_{jk}/\delta\lambda = 0$, то для любых гладких векторнозначных функций $v^i(\lambda)$ и $w^i(\lambda)$ на $\mathscr{C}$

$$d(g_{jk}v^jw^k)/d\lambda = g_{jk}((\delta v^j/\delta\lambda)w^k + v^j\delta w^k/\delta\lambda).$$

Поэтому, если $v^j(\lambda)$ и $w^k(\lambda)$ — результат параллельного переноса двух данных векторов вдоль кривой $\mathscr{C}$, отсюда следует, что величина $g_{jk}v^jw^k$ постоянна на $\mathscr{C}$, т. е. *при параллельном переносе в римановом или псевдоримановом многообразии длины векторов и углы между ними сохраняются.*

27.8. ОРИЕНТИРУЕМОСТЬ

Если $\mathscr{C}_1$, и $\mathscr{C}_2$ — кривые, идущие от точки P к точке Q, то результат параллельного переноса вдоль $\mathscr{C}_1$ в общем случае отличается от результата параллельного переноса вдоль $\mathscr{C}_2$. Иначе говоря, параллельный перенос вдоль замкнутой кривой от P до возвращения в P в общем случае переводит каждый вектор в P в другой вектор в P. Это преобразование векторов в точке P в римановом многообразии оказывается ортогональным, потому что оно сохраняет все длины и углы. Если для всех замкнутых кривых детерминант матрицы преобразования равен $+1$, то многообразие называется *ориентируемым*. Это будет, в частности, в случае односвязности многообразия, потому что для любой замкнутой кривой, непрерывно стягиваемой в точку, указанное ортогональное преобразование непрерывно изменяется и переходит в тождественное преобразование, детерминант матрицы которого равен $+1$.

Упражнение

Лист Мёбиуса, сделанный из ровного листа бумаги без растягивания, можно рассматривать как двумерное риманово многообразие, которое может быть покрыто двумя или более координатными картами, на каждой из которых всюду $g_{jk} = \delta_{jk}$. Покажите, что это многообразие не ориентируемо.

Замечание. Ориентируемость — это топологическое, а не метрическое понятие, и его можно ввести для многообразий общего вида, для которых метрический тензор не определен. Данное выше определение было принято по той причине, что его можно обобщить на случай многообразий Эйнштейна, как это будет сейчас показано, причем в таком направлении, которое сильно отличается от топологической ориентируемости.

Если M — псевдориманово многообразие размерности $n=4$ и сигнатуры $s=2$ (как в теории относительности), то преобразование в точке P, получаемое в результате параллельного переноса векторов вокруг замкнутой кривой, начинающейся и кончающейся в P, является преобразованием Лоренца. В § 19.4 было показано, что полная группа Лоренца имеет 4 компоненты; следовательно, имеются четыре варианта рассматриваемого преобразования. Это преобразование (может быть либо собственным преобразованием Лоренца, либо включать или обращение времени, или инверсию пространства («обратный ход по пространству»), или обе последние возможности. Если для всех замкнутых путей получается собственное преобразование Лоренца, то M называют *ориентируемым по Лоренцу*. В этом случае всюду на M можно установить положительное направление времени (и отличать прошлое от будущего) и ввести правила ориентации [1]) (и отличать левые и правые системы координат или винты и спирали). Односвязное многообразие ориентируемо по Лоренцу; следовательно, любое многообразие Эйнштейна M имеет некоторое накрывающее ориентируемое по Лоренцу многообразие M' (например, его универсальное накрывающее многообразие). Поскольку M и M' локально неразличимы, в общей теории относительности нет необходимости рассматривать пространственно-временные модели, не ориентируемые по Лоренцу. (Этим наблюдением поделился с автором Липман Берс во время беседы за чашкой чая в Институте Куранта.)

Аффинно связное многообразие ориентируемо, если аффинное преобразование геодезических координат около некоторой точки, полученное путем параллельного переноса векторов вдоль замкнутой кривой, определяется матрицей с положительным детерминантом для всех таких кривых и всех точек многообразия.

27.9. ТЕНЗОР РИМАНА В ОБЩЕМ ВИДЕ. ЛАПЛАСИАН И ДАЛАМБЕРТИАН

Пусть M — аффинно связное многообразие. Как было указано в § 27.5, результат двукратного ковариантного дифференцирования векторного поля в общем случае не симметричен по соответствующим индексам. Непосредственные вычисления с использованием формул из указанного параграфа показывают, что

$$v_{j;\,k;\,l}-v_{j;\,l;\,k}=R^{i}_{jkl}v_{i}, \tag{27.9.1}$$

[1]) Вроде правила левой руки, правила правой руки, правила буравчика и т. п. В оригинале использовано жаргонное слово chirality, не имеющее аналога в русском языке.— *Прим. перев.*

где R^i_{jkl} обозначает величину

$$R^i_{jkl}=\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^i_{jl}-\frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^i_{jk}+\Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{jl}-\Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{jk}. \tag{27.9.2}$$

Так как v_i произвольно, то правило частного, примененное к (27.9.1), показывает, что n^4 величин R^i_{jkl} являются компонентами тензора четвертого ранга, называемого *тензором Римана* или *тензором кривизны Римана.*

В евклидовом пространстве тензор Римана тождественно равен нулю в любой системе координат, поскольку очевидно, что он равен нулю в декартовой системе координат, а если все компоненты тензора равны нулю в одной системе координат, то они равны нулю и в любой другой. В § 27.12 будет показано, что обращение в нуль тензора Римана также и *достаточно* для того, чтобы риманово многообразие оказалось евклидовым, псевдориманово многообразие — пространством Минковского, а аффинно связное многообразие — плоским. В каждом случае это утверждение непосредственно связано с метрикой, однако, если многообразие односвязно, его можно расширить до полного евклидова пространства, пространства Минковского или плоского пространства.

В частном случае риманова или псевдориманова многообразия, где существует метрика, а индексы можно поднимать и опускать, тензор Римана допускает другое представление; см. следующий параграф.

Если R^i_{jkl} свернуть по первому и четвертому индексам, получится *тензор Риччи*

$$R_{jk}=R^i_{jki}, \tag{27.9.3}$$

играющий важную роль в теории относительности.

Остальная часть этого параграфа посвящена лапласиану и даламбертиану (операторам Лапласа и Даламбера). Оператор Лапласа задается в евклидовом пространстве (в декартовых координатах) в виде

$$\nabla^2=\partial_1^2+\partial_2^2+\ldots+\partial_n^2,$$

где $\partial_k=\partial/\partial x^k$; оператор Даламбера задается в пространстве Минковского специальной теории относительности в виде

$$\Box^2=\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2-\partial_4^2.$$

Оба оператора можно записать в виде $g^{jk}\partial_j\partial_k$, где (g^{jk}) — диагональный метрический тензор. В физических теориях эти операторы применяются к скалярным и векторным полям. Когда они применяются к скалярному полю f, их обобщение на случай римановых или псевдоримановых многообразий есть просто $g^{jk}f_{;j;k}$, но для обобщения их применения к векторному полю v_i необходимо ввести тензор, обозначаемый через $v_{i;jk}$ и называемый *вторым* *симметрическим расширением* v_i (см. Томас [1961]), компоненты которого задаются в начале P системы геодезических координат $y^1, \ldots, y^n$ как

$$v_{j;\,kl}\,|_P = \partial^2 \mathring{v}_j / \partial y^k \partial y^l\,|_P, \tag{27.9.4}$$

где $\mathring{v}_j(y^1, \ldots, y^n)$ — компоненты векторного поля v_j, выраженные через геодезические координаты. Согласно приведенному ниже упражнению 4, в общем случае этот тензор не совпадает с результатом симметризации второй ковариантной производной $v_{j;\,k;\,l}$ по индексам k и l. В соответствии с принципом эквивалентности мы определяем операторы Лапласа и Даламбера в применении к векторному полю v_j как

$$g^{kl} v_{j;\,kl}, \tag{27.9.5}$$

а не через вторую ковариантную производную (см., однако, упражнение 3 в следующем параграфе).

Симметричные расширения более высоких порядков определяются аналогично, например,

$$v_{j;\,klm}\,|_P = \partial^3 \mathring{v}_j / \partial x^k \partial x^l \partial x^m\,|_P.$$

Упражнение

1. Покажите, что если φ — скалярное поле, то

$$\varphi_{;\,k;\,l} = \varphi_{;\,l;\,k} = \varphi_{;\,kl},$$

тогда как для ковариантного векторного поля v_j в общем случае

$$v_{j;\,k;\,l} \neq v_{j;\,l;\,k}.$$

2. Покажите, что в произвольной системе координат второе симметрическое расширение имеет вид

$$v_{j;\,kl} = \partial^2 v_j / \partial x^k \partial x^l - \Gamma^m_{kl} \partial v_j / \partial x^m - \Gamma^m_{lj} \partial v_m / \partial x_k - \Gamma^m_{jk} \partial v_m / \partial x^l - v_m \Gamma^m_{jkl}, \tag{27.9.6}$$

где Γ^m_{jkl} — коэффициенты, заданные в (27.2.10).

3. Покажите, что в начале геодезических координат

$$\partial \mathring{\Gamma}^m_{kl} / \partial y^j + \partial \mathring{\Gamma}^m_{lj} / \partial y^k + \partial \mathring{\Gamma}^m_{jk} / \partial y^l = 0, \tag{27.9.7}$$

где кружки над Γ указывают на то, что коэффициенты связности выражены через геодезические координаты $y^1, \ldots, y^n$.

4. Покажите, что для гладкого векторного поля v_j

$$v_{j;\,kl} - {}^1\!/_2\,(v_{j;\,k;\,l} + v_{j;\,l;\,k}) = {}^1\!/_6\,(R^m{}_{lkj} + R^m{}_{klj})\, v_m. \tag{27.9.8}$$

5. Покажите, что в начале геодезических координат

$$\partial \mathring{\Gamma}^m_{kl} / \partial y^j = {}^1\!/_3\,(\mathring{R}^m{}_{ljk} + \mathring{R}^m{}_{kjl}). \tag{27.9.9}$$

Последняя формула показывает, что тензор Римана содержит всю внутреннюю информацию о пространстве в непосредственной окрестности любой точки P, задаваемую коэффициентами связности и их первыми производными в P. А именно при должном выборе системы координат (геодезических координат) Γ^m_{kl} можно обратить в нуль в точке P; следовательно, они не несут никакой внутренней (не зависящей от выбора координат) информации, а все их первые производные определяются по формуле (27.9.9) тензором Римана. Подобным же образом в следующем параграфе мы покажем, что при наличии метрического тензора g_{jk} тензор Римана дает и всю внутреннюю информацию, выражаемую компонентами метрического тензора g_{jk} и их первыми и вторыми частными производными в точке P.

27.10. ТЕНЗОР РИМАНА В РИМАНОВОМ ИЛИ ПСЕВДОРИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

Предположим теперь, что на многообразии определен метрический тензор g_{kl}. Тогда коэффициенты связности Γ^i_{jl}, входящие в определение (27.9.2) тензора Римана, совпадают с символами Кристоффеля второго рода $\left\{{}_{j}{}^{i}{}_{l}\right\}$, определенными формулами (26.6.10) и (26.6.11). В этом случае непосредственные вычисления показывают, что тензор Римана R_{ijkl} (с опущенным первым индексом) можно выразить через g_{kl} и его производные:

$$R_{ijkl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\,\partial x^k}+\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\,\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\,\partial x^l}-\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\,\partial x^k}\right)+$$
$$+g^{pq}\left([jk,\ p][il,\ q]-[ik,\ p][jl,\ q]\right), \qquad (27.10.1)$$

где квадратные скобки обозначают символы Кристоффеля первого рода (см. (26.6.10)).

Число независимых компонент этого тензора меньше n^4, потому что из формулы (27.10.1) вытекают следующие свойства симметрии:

$$R_{ijkl}=-R_{jikl}=-R_{ijlk}=R_{klij}, \qquad (27.10.2)$$
$$R_{jikl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0. \qquad (27.10.3)$$

На основании этих соотношений мы сейчас покажем, что число независимых компонент тензора Римана равно

$$n^2(n^2-1)/12, \qquad (27.10.4)$$

что для размерностей $n=2$, 3, 4 составляет соответственно 1, 6, 20. Действительно, из трех соотношений (27.10.2) следует, что ненулевые компоненты можно записать (с заменой знака, если нужно) в виде R_{ijkl} с $i<j$ и $k<l$, причем если (ij) и (kl) рассматривать как двузначные n-ичные целые числа, то $(ij)\leqslant(kl)$. Число допустимых значений (ij) или (kl) равно тогда $n(n-1)/2=m$, а число допустимых пар (ij), (kl) есть

$$m(m+1)/2=n(n-1)(n^2-n+2)/8. \qquad (27.10.5)$$

Далее, если не все i, j, k и l различны, то (27.10.3) сводится к некоторой комбинации предыдущих тождеств (27.10.2), а если они различны, то можно без потери общности предположить, что $i<j<k<l$, так как для любой перестановки i', j', k', l' величин i, j, k, l тождество (27.10.3) для i, j, k, l можно получить из этого же тождества для i', j', k', l', используя тождества (27.10.2). Поэтому число независимых тождеств типа (27.10.3) равно $n(n-1)(n-2)\times\times(n-3)/4!$, а вычитание его из (27.10.5) как раз и дает (27.10.4). Можно доказать, что R_{ijkl} не удовлетворяет никаким другим алгебраическим тождествам, не зависимым от (27.10.2) и (27.10.3).

Как было указано в предыдущем параграфе, свернутый один раз тензор Римана $R^i{}_{jkl}$ дает тензор Риччи

$$R_{jk}=R^l{}_{jkl}. \tag{27.10.6}$$

В римановом или псевдоримановом многообразии этот тензор симметричен: $R_{jk}=R_{kj}$. Двойная свертка тензора Риччи с метрическим тензором дает *скалярную кривизну Римана*

$$R=g^{jk}R_{jk}. \tag{27.10.7}$$

Ковариантная производная тензора Римана удовлетворяет *тождеству Бианки*

$$R_{ijkl;\,m}+R_{ijlm;\,k}+R_{ijmk;\,l}=0, \tag{27.10.8}$$

что легко проверить на основании (27.10.1), если воспользоваться геодезическими координатами в окрестности любой точки, поскольку в них ковариантные производные становятся обычными производными в этой точке.

Внутреннее произведение последнего равенства и $g^{ik}g^{jl}$ имеет вид

$$-R_{;\,m}+R^k{}_{m;\,k}+R^l{}_{m;\,l}=0.$$

Здесь второе и третье слагаемые равны между собой, а первое в точности совпадает с $-\partial R/\partial x_m$. Отсюда следует, что симметрический тензор

$$L_{jk}=R_{jk}-Rg_{jk}, \tag{27.10.9}$$

фигурирующий в уравнении поля Эйнштейна, имеет нулевую дивергенцию:

$$L^j{}_{k;\,j}=0, \quad L_j{}^k{}_{;\,k}=0. \tag{27.10.10}$$

Рассмотрим теперь кратко условия, при которых аффинно связное многообразие можно превратить в риманово многообразие путем введения метрики, согласованной со связностью, т. е. условия, при которых для заданных коэффициентов связности $\Gamma^r_{kl}(x^1, \ldots, x^n)$ $(\Gamma^r_{kl}=\Gamma^r_{lk})$ найдутся такие функции $g_{kl}(x^1, \ldots, x^n)$

(для которых $g_{kl}=g_{lk}$), что $\Gamma^r_{kl}=\{k^r l\}$, т. е. такие, что

$$\Gamma^r_{kl}=\frac{1}{2}g^{rm}\left(-\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{km}}{\partial x^l}\right), \qquad (27.10.11)$$

где, как всегда, (g^{rm})—матрица, обратная к матрице (g_{rm}). Это равенство можно разрешить относительно $\partial g_{ks}/\partial x^l$ и получить

$$\partial g_{ks}/\partial x_l=g_{rs}\Gamma^r_{kl}+g_{rk}\Gamma^r_{sl} \qquad (27.10.12)$$

По определению ковариантной производной это равенство в точности совпадает с равенством $g_{ks;\,l}=0$, которое, как известно, и должно выполняться в римановом или псевдоримановом многообразии. Поэтому необходимое и достаточное условие существования метрики, согласующейся со связностью, состоит в том, чтобы система уравнений (27.10.12) имела какое-нибудь решение $g_{kl}(x^1, \ldots, x^n)$.

Упражнение

1. Покажите, что из условия согласованности метрики и связности, выражаемого уравнением (27.10.12), следует, что если его решение g_{kl} существует, то оно удовлетворяет равенству

$$R^r{}_{kjl}g_{rs}+R^r{}_{sjl}g_{rk}=0, \qquad (27.10.13)$$

которое в точности совпадает с первым из соотношений (27.10.2). При помощи ковариантного дифференцирования получите из этого равенства остальные соотношения.

2. Рассмотрим многообразие, в котором аффинная связность задана формулой

$$\Gamma^i_{j2}(x^1, \ldots, x^n)=\Gamma^i_{2j}(x^1, \ldots, x^n)=\delta^i_j x^1;$$

$$\Gamma^i_{jk}=0 \text{ во всех остальных случаях.}$$

Покажите, что для этого многообразия в начале координат нет симметрического решения уравнения (27.10.13); покажите также, что тензор Риччи не симметричен: $R_{12}\neq R_{21}$.

3. Покажите, что если в римановом или псевдоримановом многообразии тензор Риччи R_{ij} равен нулю (как в случае пустого пространства-времени общей теории относительности), то два естественных определения операторов Лапласа и Даламбера, когда они применяются к векторному полю, совпадают:

$$g^{kl}v_{j;\,kl}=g^{kl}v_{j;\,k;\,l}.$$

Иначе говоря, как было указано в предыдущем параграфе, мы получаем для выражения в левой части этого равенства правильное представление в начале геодезических координат.

4. Покажите, что в римановом или псевдоримановом многообразии в начале геодезических координат

$$\partial^2\mathring{g}_{jk}/\partial y^l\,\partial y^m=-{}^1/_3(\mathring{R}_{jklm}+\mathring{R}_{kljm})=$$
$$=-{}^1/_3(\mathring{R}_{jklm}+\mathring{R}_{jmkl}). \qquad (27.10.14)$$

Отсюда следует, что тензор Римана содержит всю информацию о геометрии в малой окрестности любой точки, задаваемую метрическим тензором и его первыми и вторыми частными производными в этой точке, потому что найдется такая система координат (геодезических), что в этой точке выполняются стандартные равенства $g_{jk}=\delta_{jk}$ и $\partial g_{jk}/\partial x^l=0$; следовательно, в этой системе координат эти величины никакой информации не содержат, тогда как вторые производные получаются из приведенного выше уравнения.

27.11. ТЕНЗОР РИМАНА И ВНУТРЕННЯЯ КРИВИЗНА МНОГООБРАЗИЯ

Предположим, что n-мерное многообразие M погружается в евклидово пространство E^N (т. е. рассматривается как n-мерная поверхность в нем) с наследуемой из E^N метрикой. Тогда геометрия M включает как внутренние, так и внешние аспекты; под первыми понимаются такие свойства, которые определяются метрическим тензором на M и не зависят от конкретного способа погружения M в E^N. (Например, плоский лист из нерастяжимого мате-

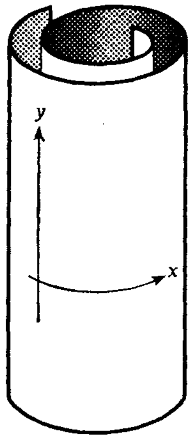

Рис. 27.1.

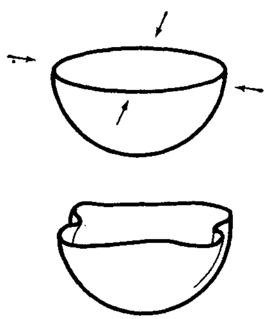

Рис. 27.2.

риала можно свернуть так, как показано на рис. 27.1, и тогда его наследуемая метрика будет совпадать с метрикой евклидовой плоскости.) Геодезическая в M является обычно некоторой кривой в E^N, и ее кривизна оказывается внешним свойством: центр кривизны лежит вне M.

С другой стороны, кривизну того вида, которой обладает поверхность сферы, можно определить метрикой. Кривизну поверхности Земли можно в принципе определить при помощи измерений, проведенных исключительно на этой поверхности: строится большой треугольник, сторонами которого являются геодезические (наикратчайшие пути между вершинами), и измеряются площадь A треугольника и сумма Σ его углов. После этого радиус Земли вычисляется по формуле

$$A/r^2 = \Sigma - \pi. \qquad (27.11.1)$$

Очевидно, что $\Sigma - \pi$ есть угловое отклонение вектора от его первоначального направления после параллельного переноса по контуру треугольника. Можно представить себе вектор как стрелу, лежащую на палубе корабля, плывущего вокруг треугольника. Когда корабль изменяет направление своего движения в одной из вершин, совершая поворот направо на некоторый угол, стрела в это время поворачивается на тот же угол налево по отношению к направлению движения корабля до поворота.

Заметим, что поверхность, обладающую кривизной такого рода, можно погрузить в E^3 различными способами. Полусферу можно изогнуть без растяжения, деформируя экватор так, как показано на рис. 27.2. Согласно дифференциальной геометрии поверхностей в E^3, произведение двух главных радиусов кривизны в данной точке инвариантно по отношению к такого рода деформации без растяжения.

Теперь мы выведем формулу, обобщающую (27.11.1) на случай общего n-мерного аффинно связного многообразия $\boldsymbol{M}$, не обязательно погруженного в плоское пространство более высокой размерности. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — координаты на некоторой карте в $\boldsymbol{M}$. Рассмотрим какую-нибудь очень маленькую замкнутую кривую $\mathscr{C}$ в $\boldsymbol{M}$, полученную при обходе точкой x^i параллелограмма в координатном пространстве $\mathbb{R}^n$ с вершинами $x_i(0)$, $x^i(0)+a^i$, $x^i(0)+a^i+b^i$, $x^i(0)+b^i$, $x^i(0)$, где a^i и b^i — достаточно малые величины. Простые вычисления показывают, что если какой-то вектор v^i перемещается параллельным переносом вокруг $\mathscr{C}$, начиная с $v^i=\xi^i$ в первой вершине, то суммарное отклонение Δv^i равно (с точностью до наименьшего порядка малых величин)

$$\Delta v^i = {}^1/_2 \xi^j R^i{}_{jkl} (a^l b^k - a^k b^l). \tag{27.11.2}$$

Это и есть нужное обобщение формулы (27.11.1). Исходя из формулы (27.11.2) тензор Римана можно выразить через отклонения (девиации) Δv^i, полученные для различных векторов ξ^i при параллельном переносе вокруг произвольных малых петель.

Еще раз подчеркнем, что эта формула справедлива только для малых петель $\mathscr{C}$, тогда как (27.11.1) имеет место для произвольно больших треугольников. Причина этого в том, что сфера имеет постоянную кривизну. Если бы та же процедура использовалась для эллипсоида общего вида, то пришлось бы ограничиться очень малыми треугольниками.

27.12. ПЛОСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ОБРАЩЕНИЕ ТЕНЗОРА РИМАНА В НУЛЬ

Если имеются два римановых многообразия одной и той же размерности, то возникает вопрос: не являются ли они одним и тем же пространством, описанным в разных системах координат? С этим вопросом связаны глобальные топологические проблемы, а также следующая, более локальная задача. Пусть заданы две римановы метрики, каждая из которых определяется набором n^2 гладких функций

$$g_{jk}(x^1, \ldots, x^n) \quad (j, k=1, \ldots, n)$$

и

$$g'_{jk}(x'^1, \ldots, x'^n) \quad (j, k=1, \ldots, n),$$

заданных в $\mathbb{R}^n$ на областях N и N' соответственно. Найдется ли такое преобразование

$$x'^j = x'^j(x^1, \ldots, x^n) \quad (j=1, \ldots, n)$$

области N в область N' или части N в часть N', что g_{jk} преобразуется в g'_{jk} по тензорному закону для ковариантных тензоров второго ранга? Если это так, то можно считать, что эти две системы координат определяют две карты одного многообразия. В общем случае это трудный вопрос, на который, однако, можно дать полный ответ, если функции одного из наборов, скажем $g'_{jk}(\cdots)$, постоянны; в этом случае пространство оказывается евклидовым, а тензор Римана обращается в нуль.

Покажем, что, для того чтобы пространство было плоским, необходимо и достаточно равенство нулю тензора Римана. Предположим сначала, что $R^i{}_{jkl}$ равен нулю на всем аффинно связном многообразии, и покажем, что в любой односвязной области можно выбрать такие координаты $y^1, \ldots, y^n$, что соответствующие коэффициенты связности $\Gamma^i{}_{jk}$ тождественно равны нулю. При наличии метрического тензора можно подобрать такие координаты y^i, что g_{jk} всюду принимают стандартные значения $\pm\delta_{jk}$ [1]).

Пусть $x^1, \ldots, x^n$ — координаты некоторой односвязной карты; рассмотрим следующую задачу с начальными данными для ковариантного векторного поля $v_i(x^1, \ldots, x^n)$:

$$v_{i;j}=0, \quad \text{т. е.} \ \partial v_i/\partial x^j - \Gamma^k_{ij} v_k = 0, \qquad (27.12.1)$$

$$v_i(0, \ldots, 0) \ \text{задано}. \qquad (27.12.2)$$

Как известно, эта задача имеет решение при любых начальных данных (27.12.2), если выполняется условие совместности

$$\partial(\Gamma^k_{ij} v_k)/\partial x^l - \partial(\Gamma^k_{il} v_k)/\partial x^j = 0. \qquad (27.12.3)$$

Вычислив производные в этом уравнении по правилу дифференцирования произведения и еще раз использовав дифференциальное уравнение (27.12.1), мы придем к уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^k_{ij} - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^k_{il}\right) v_k + \Gamma^k_{ij}\Gamma^m_{lk} v_m - \Gamma^k_{il}\Gamma^m_{jk} v_m = 0.$$

---

[1]) В точке P_0, в которой строится геодезическая система координат, всегда $\mathring{\Gamma}^i{}_{jk}=0$ [см. (27.2.6)], а при наличии метрического тензора всегда можно добиться того, чтобы $\mathring{g}_{jk}=\pm 1$; речь идет о том, чтобы эти равенства выполнялись в окрестности P_0,— именно такое многообразие называется *плоским*.— *Прим. перев.*

После переименования немых индексов его можно записать в виде

$$R^k{}_{jli}v_k = 0,$$

где $R^k{}_{jli}$ задается формулой (27.9.2). Поскольку тензор Римана равен нулю, условие совместности выполняется. Пусть $v_i(x^1, \ldots, x^n; p)$ $(p = 1, \ldots, n)$ суть n решений задачи с начальными данными, которые получаются при задании n линейно независимых начальных векторов $v_i(0, \ldots, 0; p)$, $p = 1, \ldots, n$; для каждого из этих решений $v_{i;j} = 0$. Для каждого $p = 1, \ldots, n$ рассмотрим теперь другую задачу с начальными данными

$$\partial y(x^1, \ldots, x^n)/\partial x^i = v_i(x^1, \ldots, x^n; p),$$
$$y(0, \ldots, 0) = 0.$$

Условие совместности для этой задачи имеет вид

$$\partial v_i/\partial x^j - \partial v_j/\partial x^i = 0,$$

т. е. $v_{i;j} - v_{j;i} = 0$ (другие слагаемые ковариантных производных взаимно уничтожаются); следовательно, оно выполняется, потому что ковариантные производные равны нулю. Обозначим решения этой новой задачи с начальными данными через $y^p(x^1, \ldots, x^n)$ и возьмем новые координаты, положив $y^p = y^p(x^1, \ldots, x^n)$, $p = 1, \ldots, n$, что допустимо, поскольку в начале координат якобиан этого преобразования отличен от нуля [потому что он равен детерминанту матрицы, столбцы которой являются векторами $v_i(0, \ldots, 0; p)$, выбранные линейно независимыми]. Согласно теореме о неявной функции, в некоторой окрестности N_0 в $\mathbb{R}^n$ x^i можно выразить через y^p, так что $y^1, \ldots, y^n$ становятся новыми независимыми переменными в N_0.

Относительно новых координат векторные поля v_j имеют компоненты

$$\mathring{v}_j(y^1, \ldots, y^n; p) = v_i(x^1, \ldots, x^n; p)\,\partial x^i/\partial y^j =$$
$$= (\partial y^p/\partial x^i)\,\partial x^i/\partial y^j = \delta^p_j.$$

Так как эти векторные поля были построены таким образом, чтобы их ковариантные производные обращались в нуль, то

$$0 = \mathring{v}_{j;k} = 0 - \mathring{\Gamma}^i_{jk}\mathring{v}_i = -\mathring{\Gamma}^i_{jk}\delta^p_i = -\mathring{\Gamma}^p_{jk}.$$

Поэтому все коэффициенты связности в новых координатах равны нулю, что и утверждалось.

Предположим теперь, что многообразие является римановым или псевдоримановым и, следовательно, имеет метрический тензор. Начальные векторы $v_i(0, \ldots, 0)$ в (27.12.2) можно взять ортонормированными, так что при $\mathbf{x} = 0$

$$g^{jk}(x^1, \ldots, x^n)\,v_j(x^1, \ldots, x^n; p)\,v_k(x^1, \ldots, x^n; q) = \pm\,\delta_{pq};$$

но все g^{jk} и v_j имеют нулевые ковариантные производные, следовательно, это равенство выполняется при всех x. Метрический тензор (в контравариантной форме) в системе координат y^i имеет следующие компоненты:

$$\mathring{g}^{pq}=g^{jk}(\partial y^p/\partial x^j)\,\partial y^q/\partial x^k=g^{jk}v_j(\ldots;\ p)\ v_k(\ldots;\ q);$$

следовательно, всюду $\mathring{g}^{pq}=\pm\delta_{pq}$, а значит, и $\mathring{g}_{pq}=\pm\delta_{pq}$ всюду, что и требовалось доказать, потому что матрица $(\mathring{g}_{pq})$ является обратной к $(\mathring{g}^{pq})$.

Карта, определяемая новыми координатами $y^1, \ldots, y^n$ в $N_0\subset\subset\mathbb{R}^n$, в общем случае является только частью исходного многообразия M, однако ее можно расширить до полного плоского многообразия M', расширив N_0 до всего $\mathbb{R}^n$ и потребовав, чтобы Γ^i_{jk} и g_{kl} оставались на всем $\mathbb{R}^n$ константами. Тогда M' — точно такое же многообразие, что и M, если M было полным и односвязным.

Примером неодносвязного плоского многообразия M служит двумерный тор с углами θ и φ в качестве координат и с матрицей (g_{jk}), всюду равной единичной матрице размера 2×2. (Это, конечно, *не* наследуемая при обычном вложенни тора в E^3 метрика.) В таких случаях многообразие M' является универсальным накрывающим многообразием многообразия M.

27.13. АНАЛИЗ ЭЙЗЕНХАРТА СИСТЕМ ШТЕККЕЛЯ

Основное физическое применение риманова (точнее, псевдориманова) геометрия находит в общей теории относительности. В качестве примера приложений римановой геометрии вне общей теории относительности можно указать статью Эйзенхарта [1934] о координатных системах, приводящих к разделению переменных в волновом уравнении; при этом используются результаты предыдущего параграфа.

Если функция $\Psi=\Psi(x^1,\ldots, x^n, t)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$(\nabla^2-(1/c^2)\,\partial^2/\partial t^2)\,\Psi+V\Psi=0, \qquad (27.13.1)$$

где ∇^2 есть n-мерный лапласиан, а $V=V(x^1, \ldots, x^n)$ — заданная скалярная функция, то, поскольку V не зависит от t, первым шагом процесса разделения переменных всегда может быть поиск решения вида

$$\Psi=\psi(x^1, \ldots, x^n)\,e^{i\omega t}; \qquad (27.13.2)$$

очевидно, что $\psi(x^1, \ldots, x^n)$ удовлетворяет *приведенному волновому уравнению*

$$\nabla^2\psi+(\lambda+V)\,\psi=0, \qquad (27.13.3)$$

где $\lambda=\omega^2/c^2$. Такое же уравнение получается и из уравнения Шредингера. В случае общих криволинейных координат $x^1, \ldots, x^n$ лапласиан можно записать в виде $g^{ij}\psi_{;\,i;\,j}$, если, конечно, известен метрический тензор; тогда приведенное волновое уравнение принимает вид

$$g^{ij}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i \partial x^j}-\left\{ {k \atop i\ j} \right\}\frac{\partial\psi}{\partial x^k}\right]+(\lambda+V)\psi=0. \qquad (27.13.4)$$

Можно ли решить это уравнение методом разделения переменных или нет — это зависит от вида функций $g_{ij}(\ldots)$ и $V(\ldots)$.

В методе разделения переменных (см., например, Морс и Фешбах [1953]) обычно начинают с рассмотрения частных решений в виде произведения

$$\psi(x^1, \ldots, x^n)=X_1(x^1)X_2(x^2)\ldots X_n(x^n).$$

После подстановки этого произведения в (27.13.4) оказывается, что при определенном выборе координатной системы (а следовательно, и g_{ij}) и функции V получается система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по одному для каждой из функций X_i, зависящая от n неопределенных так называемых констант разделения, первой из которых является постоянная λ из приведенного выше уравнения. Таким образом получается достаточно большое семейство частных решений (зависящих от констант разделения и от констант интегрирования, появляющихся при решении обыкновенных дифференциальных уравнений), которое должно служить в качестве полного семейства функций для разложения по ним произвольной функции от $x^1, \ldots, x^n$.

Исследования различных авторов показали, что для разделимости переменных, т. е. для успеха только что описанной процедуры, необходимы три ограничения на метрику. Во-первых, координаты должны быть ортогональными, т. е. матрица (g_{ij}) должна быть диагональной. Два других ограничения на g_{ij} носят название условий Штеккеля и Робертсона. Робертсоном [1927] было показано, что эти три условия являются также и достаточными для разделимости, если функция V имеет должный вид. Однако эту теорию нельзя еще было признать удовлетворительной, потому что тензор $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$, подчиняющийся упомянутым выше условиям, мог и не быть метрическим тензором в евклидовом или любом другом интересующем нас пространстве. Поэтому Эйзенхарт [1934] дополнительно к этим трем условиям потребовал еще, чтобы тензор Римана R_{ijkl} был тождественно равен нулю. Любой тензор g_{jk}, удовлетворяющий всем этим условиям, является тогда метрическим тензором в евклидовом пространстве для *некоторой* криволинейной системы координат. Для $n=3$ Эйзенхарт дал полную классификацию всех систем координат в E^3, допускающих разделение переменных, и для каждой из таких систем привел явные формулы для процедуры разделения переменных.

Этими разделяющими системами координат в E^3 являются системы общих эллипсоидальных координат, а также те системы частного вида, которые получаются из них в результате разного рода предельных переходов, таких, как приравнивание двух полуосей, удаление одного из фокусов на бесконечность и т. д., включая системы координат вытянутого и сплюснутого сфероида, параболические, параболоидальные, эллиптического цилиндра, параболического цилиндра, кругового цилиндра, сферические и декартовы. Детальное описание этих систем координат см. в книге Морса и Фешбаха [1953] [1]).

[1]) См. также книгу Миллера [1977]. — *Прим. перев.*