

РАСШИРЕНИЕ МНОГООБРАЗИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Уравнения поля специальной и общей теорий относительности; тензор энергии-импульса; космологическая постоянная; многообразия Эйнштейна; карты Шварцшильда и Финкельштейна; теорема Биркгофа; смысл сферической симметрии; многообразие Крускала; максимальные и геодезически полные многообразия; другие расширения карт Шварцшильда; обращение времени; многообразие Керра; задача Коши для уравнений поля Эйнштейна.

Предварительные сведения: гл. 23, 24, 26 и 27; знакомство с общей теорией относительности.

Среди многих математических задач, относящихся к общей теории относительности, задача расширения выбрана потому, что она связана с глобальными геометрическими и топологическими свойствами многообразий Эйнштейна, а эти свойства, по моему мнению, составляют основной математический аспект теории. Хотя никаких других формул и результатов, кроме тех, что получены в предыдущих главах данной книги, здесь не используется, эта глава, вероятно, будет доступной только тем читателям, которые хотя бы немного знакомы с теорией относительности. В частности, первые два параграфа следует рассматривать не как источник изучения основ теории относительности, а лишь просто как их обсуждение.

28.1. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Напомним, что электромагнитная теория Дж. К. Максвелла не только усовершенствовалась и завершила классическую теоретическую физику, но и привела к трем главным кризисам в этой науке. (1) В отличие от всех предшествующих физических теорий она оказалась инвариантной относительно преобразований Галилея или Ньютона, что, казалось, подразумевало существование абсолютной системы отсчета во вселенной. (2) Когда к этой теории применили принципы статистической физики, то это привело к так называемой ультрафиолетовой катастрофе. (3) Будучи примененной к исследованию электронов, рассматриваемых как точечные заряды, она привела к получению бесконечного самодействия и бесконечной собственной энергии электрона. Первый кризис был разрешен специальной теорией относительности, второй — квантовой гипотезой (оба — примерно в 1900—1905 гг.), а третий кризис (пока еще не полностью) — программой перенормировки квантовой электродинамики начала 50-х годов.

Для преодоления первой трудности теории Лоренц и Фитцджеральд предположили, что когда объект движется относительно абсолютной системы отсчета, он сжимается в определенной степени в направлении движения, а все процессы, происходящие с ним, замедляются в том же отношении вследствие каких-то электромагнитных эффектов внешних членов уравнений Максвелла, возникающих из-за движения его системы отсчета. Эта гипотеза не противоречила никаким известным фактам, потому что тогда было очень мало известно о строении материи, хотя и было ясно, что электромагнетизм как-то связан с этим строением. Следствием этой гипотезы оказалась инвариантность всех чисто электромагнитных явлений относительно так называемых преобразований Лоренца, которые учитывали сжатие и замедление (действительно, уравнения Максвелла инвариантны относительно этих преобразований); следовательно, при помощи электромагнитных явлений невозможно обнаружить движение относительно абсолютной системы отсчета.

После этого Эйнштейн предположил дополнительно, что относительно преобразований Лоренца инвариантны *все* физические законы¹⁾ (для этого законы следует, разумеется, видоизменять для скоростей, сравнимых со скоростью света c). Все инерциальные системы отсчета становятся тем самым равноправными; следовательно, законы физики становятся проще в том смысле, что уже нет необходимости рассматривать, как могли бы воздействовать электромагнитные явления (обусловленные движением относительно абсолютной системы отсчета) на механику, термодинамику, строение атома и т. п., и т. д. Если эти законы известны в одной инерциальной системе отсчета, то, согласно принципу инвариантности относительно преобразований Лоренца, они определены и в любой другой. В следующем параграфе описаны аналогичные упрощения физических законов, вытекающие из общей теории относительности.

28.2. УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Классическое уравнение гравитационного поля имеет вид

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho, \quad (28.2.1)$$

где $\varphi = \varphi(x)$ — гравитационный потенциал, $\rho = \rho(x)$ — плотность вещества, а G — универсальная гравитационная постоянная. Это уравнение можно привести к инвариантной относительно пре-

¹⁾ Справедливости ради отметим, что принцип относительности как всеобщий закон впервые сформулировал А. Пуанкаре (да и термин «преобразование Лоренца» введен им); в частности, именно он сделал первую попытку создания релятивистской теории гравитации (см., например, Принцип относительности. Сборник статей, — М.: Атомиздат, 1973). — *Прим. перев.*

образований Лоренца форме следующим образом. В специальной теории относительности плотность ρ представляет собой (4×4) -компонентный симметрический тензор второго ранга — тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$, умноженный на $1/c^2$. (Как и в § 19.4, x^1, x^2, x^3 являются пространственными координатами, а $x^4 = ct$.) Следовательно, φ является (4×4) -компонентным тензором $\varphi_{\mu\nu}$, а уравнение (28.2.1) заменяется на уравнение

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi_{\mu\nu} = \frac{4\pi G}{c^2} T_{\mu\nu},$$

или

$$h^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \varphi_{\mu\nu} = \frac{4\pi G}{c^2} T_{\mu\nu}, \quad (28.2.2)$$

где

$$(h^{\rho\sigma}) = (h_{\rho\sigma}) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & (0) & & \\ & & 1 & \\ & (0) & & 1 \\ & & & & -1 \end{bmatrix} \quad (28.2.3)$$

— метрический тензор плоского пространства Минковского.

[Как и в § 19.4, греческие индексы пробегают значения от 1 до 4, а латинские — от 1 до 3. Физики часто допускают изменение греческих индексов от 0 до 3, а у тензоров $h^{\rho\sigma}$ и $h_{\rho\sigma}$ первый диагональный элемент берут равным 1, а остальные равными -1 , так что $ds^2 = (dx^{(0)})^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$. Обозначения данной главы ближе к тем, которые используются в математической литературе.]

Закон движения точечной массы в гравитационном поле, который в классическом случае гласит, что ускорение равно $-\nabla\varphi$, принимает следующий лоренц-инвариантный вид:

$$\ddot{x}^\mu + h^{\mu\nu} (\partial\varphi_{\rho\sigma}/\partial x^\nu) \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma = 0,$$

где точка обозначает производную по собственному времени τ вдоль траектории, а $x^\mu(\tau)$ — координаты частицы. Это уравнение выглядит как уравнение геодезической, хотя второй член, конечно же, связан с гравитационным полем и не имеет ничего общего с геометрией.

Теорию такого рода можно назвать *специальной релятивистской теорией гравитации*. Ее никогда всерьез не рассматривали, потому что Эйнштейн открыл общую теорию относительности еще до того, как стали возможны наблюдения с целью проверки релятивистских эффектов. Согласно этой специальной теории, там, где нет гравитационного поля и поэтому $\varphi_{\mu\nu} \equiv 0$, свободные тела движутся по прямым, т. е. по геодезическим четырехмерного пространства Минковского, в то время как при $\varphi_{\mu\nu} \neq 0$ их траектории отличаются от прямых и наблюдается относительное ускорение.

В общей теории Эйнштейна предполагается, что при отсутствии негравитационных сил траектории должны быть всегда геодезическими, а относительные ускорения обусловлены кривизной пространства-времени. Это предположение упростило физику в том смысле, что отпадала необходимость рассматривать возможные изменения за счет гравитационного поля законов электромагнетизма, квантовой теории и т. п., так как эти законы предполагалось брать в не зависящем от поля виде в локальной инерционной системе отсчета (системе «свободного падения»), в которой гравитационное поле «исчезает». Изучение уравнений геодезических показывает, что когда пространство-время является почти плоским (почти минковским), можно найти некоторую систему координат, в которой тензор $g_{\mu\nu}$ почти не отличается от $h_{\mu\nu}$ и разница между ними такова, что движение остается таким же, что и для в точности плоского пространства-времени, в котором гравитационный потенциал имеет вид $\Phi_{\mu\nu} = (c^2/2)(g_{\mu\nu} - h_{\mu\nu})$. В этой системе уравнение поля сводится к уравнению

$$g^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (28.2.4)$$

Поэтому Эйнштейн ввел уравнение вида

$$W_{\mu\nu} = (8\pi G/c^4) T_{\mu\nu}, \quad (28.2.5)$$

где $W_{\mu\nu}$ — тензор, включающий компоненты метрического тензора и их первые и вторые производные по x^μ , и потребовал, чтобы $W_{\mu\nu}$ обладал следующими свойствами. (1) Он должен быть симметрическим и бездивергентным, т. е.

$$W_{\mu\nu} = W_{\nu\mu}, \quad g^{\nu\sigma} W_{\mu\nu;\sigma} = 0;$$

это необходимо, поскольку тензор $T_{\mu\nu}$ энергии-импульса материи обладает теми же свойствами. (2) Когда поля слабы (т. е. пространство-время почти плоское), этот тензор должен сводиться к левой части уравнения (28.2.4) в соответствующих координатах. Эйнштейн обнаружил, что единственным выражением для $W_{\mu\nu}$, удовлетворяющим всем этим свойствам, служит левая часть следующего уравнения, называемого *уравнением поля Эйнштейна*:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = (8\pi G/c^4) T_{\mu\nu}; \quad (28.2.6)$$

здесь $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи, определенный в § 27.9, а Λ — константа. Второй член в левой части (28.2.6) включен для того, чтобы сделать все выражение бездивергентным, согласно равенствам (27.10.9), (27.10.10).

В приложениях к малым системам, таким как Солнечная система или отдельная галактика, удобно предположить, что пространство-время является асимптотически плоским на больших

расстояниях; для этого необходимо, чтобы так называемая космологическая постоянная Λ равнялась нулю. Эйнштейн предполагал, однако, что Λ всего лишь очень малая константа, а не нуль. Он считал, что это необходимо для получения замкнутых (т. е. конечных) моделей вселенной, которые исключают различные виды парадокса Олберса, возникающие при рассмотрении бесконечной и асимптотически равномерно населенной вселенной. Однако в 1922 г. А. А. Фридман показал, что замкнутые модели можно получить и при $\Lambda=0$. С тех пор Λ обычно берут равной нулю.

Далее в этой главе $\Lambda=0$; мы ограничимся также рассмотрением пустых областей пространства-времени, где $T_{\mu\nu}=0$. Так как $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=4$, то в этом случае свертка (28.2.6) показывает, что скалярная кривизна $R=0$; следовательно, гравитационное уравнение сводится к уравнению $R_{\mu\nu}=0$. Поэтому *многообразие Эйнштейна* определяется как четырехмерное многообразие сигнатуры 2, в котором тензор Риччи $R_{\mu\nu}$ всюду равен нулю. Возможны, конечно, и более общие определения, и их иногда обнаруживают; см., например, А. З. Петров [1969].

Задача, рассматриваемая в данной главе, состоит в том, чтобы найти такое расширение данного многообразия Эйнштейна (обычно задаваемого одной картой), при котором получилось бы большее многообразие Эйнштейна; точнее говоря, требуется найти максимальное в некотором смысле расширение данного многообразия.

Расширения такого рода играли важную роль в развитии теории относительности. Знаменитое решение Шварцшильда для поля вокруг сферической массы, которое будет обсуждаться в следующем параграфе, явилось указанием на существование сингулярности пространства-времени на определенном расстоянии от центра (так называемом радиусе Шварцшильда). Природа этой «сингулярности» была предметом многочисленных дискуссий в период создания теории относительности. Теперь известно, что эта сингулярность является сингулярностью всего лишь используемой координатной системы и что многообразие может быть расширено с привлечением дополнительных координатных карт до многообразия без сингулярностей, исключая центральную точку. Ясно, что «решение» уравнений Эйнштейна необходимо понимать как некоторое многообразие, а не просто как одну формулу для линейного элемента.

28.3. КАРТЫ ШВАРЦШИЛЬДА

В 1916 г. К. Шварцшильд нашел стационарное сферически симметрическое решение уравнения Эйнштейна $R_{\mu\nu}=0$ для пустого пространства, на больших расстояниях асимптотически совпадающее с плоской метрикой Минковского. Это решение — некоторое многообразие, состоящее из одной карты, которая будет сейчас

описана; она, вероятно, представляет пространство-время вокруг центральной сферической массы.

Утверждение о стационарности решения означает, что можно подобрать такие координаты этой карты, что тензор $g_{\mu\nu}$ окажется не зависящим от одной из координат, скажем от x^4 , которую можно интерпретировать как время. Ясно, что при этом g_{44} должно быть отрицательным, тогда как квадратичная форма $g_{jk} dx^j dx^k$, получающаяся при подстановке $dx^4 = 0$, должна быть положительно определенной.

Утверждение о сферической симметрии означает, что существует некоторая непрерывная группа G преобразований данного многообразия, не затрагивающих x^4 , которая изоморфна группе вращений $SO(3)$ и относительно которой метрика инвариантна. Предполагается, что на больших расстояниях преобразования из G принимают вид обычных вращений в пространстве x^1, x^2, x^3 ; с другой стороны, больше мы ничего не можем о них сказать, поскольку у нас нет теории нелинейных представлений групп. Например, мы не можем утверждать, что существует точка многообразия (центр вращений), инвариантная относительно всех преобразований из G ; в действительности такой точки в данном многообразии нет.

Предполагается, что многообразии M_3 , получаемое при фиксировании некоторого значения x^4 , асимптотически (на больших расстояниях) является евклидовым в том смысле, что M_3 содержит некоторую карту, координатная область N_3 которой состоит из всех таких точек \mathbb{R}^3 , что

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 > a^2, \quad (28.3.1)$$

где a — константа, а метрический тензор g_{jk} асимптотически совпадает с δ_{jk} на больших расстояниях в N_3 . Предполагается, что хотя бы на больших расстояниях найдется семейство концентрических сфер, инвариантных относительно всех преобразований из группы G . Рассмотрим геодезическую, начинающуюся в точке P на одной из таких сфер S_0 , идущую по направлению нормали к S_0 внутрь этой сферы и продолженную внутрь сферы настолько, насколько это возможно в данной карте. Она инвариантна относительно тех вращений, которые оставляют точку P на S_0 неподвижной, поскольку инвариантна метрика; следовательно, геодезические отображаются в геодезические, но рассматриваемая геодезическая однозначно определяется ее начальным направлением в P . Если подобные геодезические, выходящие из всех точек P сферы S_0 , продолжены внутрь на фиксированное расстояние, то их конечные точки образуют инвариантную поверхность, или сферу S_1 , и, следовательно, эти геодезические можно использовать для построения отображения S_0 на S_1 ; в частности, сферические координаты θ, φ на S_0 определяют координаты θ, φ на S_1 , преобразующиеся при преобразованиях из группы G точно так же, как

они преобразуются на S_0 . Пусть, наконец, r — переменная, значения которой возрастают непрерывно при движении наружу и при помощи которой одна инвариантная сфера отличается от другой. Примем r , θ , φ в качестве координат на карте; тогда метрика сферически симметрична относительно этих координат уже в обычном смысле.

Теперь в M мы имеем четырехмерную карту с координатной областью $N \subset \mathbb{R}^4$, для которой

$$\begin{aligned} a < r < \infty, \quad 0 < \theta < \pi, \\ -\pi < \varphi < \pi, \quad -\infty < x^4 < \infty, \end{aligned} \quad (28.3.2)$$

где a — пока еще неизвестная постоянная.

Как обычно, эта карта не покрывает сразу и северный, и южный полюсы $\theta=0$, π , а также «международную линию смены дат» $\varphi = \pm\pi$ на любой поверхности $r = \text{const}$, $x^4 = \text{const}$, однако это может быть сделано другой точно такой же картой, ориентированной так, что обе они уже полностью покрывали бы все такие поверхности. В дальнейшем подобная процедура будет предполагаться автоматически выполненной каждый раз, когда используются полярные углы θ и φ ; в этом случае употребление слова «карта» в действительности означает использование многообразия, содержащего две такие карты.

Покажем теперь, что когда метрика рассматривается только на поверхности $r = \text{const}$, $x^4 = \text{const}$, она принимает вид

$$ds^2 = A (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (28.3.3)$$

где A — положительная постоянная, которая может зависеть от r . Чтобы показать это, будем считать r , x^4 и φ постоянными и рассмотрим метрическую форму при $\theta=0$, $\varphi=0$. Тогда $ds^2 = Ad\theta^2$, где $A = g_{22}(r, 0, 0, x^4)$; чтобы найти ds^2 для других значений θ и φ , нужно только применить вращение, которое преобразует θ , φ в 0 , 0 . Поскольку метрика инвариантна, ds^2 должна преобразовываться в $Ad\theta^2$, однако известно, что линейный элемент (28.3.3) инвариантен относительно вращений в системе координат θ , φ ; следовательно, формула (28.3.3) справедлива на всей поверхности.

Вследствие симметрии, т. е. инвариантности метрики относительно преобразований из группы \hat{G} , легко показать, что $g_{\mu\nu}$ может зависеть только от r и что в сумме $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ не может быть членов, связывающих θ или φ с r или x^4 . Следовательно, эта метрика имеет вид

$$ds^2 = g_{11} dr^2 + A(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + 2g_{14} dr dx^4 + g_{14} (dx^4)^2. \quad (28.3.4)$$

На больших расстояниях $g_{11} \approx 1$, $g_{44} \approx -1$, $g_{14} \approx 0$; отсюда следует, в частности, что по непрерывности $g_{44} \neq 0$ при r больше некоторого «радиуса» r_0 (очень малого, как окажется далее). Наконец, для

$r > r_0$ член с g_{14} можно удалить введением новой переменной

$$x'^4 = x^4 + \int (g_{14}/g_{44}) dr$$

(θ , φ , z остаются без изменения). Отсюда

$$dx^4 = dx'^4 - (g_{14}/g_{44}) dr;$$

подстановка этого выражения в (28.3.4) уничтожает член с $dr dx'^4$ за счет добавления двух новых членов с dr^2 , которые, однако, можно включить в первый член $g_{11} dr^2$ (изменив g_{11}). После этого в ds^2 останутся только диагональные элементы; так как первые три члена положительны, а четвертый отрицателен, ds^2 можно записать в виде

$$ds^2 = e^\alpha dr^2 + e^\gamma (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - e^\beta (dx^4)^2, \quad (28.3.5)$$

где α , β , γ — функции от r , а у x^4 опущен штрих.

Сделаем теперь последнее преобразование, заменив r на $r' = e^{\gamma/2}$; тогда e^β заменится на $e^{\beta'}$, а $e^\alpha (dr)^2$ — на $e^{\alpha'} (dr')^2$, где α' и β' — функции от r' . Снова опустив штрихи, в результате получим

$$ds^2 = e^\alpha dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - e^\beta (dx^4)^2. \quad (28.3.6)$$

Эта форма была исходной для Шварцшильда.

Функции $\alpha(r)$ и $\beta(r)$ получаются теперь следующим образом. Вычисляют трехиндексные символы Кристоффеля $[\mu\nu, \sigma]$ и $\{u^\sigma, v\}$, затем компоненты тензора Римана $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, а из них — сверткой — компоненты тензора Риччи $R_{\mu\nu}$. Все эти величины выражаются через α , β и их первые производные, так что, полагая $R_{\mu\nu} = 0$, мы получаем дифференциальные уравнения для определения $\alpha(r)$ и $\beta(r)$. Подробности этих довольно-таки длинных вычислений читатель может найти в любой книге по общей теории относительности (например, Толмен Р. [1934] или Вебер [1961]).

Оказалось, что

$$e^\beta = e^{-\alpha} = 1 - r_0/r, \quad (28.3.7)$$

где r_0 — произвольная постоянная, которую называют *радиусом Шварцшильда* и считают положительной. (Соответствующая карта с $r_0 < 0$ сейчас не является.)

В § 28.2 было указано, что когда пространство-время является почти плоским, метрику можно интерпретировать в терминах эквивалентного (классического) гравитационного поля. Для $r \gg r_0$ полученная выше метрика эквивалентна полю Кулона с потенциалом

$$\varphi \approx -GM/r,$$

где M — некоторая другая константа. Связь между константами M и r_0 выражается формулой

$$r_0 = 2GM/c^2. \quad (28.3.8)$$

Применение метрики Шварцшильда к задачам Солнечной системы и к астрономическим наблюдениям с целью проверки теории относительности составляет важную главу теории относительности. Если в (28.3.8) M берется равным массе Солнца ($2 \cdot 10^{33}$ г), то $r_0 \approx 3$ км. Для $r \gg r_0$ пространство-время почти совершенно плоское. Для точек внутри Солнца, т. е. для $r < R_\odot \approx 6.5 \cdot 10^5$ км, нужно использовать другую метрику — *внутреннюю метрику Шварцшильда*, в которой учитывается, что тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ отличен от нуля. Так как $r_0 \ll R_\odot$, пространство-время оказывается почти плоским (пространством Минковского) во всех точках вне Солнца, т. е. для $r > R_\odot$ (а также, как оказывается, для всех точек внутри него), а гравитационное поле почти совпадает с кулоновским полем. И действительно, как несомненно понимает читатель, контрольные наблюдения проявлений общей теории относительности требуют измерений чрезвычайно малых эффектов.

В данной главе рассматривается главным образом одна математическая задача общей теории относительности, а именно задача нахождения максимальных расширений вакуумных решений (подобных внешнему решению Шварцшильда или решению Керра для поля вокруг вращающейся массы) на другие пустые области пространства-времени. Астрономическая интерпретация этих решений в терминах «черных дыр в пространстве» или космологических моделей здесь не обсуждается.

С этого момента будут использоваться такие единицы длины и времени, что $r_0 = c = 1$; вместо x^4 будем писать t . Тогда шварцшильдовский линейный элемент имеет вид

$$ds^2 = (1 - 1/r)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - (1 - 1/r) dt^2. \quad (28.3.9)$$

Можно построить три координатные карты, использующие эту метрику. Пока что каждую из этих карт мы будем рассматривать как отдельное многообразие Эйнштейна. Для определения карты необходимо задать только область N в координатном пространстве \mathbb{R}^4 , в которой изменяются r , θ , φ и t . Очевидно, что поскольку сингулярности $g_{\mu\nu}$ необходимо исключить, то имеются только три возможности:

$$\begin{aligned} N_I: & \quad 1 < r < \infty, \\ & \quad 0 < \theta < \pi, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad -\infty < t < \infty; \\ N_{II}: & \quad 0 < r < 1 \\ & \quad (\theta, \varphi, t \text{ — те же, что в } N_I); \\ N_{III}: & \quad -\infty < r < 0 \\ & \quad (\theta, \varphi, t \text{ — те же, что в } N_I). \end{aligned}$$

Получающиеся карты мы будем называть *картами* (Шварцшильда) I, II и III соответственно.

Если заменить r на $-r$, то обнаруживается, что карта III— это просто решение вокруг отрицательной точечной массы. Она является многообразием Эйнштейна, согласно принятому здесь определению, причем даже геодезически полным в смысле § 28.6. Конечно, само по себе это решение неинтересно, поскольку отрицательных масс, по-видимому, не существует. Однако в § 28.8 мы убедимся в том, что на части многообразия Керра, которое представляет поле вокруг вращающейся массы, может быть задана метрика, весьма похожая на метрику карты III.

Отметим между прочим следующие моменты, касающиеся зависимости от времени. В 1923 г. Г. Д. Биркгоф показал, что метрика карты I получается даже при отбрасывании предположения о стационарности. Иначе говоря, метрика карты I является единственной сферически симметрической метрикой, асимптотически плоской на бесконечных расстояниях. Этот результат получается примерно следующим образом. Если функции α и β (см. выше) зависят не только от r , но и от t , то возникает более сложное общее решение. Однако это решение можно всегда преобразовать в стационарное решение (28.3.9) путем только преобразования координат. Отсюда следует, например, что гравитационное поле вокруг радиально пульсирующей звезды стационарно. Если говорить на языке теории электромагнетизма, монополярного излучения гравитационных волн нет, как нет и их дипольного излучения, потому что нет отрицательных масс; однако квадрупольное гравитационное излучение возможно, и, как полагают, оно служит единственной причиной потери энергии пульсарами. Наконец, отметим, что метрика карты II не стационарна в смысле определения, данного в начале этого параграфа (временноподобной переменной здесь служит r , а не t).

Определение сферической симметрии, принятое выше, нуждается в пояснении. Если P — произвольная точка многообразия M_3 (x^4 фиксировано), а $S(P)$ — множество всех точек, в которые P переходит путем преобразований из группы G , то $S(P)$ является поверхностью $r = \text{const}$ двумерной и сферической (двумерной сферой) в самом обычном смысле. В общем сферически симметричном многообразии этого может и не быть. Пусть M — многообразии группы $SO(3)$, а G — группа левых трансляций $\varphi(h): g \rightarrow hg$ ($\forall g$) в M . Тогда отображение $h \rightarrow \varphi(h)$ оказывается изоморфизмом $SO(3)$ на G . Однако если P — произвольная точка из M , то множество $S(P)$ всех точек, в которые P переносится преобразованиями из G , не двумерно: оно совпадает со всем M и, следовательно, трехмерно. Карта I Шварцшильда является асимптотически плоской на бесконечных расстояниях, а это накладывает, очевидно, дополнительное ограничение на действие группы G на

это многообразие, поэтому все инвариантные множества двумерны. Многообразие группы $SO(3)$ компактно, и поэтому к нему не применимы никакие подобные ограничения.

28.4. РАСШИРЕНИЯ ФИНКЕЛЬШТЕЙНА КАРТ ШВАРЦШИЛЬДА

На карте I Шварцшильда Д. Финкельштейн [1958] ввел новые координаты

$$t' = t + \ln(r-1), \quad r, \theta, \varphi \text{ без изменений}, \quad (28.4.1)$$

в которых метрическая форма (28.3.9) принимает вид

$$ds^2 = (1 + 1/r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - (1 - 1/r) dt'^2 + (2/r) dt' dr. \quad (28.4.2)$$

При $r > 1$ и при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ t' также изменяется от $-\infty$ до $+\infty$; следовательно, область изменения r, θ, φ, t' та же, что и у r, θ, φ, t . Получающаяся карта покрывает ту же область пространства-времени, что карта I Шварцшильда, но только с другими координатами. При этом, однако, в (28.4.2) отсутствует сингулярность при $r=1$; следовательно, допустив уменьшение r до $0 < r \leq 1$, эту карту можно расширить до карты I Финкельштейна, которая определяется формулой (28.4.2) на области

$$N_{F, I}: \quad \begin{aligned} 0 < r < \infty, \\ 0 < \theta < \pi, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad -\infty < t' < \infty. \end{aligned}$$

Эта карта покрывает большую область пространства-времени, чем шварцшильдовская карта I, как схематически показано на рис. 28.1.

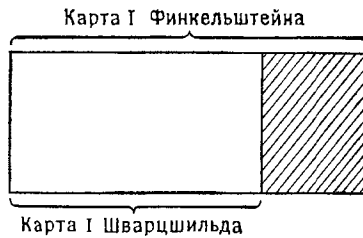


Рис. 28.1.

При помощи другого преобразования

$$t'' = t' - \ln(1-r), \quad (28.4.3)$$

примененного к заштрихованной части карты Финкельштейна (где $0 < r < 1$), получается карта II Шварцшильда (в переменных r, θ, φ, t''); следовательно, карта Финкельштейна содержит по одной копии каждой из карт I и II Шварцшильда. Однако это не

просто процедура исключения барьера $r=1$ в метрике (28.3.9); чтобы убедиться в этом, рассмотрим пространства с координатами t, r и t', r (координаты θ и φ фиксируются), представленные на рис 28.2. Когда прямая \mathcal{C}' в карте Финкельштейна идет вниз к $r=1$, соответствующая кривая \mathcal{C} в карте Шварцшильда

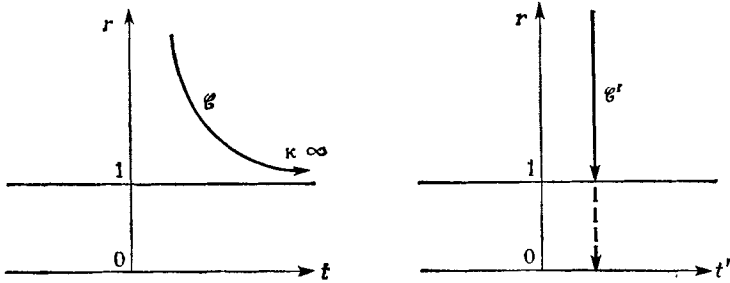


Рис. 28.2. Слева — карта I Шварцшильда, справа — карта I Финкельштейна.

(\mathcal{C} и \mathcal{C}' представляют одну и ту же кривую в пространстве-времени) уходит к $t = +\infty$ и, следовательно, не может быть продолжена далее, тогда как исходную кривую \mathcal{C}' можно продолжить до $r=0$.

Более того, вместо (28.4.1) можно использовать другое преобразование

$$t''' = t - \ln(r-1),$$

которое в применении к метрике Шварцшильда дает (28.4.2), только вместо члена $+(2/r) dt' dr$ получается $-(2/r) dt''' dr$.

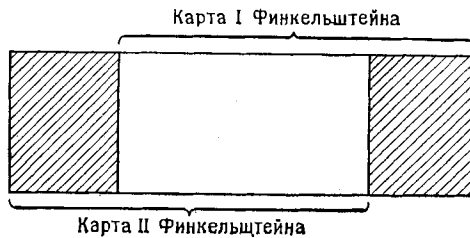


Рис. 28.3.

Такая карта (где $0 < r < \infty$) называется *картой II Финкельштейна*. В этом случае кривая, соответствующая кривой \mathcal{C} на рис. 28.2, уходит к $t = -\infty$, а не к $t = +\infty$, следовательно, это расширение карты I Шварцшильда дает еще одну область пространства-времени, как символически изображено на рис. 28.3. Можно получить бесконечное число дальнейших расширений путем

последовательного поочередного использования преобразований вида $t \rightarrow t \pm \ln(r-1)$ и $t \rightarrow t \pm \ln(1-r)$ на интервалах $(1, \infty)$ и $(0, 1)$ переменной r . Всюду на многообразиях, описанных таким образом, уравнение поля Эйнштейна сводится к уравнению вида $R_{\mu\nu} = 0$, а их сигнатура равна 2.

28.5. РАСШИРЕНИЕ КРУСКАЛА

На карте I Шварцшильда с метрикой (28.3.9) М. Крускал [1960] ввел следующие новые координаты u , θ , φ , v :

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{r-1} e^{r/2} \operatorname{ch}(t/2), \\ \theta, \varphi &\text{ без изменений,} \\ v &= \sqrt{r-1} e^{r/2} \operatorname{sh}(t/2), \end{aligned} \quad (28.5.1)$$

в которых метрическая квадратичная форма принимает вид

$$ds^2 = f(u, v)^2 (du^2 - dv^2) + r(u, v)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (28.5.2)$$

где f и r — некоторые функции, причем r определяется как положительное решение уравнения

$$[r(u, v) - 1] e^{(u, v)} = u^2 - v^2, \quad (28.5.3)$$

а f задается формулой

$$f(u, v)^2 = [4/r(u, v)] e^{-r(u, v)}. \quad (28.5.4)$$

Карта I Шварцшильда соответствует следующим интервалам изменения переменных: $u > 0$, $-u < v < u$ (θ и φ меняются в обычных пределах), т. е. соответствует заштрихованному на рис. 28.4 квадранту, обозначенному цифрой I. При этом, однако, метрическая форма (28.5.2) оказывается решением уравнения $R_{\mu\nu} = 0$, не сингулярна и имеет сигнатуру 2 всюду в более широкой области

$$\begin{aligned} N_K: \quad & -\infty < u < \infty, \quad \theta, \varphi \text{ — как обычно,} \\ & -\sqrt{1+u^2} < v < \sqrt{1+u^2}, \end{aligned} \quad (28.5.5)$$

которая соответствует всей области между сплошными кривыми на рис. 28.4, состоящей из областей, обозначенных I, I', II и II'. Каждая из областей I и I' — это копии карты I Шварцшильда, а области II и II' — копии карты II Шварцшильда. Любые две смежные области (из этих четырех) составляют одну из карт Финкельштейна, а начало координат ($u=v=0$) — это некоторая точка пространства-времени, которую ни одна из этих карт не покрывает.

Крускал показал, что многообразие K , порождаемое метрикой (28.5.2) и областью изменения (28.5.5) переменных u, v и называемое *многообразием Крускала*, является максимальным расширением карт Шварцшильда в смысле определения, которое будет приведено ниже.

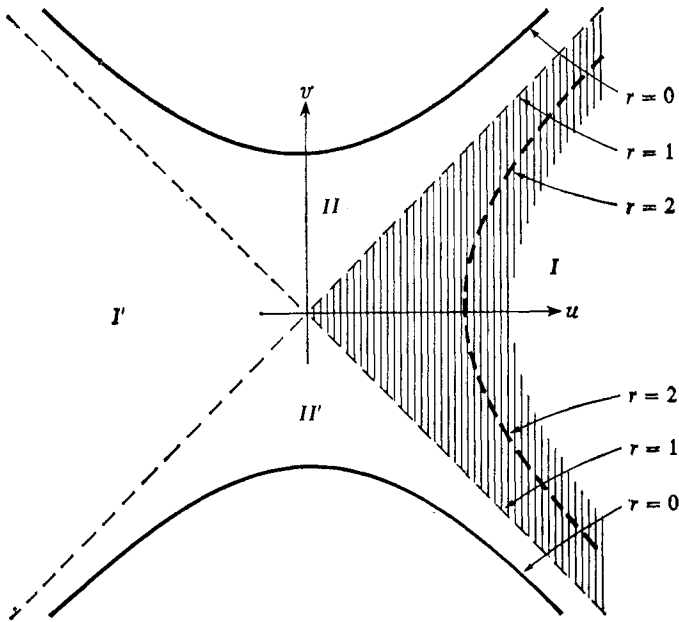


Рис. 28.4. Диаграмма многообразия Крускала.

28.6. МАКСИМАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ. ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА

Отличительной чертой многообразия Крускала K является следующее его свойство: геодезическая \mathcal{G} , идущая из любой точки $x^\mu(0)$ в начальном направлении, задаваемом любым касательным вектором $\dot{x}^\mu(0)$, либо может продолжаться в многообразии до сколь угодно больших значений натурального параметра λ , либо при некотором конечном значении λ столкнется с неустранимой особенностью¹⁾. Любое многообразие с таким свойством будет называться *геодезически полным* (некоторые авторы используют этот термин несколько в ином смысле; см. Эллис [1972]).

¹⁾ У автора genuine singularity. — Прим. перев.

Под *неустранимой особенностью (сингулярностью)* понимается некоторая точка или множество точек, где обращается в бесконечность некоторый инвариант кривизны (т. е. некоторый скаляр, построенный по функциям $g_{\mu\nu}$ и их производным различного порядка). От особенности такого сорта нельзя избавиться путем замены координат, потому что указанный скаляр, будучи инвариантом, стремится к бесконечности в любой системе координат при приближении к этой точке или к этому множеству точек.

Доказательство геодезической полноты многообразия Крускала элементарно, но громоздко. Сначала показывается, что кривые $r(u, v) = 0$ на плоскости u, v состоят из неустранимых особых точек. Нетрудно отыскать и скаляры кривизны, стремящиеся к бесконечности при $r(u, v) \rightarrow 0$. Скалярная риманова кривизна R таковым быть не может, поскольку $R \equiv 0$ на K , однако скаляр $R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$, где $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор Римана, равен $6[r(u, v)]^{-4}$ и поэтому стремится к бесконечности при $r(u, v) \rightarrow 0$.

Значение функции $r(u, v)$ на многообразии Крускала равно значению координаты r на многообразиях Шварцшильда. Если r — полярная координата, то в равенстве $r = 0$ видят представление одной-единственной точки. Однако на многообразии Крускала уравнение $r(u, v) = 0$ определяет целую кривую — гиперболу, изображенную на рис. 28.4. В любом случае, однако, эта «точка» или эта «кривая» не принадлежат ни многообразию K , ни какой бы то ни было области описываемого пространства-времени. Вероятно, вопрос о том, является ли особенность «точкой» или «кривой», не имеет физического смысла.

Далее Крускал показал, что для геодезической \mathcal{C} в K с произвольным $x^\mu(0)$ и произвольным $\dot{x}^\mu(0)$ $r(u, v) \rightarrow 0$ на \mathcal{C} либо при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ для некоторого конечного λ_0 , либо при $\lambda \rightarrow \infty$ вдоль \mathcal{C} . Следовательно, K — геодезически полное многообразие. На карте I (или II) Шварцшильда имеются геодезические, для которых $r \rightarrow 1$, а $t \rightarrow \pm \infty$ при конечных значениях натурального параметра λ . Поскольку λ — физически осмысленный инвариант, тогда как координаты r, θ, φ, t совершенно произвольны, представляется очевидным, что должна быть возможность продолжения этих геодезических на некоторые другие карты, и именно это достигается при расширении Крускала.

28.7. ДРУГИЕ РАСШИРЕНИЯ МНОГООБРАЗИЙ ШВАРЦШИЛЬДА

Рассмотрим вместо преобразования (28.5.1), введенного Крускалом, следующее преобразование r, θ, φ и t в ξ, θ, φ и η :

$$\begin{aligned} \xi &= (r-1)e^r, \\ \theta, \varphi &\text{— без изменений,} \\ \eta &= (r-1)e^r \operatorname{sh}(t). \end{aligned} \tag{28.7.1}$$

Тогда метрика Шварцшильда (28.3.9) примет вид

$$ds^2 = \frac{e^{-r(\xi)}}{r(\xi)(\xi^2 + \eta^2)} [\xi(d\xi^2 - d\eta^2) + 2\eta d\xi d\eta] + r(\xi)^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2], \quad (28.7.2)$$

где функция $r(\xi)$ для любого $\xi > -1$ задается как положительное решение уравнения

$$\xi r' = [r(\xi) - 1] e^{r(\xi)}. \quad (28.7.3)$$

Обозначим через K' многообразие с метрикой (28.7.2), определяемое картой со следующими интервалами изменения переменных:

$$N': \quad \left. \begin{array}{l} -1 < \xi < \infty, \\ -\infty < \eta < \infty, \end{array} \right\} \text{ (за исключением } \xi = \eta = 0);$$

θ, φ — как обычно.

Это многообразие содержит по одной копии многообразий I и II Шварцшильда, причем им соответствуют области $0 < \xi < \infty$ и $-1 < \xi < 0$. Далее мы убедимся в том, что многообразие K' максимально, т. е. его нельзя расширить до большего многообразия; поэтому, возможно, оно покажется предпочтительнее многообразия Крускала из-за большей простоты формул. Однако здесь сингулярность в точке $\xi = \eta = 0$ обусловлена сингулярностью системы координат и поэтому является устранимой; оказывается, что все инварианты кривизны имеют конечные пределы при приближении к точке $\xi = \eta = 0$.

Многообразие K' обладает свойством обращения времени. Иначе говоря, если $\text{tg } \alpha$ обозначает наклон $d\xi/d\eta$ нулевой геодезической в плоскости ξ, η (геодезической, на которой $ds^2 = 0$ при постоянных θ и φ), а $\text{tg } \beta$ есть просто ξ/η , то из (28.7.2) видно, что

$$\text{tg } \beta (1 - \text{tg}^2 \alpha) = 2 \text{tg } \alpha,$$

что эквивалентно равенству $\text{tg } \beta = \text{tg } 2\alpha$. Следовательно, если некоторая точка на плоскости ξ, η совершает один оборот по часовой стрелке вокруг начала координат $\xi = \eta = 0$, то β увеличивается на 2π , а α — только на π , т. е. направления нулевых геодезических изменяются на противоположные.

Ясно, что сингулярности типа сингулярности в точке $\xi = \eta = 0$ на многообразии K' физически неприемлемы; вообще максимальное расширение заданного многообразия Эйнштейна не имеет физического смысла, если оно не является геодезически полным.

Природа сингулярности в точке $\xi = \eta = 0$ исследуется далее в упражнениях.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть M — двумерное многообразие, состоящее из одной карты, метрика на которой задана формулой

$$ds^2 = [\xi (d\xi^2 - d\eta^2) + 2\eta d\xi d\eta] / (\xi^2 + \eta^2) \quad (28.7.4)$$

на области координатного пространства

$$N = N_M: \left. \begin{array}{l} -\infty < \xi < \infty, \\ -\infty < \eta < \infty \end{array} \right\} \text{(за исключением } \xi = \eta = 0).$$

Покажите, что M — плоское многообразие (т. е. что $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv 0$) с нулевой сигнатурой и, следовательно, локально минковское. Покажите также, что в M есть обращение времени.

2. Найдите геодезические на многообразии M из предыдущего упражнения. Покажите, что когда геодезическая \mathcal{C} идет к ∞ на плоскости ξ, η , натуральный параметр λ на \mathcal{C} стремится к $\pm \infty$, в то время как при приближении точки геодезической к началу координат λ стремится к конечному значению. Геодезические, для которых имеет место последний случай, — это лучи $\xi = r \cos \alpha$, $\eta = r \sin \alpha$, α — постоянная, а $r > 0$.

Указание. Эти упражнения становятся тривиальными, если перейти к новым переменным x, t , таким, что

$$\xi = x^2 - t^2, \quad \eta = 2xt. \quad (28.7.5)$$

Эти координаты можно описать также преобразованием $\xi + i\eta = (x + it)^2$, откуда ясно, что $ds^2 = dx^2 - dt^2$. Преобразование $\xi, \eta \rightarrow x, t$ двузначно, однако его можно сделать однозначным в любой односвязной части области N_M .

3. Преобразование (28.7.5) $x, t \rightarrow \xi, \eta$ превращает проколотую (x, t) -плоскость в двулистное накрывающее многообразие многообразия M . Рассмотрите другие накрывающие M многообразия и покажите, что двулистными являются только те из них, которые имеют геодезически полное расширение (получаемое возвращением выколотой точки в начале координат (x, t) -плоскости).

4. Используя аналогичное преобразование u, v в ξ, η , задаваемое формулой $\xi + i\eta = (u + iv)^2$, покажите, что многообразие Крускала K , из которого удалена точка $u = v = 0$, образует двулистное накрывающее многообразие многообразия K' , определенного в начале данного параграфа. Покажите, что наиболее общее накрывающее K' многообразие содержит n копий карты I Шварцшильда и n копий карты II Шварцшильда, где n — положительное целое число или ∞ . Покажите, что это двулистное накрытие является единственным, которое имеет геодезически полное расширение (получаемое возвращением назад точки $u = v = 0$). Поскольку проекция K на K' сохраняет метрику, очевидно, что все инварианты кривизны в K' имеют конечные пределы при приближении к особой точке $\xi = \eta = 0$.

28.8. МНОГООБРАЗИЯ КЕРРА

Осесимметричное решение уравнения поля $R_{\mu\nu} = 0$ в пустом пространстве было получено Керром [1963]; это решение можно интерпретировать, по крайней мере, во внешней области, как решение для поля вокруг вращающейся звезды. Эта метрика асимптотически минковская на больших расстояниях r , как и в решении Шварцшильда. На больших, но все-таки конечных расстояниях метрика содержит член, представляющий ньютоновский потенциал

— GM/r , как и в решении Шварцшильда (M — масса звезды), а также член α/r^2 с угловым множителем (α — момент импульса звезды). [Замечание. Это чисто релятивистский эффект, он возникает вследствие наличия плотности импульса ρv материи в определенных компонентах тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ правой части уравнения (28.2.6). Классическое уравнение Пуассона таких эффектов не порождает; согласно классической теории, вращение воздействует на гравитационное поле косвенно за счет сплюснутости вращающейся звезды, однако это воздействие изменяется как $1/r^3$.] Сейчас мы рассмотрим это решение, не выясняя его происхождение и не обосновывая его.

Для описания многообразия Керра используются координаты t, x, y, z . (Предупреждаем читателя, что здесь, как и в других аналогичных случаях, эти координаты произвольны и, скажем, x, y и z не следует интерпретировать как декартовы координаты, а t — как время.) Выберем такие единицы измерения, чтобы $2M, G$ и c были равны 1 (в этом случае единицей длины служит радиус Шварцшильда $2MG/c^2$): тогда метрическая форма имеет вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{\rho^3}{\rho^2 + a^2 z^2} (k_{\mu} dx^{\mu})^2 - dt^2, \quad (28.8.1)$$

где

$$k_{\mu} dx^{\mu} = \frac{z}{\rho} dz + \frac{\rho}{\rho^2 + a^2} (x dx + y dy) + \frac{a}{\rho^2 + a^2} (x dy - y dx) - dt \quad (28.8.2)$$

и $\rho = \rho(x, y, z)$ — функция, неявно определенная уравнением

$$(x^2 + y^2)/(\rho^2 + a^2) + z^2/\rho^2 = 1. \quad (28.8.3)$$

Ось вращения совпадает с осью z ; a — постоянная, равная удвоенному отношению момента импульса к массе (в принятых единицах измерения). Для быстро вращающихся звезд $a \gg 1$, а для медленно вращающихся звезд a может быть величиной порядка 1 или даже меньше.

Этому решению могут соответствовать различные карты. Окружность $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ является особой: на ней $R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} \rightarrow \infty$. Она соответствует сингулярности при $r = 0$ в решении Крускала, и действительно эта окружность стягивается к началу координат при $a \rightarrow 0$.

Уравнение (28.8.3) имеет два корня $\rho(x, y, z)$ противоположного знака в каждой точке x, y, z , за исключением круга $x^2 + y^2 < a^2, z = 0$, где $\rho = 0$. При прохождении точки x, y, z через этот круг необходимо перейти от одного решения к другому так, чтобы сохранить непрерывность производных от $g_{\mu\nu}$. Это достигается введением следующих карт M_1, \dots, M_4 . На каждой из них ds^2 выражается формулой (28.8.1), но в каждом случае знак $\rho(x, y, z)$ определяется особо.

$$\text{Для } M_1 \quad N = \{\text{все } x, y, z, t\} - \{x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0\}, \\ \rho(x, y, z) > 0. \quad (28.8.4)$$

Выражение для N означает, что N совпадает со всем пространством \mathbb{R}^4 , из которого исключен замкнутый центральный круг. По аналогии с теорией функций этот круг называется *разрезом*¹⁾.

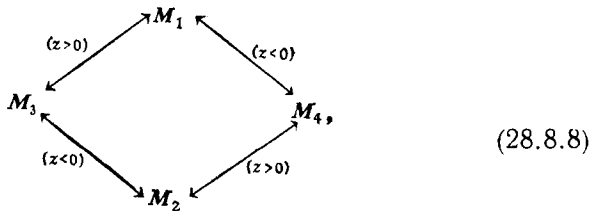
Для M_2 N то же, что для M_1 , $\rho(x, y, z) < 0$. (28.8.5)

Две следующие карты связывают M_1 и M_2 через вырезанный круг. Координатная область N для них могла бы быть любой односвязной областью, содержащей открытый круг (конечно, обязательно не содержащей граничную окружность). Ее можно было бы взять в виде тонкой пластинки, но простоты ради мы возьмем в качестве N все пространство \mathbb{R}^4 , в котором сделан разрез по внешней части указанного открытого круга в плоскости x, y .

Для M_3 $N = \{ \text{все } x, y, z, t \} - \{ x^2 + y^2 \geq a^2, z = 0 \}$,
 $\text{sign } \rho(x, y, z) = \text{sign } z$. (28.8.6)

Для M_4 N то же, что и для M_3 ,
 $\text{sign } \rho(x, y, z) = -\text{sign } z$. (28.8.7)

Карта M_3 согласуется с M_1 при $z > 0$ и с M_2 при $z < 0$, в то время как M_4 согласуется с M_1 при $z < 0$ и с M_2 при $z > 0$. Двусвязное многообразие M_0 можно теперь построить при помощи отображений



где каждое отображение на диаграмме совпадает с тождественным отображением

$$t \rightarrow t, \quad x \rightarrow x, \quad y \rightarrow y, \quad z \rightarrow z$$

в соответствующем полупространстве ($z > 0$ или $z < 0$). В этом многообразии любая точка может быть возвращена в исходное положение после двукратного «навинчивания» на окружность $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$.

Данное многообразие M содержит две асимптотически плоские области, распространяющиеся на бесконечность: для обеих $|\rho| \gg \gg \max \{1, a\}$; для одной $\rho > 0$, а для другой $\rho < 0$. Первая из них представляет (на больших расстояниях) гравитационное поле некоторой положительной массы (равной $\frac{1}{2}$ в принятой системе

¹⁾ В оригинале branch cut.—Прим. перев.

единиц), а вторая — поле отрицательной массы (равной $-\frac{1}{2}$). Обе эти области соединяются центральным кругом.

Рассмотрение геодезических показывает, что многообразии M_0 геодезически полно при $|a| > \frac{1}{2}$, но не полно при $|a| < \frac{1}{2}$. Расширение этого многообразия до большего и геодезически полного многообразия при $|a| < \frac{1}{2}$ осуществлено Бойером и Линдквистом [1967]. Получающееся многообразие довольно сложное, и мы предлагаем читателю ознакомиться с его описанием по указанной работе, а здесь ограничимся аналогией между описанным выше многообразием M_0 и картами Финкельштейна.

Для исследования метрики на больших расстояниях (при больших ρ) удобно ввести сферические координаты r, θ, φ , записывая $z = r \cos \theta$ и т. д. и, как обычно, напоминая, что необязательно интерпретировать r как радиальную координату. Для больших положительных ρ (28.8.3) показывает, что $\rho \approx r$. Далее, из выражения (28.8.2) следует, что $k_\mu dx^\mu \approx dr - dt$, а из (28.8.1) в приближении $\rho \approx r$ следует, что

$$ds^2 = (1 + 1/r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - (1 - 1/r) dt^2 - (2/r) dr dt,$$

а это и есть метрика (28.4.2) карты I Финкельштейна. Иначе говоря, в пределе $a = 0$ форма (28.8.1) дает в точности карту I Финкельштейна; следовательно, для малых a следует ожидать, что эту карту нужно будет дополнить другой ее копией и двумя копиями некоторой карты, которая при $a = 0$ сводится к карте II Финкельштейна, причем объединение этих карт выполняется так же, как объединение карт Финкельштейна в случае многообразия Крускала. Указанные карты получаются путем изменения знака dt в формуле (28.8.2) для величины $k_\mu dx^\mu$.

В силу этого имеются два варианта многообразия M_0 , полученных по схеме (28.8.8) в соответствии со знаком dt в (28.8.2); обозначим их через M_0^- и M_0^+ ; оба они содержатся в геодезически полном многообразии, которое построили Бойер и Линдквист.

28.9. ЗАДАЧА КОШИ

Задача Коши для уравнений Эйнштейна в пустом пространстве имеет одно общее с задачей Коши для уравнений Максвелла свойство. Напомним, что два уравнения Максвелла, а именно

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (28.9.1)$$

можно рассматривать как чисто начальное условие; если эти условия выполняются при $t=0$, то из остальных уравнений

$$\partial \mathbf{E} / \partial t = -c \nabla \times \mathbf{H}, \quad \partial \mathbf{H} / \partial t = c \nabla \times \mathbf{E} \quad (28.9.2)$$

(этих уравнений будет шесть, если расписать их покомпонентно) следует, что дивергентные условия (28.9.1) автоматически выполняются и для всех $t \geq 0$. Следовательно, полная система восьми уравнений оказывается избыточной, так что в качестве эволюционных уравнений нужно рассматривать только шесть уравнений (28.9.2) с шестью неизвестными.

Уравнения поля Эйнштейна

$$R_{\beta\gamma} = 0 \quad (28.9.3)$$

обладают похожими свойствами, только с несколько другим результатом. Во-первых, поскольку тензоры $g_{\beta\gamma}$ и $R_{\beta\gamma}$ симметричны, мы можем брать в качестве искомым функций только $g_{\beta\gamma}$ с $\beta \leq \gamma$, а поэтому и уравнения (28.9.3) нужны только с $\beta \leq \gamma$. Это составляет десять уравнений с десятью неизвестными. Мы убедимся в том, что четыре из этих уравнений представляют собой просто начальные условия и если они выполняются при $t = x^4 = 0$, то автоматически выполняются и при $t > 0$. В силу этого имеется только шесть независимых уравнений, описывающих эволюцию десяти искомым функций; решение оказывается недоопределенным и содержит четыре произвольные функции. Это в точности то, что и должно быть. Действительно, задача с начальными данными, собственно говоря, предназначена для определения геометрии пространства-времени для $x^4 > 0$ или хотя бы для $x^4 \in (0, T)$; однако геометрия не определяет функции $g_{\mu\nu}$ однозначно, допуская возможность замены координат. Любое решение задачи с начальными данными может быть изменено путем произвольного преобразования координат в области $x^4 > 0$, оставляющего без изменения начальные данные на начальной поверхности $x^4 = 0$.

Так как дифференциальные уравнения (28.9.3) имеют второй порядок, начальными данными служат значения функций

$$g_{\mu\nu}, \quad \partial g_{\mu\nu} / \partial x^4 \quad (\text{для всех } x^1, x^2, x^3 \text{ при } x^4 = 0). \quad (28.9.4)$$

Из уравнения $x^4 = 0$ начальной гиперповерхности \mathcal{S} не следует, что \mathcal{S} плоская, потому что метрический тензор g_{jk} на \mathcal{S} произволен (напоминаем, что латинские индексы принимают значения 1, 2, 3), однако предполагается, что начальные данные таковы, что матрица (g_{jk}) размера 3×3 положительно определена на \mathcal{S} ; кроме того, матрица $(g_{\mu\nu})$ должна быть на \mathcal{S} невырожденной и иметь сигнатуру 2. Отсюда следует, что \mathcal{S} пространственноподобна, причем, используя формулу для обращения матрицы, можно убедиться, что на \mathcal{S} $g^{44} < 0$. Ради упрощения рассуждений будем предполагать, что функции (28.9.4) являются аналитическими, так что для решения задачи Коши можно использовать метод степенных рядов. В этом случае все частные производные от $g_{\mu\nu}$ (включающие не более одного дифференцирования по x^4) определяются на \mathcal{S} функциями (28.9.4).

Компоненты $R_{\beta\gamma}$ тензора Риччи получаются из выражения (27.10.1) для $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ сверткой по индексам α и δ , т. е. умножением уравнения на $g^{\alpha\delta}$, а затем суммированием по α и δ от 1 до 4. В результате получается

$$R_{jk} = \frac{1}{2}g^{44} \partial^2 g_{jk} / (\partial x^4)^2 + \dots, \quad (28.9.5)$$

$$R_{j4} = -\frac{1}{2}g^{4k} \partial^2 g_{jk} / (\partial x^4)^2 + \dots, \quad (28.9.6)$$

$$R_{44} = \frac{1}{2}g^{jk} \partial^2 g_{jk} / (\partial x^4)^2 + \dots. \quad (28.9.7)$$

Здесь выписаны только те члены, которые содержат вторые производные по x^4 , многоточием же обозначены члены, содержащие производные по x^4 не выше первого порядка. [В (28.9.6) и (28.9.7) используется соглашение о суммировании, однако латинские индексы принимают значения 1, 2, 3.] Так как $g^{44} \neq 0$, дифференциальные уравнения $R_{jk} = 0$ и начальные данные определяют вторые производные от g_{jk} на \mathcal{S} . При подстановке этих вторых производных в оставшиеся четыре уравнения $R_{\beta 4} = 0$ получаются четыре начальных условия, причем вторые производные от $g_{\beta 4}$ по x^4 остаются неопределенными.

Эволюционные уравнения допускают разделение переменных при помощи вспомогательного условия, предложенного Лихнеровичем (см. Адлер, Базин и Шиффер [1965], где имеется превосходное обсуждение задачи Коши). Тензор Эйнштейна в смешанной форме имеет вид

$$G^{\alpha}_{\beta} = R^{\alpha}_{\beta} - \frac{1}{2}R\delta^{\alpha}_{\beta}, \quad (28.9.8)$$

где $R^{\alpha}_{\beta} = g^{\alpha\gamma}R_{\gamma\beta}$ — смешанная форма тензора Риччи, а $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ — скалярная кривизна. Оказывается, что система дифференциальных уравнений

$$R_{jk} = 0 \quad (j, k = 1, 2, 3, j \leq k), \quad (28.9.9)$$

$$G^{\alpha}_{\beta} = 0 \quad (\beta = 1, \dots, 4) \quad (28.9.10)$$

эквивалентна исходной системе (28.9.3).

Замечание. Для любого решения $g_{\mu\nu}$ этих уравнений R равно нулю, так что G^{α}_{β} и R^{α}_{β} принимают одно и то же значение (нуль), однако как выражения, содержащие зависимые переменные $g_{\mu\nu}$ и их производные, они отличаются друг от друга; следовательно, система (28.9.9), (28.9.10) отличается от системы (28.9.3), но эквивалентна ей. Чтобы доказать это утверждение, достаточно заметить, что, согласно (28.9.8), если положить R_{jk} равными нулю, то

$$G^4_k = g^{4\gamma}R_{\gamma k} = g^{44}R_{4k}, \quad G^4_4 = \frac{1}{2}g^{44}R_{44}; \quad (28.9.11)$$

следовательно, поскольку $g^{44} \neq 0$, из системы (28.9.10) следует обращение в нуль всех $R_{\beta\gamma}$, а отсюда в свою очередь вытекает обращение в нуль всех G^{α}_{β} .

Если в (28.9.8) подставить выражения (28.9.5)—(28.9.7) для компонент тензора Риччи, то окажется, что в дифференциальных уравнениях $G^4_{\beta} = 0$ нет никаких вторых производных по x^4 . Следовательно, эти уравнения играют роль дополнительных условий; в частности, им должны удовлетворять начальные данные.

Важным свойством тензора Эйнштейна (которое уже обсуждалось в § 28.2) является его бездивергентность в силу уравнения (27.10.10); иначе говоря,

$$G^{\alpha}_{\beta;\alpha} = 0. \quad (28.9.12)$$

Используя это уравнение покажем, что если функции $g_{\mu\nu}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (28.9.9) при всех x^4 из некоторого интервала $[0, T]$, а при $x^4 = 0$ удовлетворяют дополнительному условию (28.9.10), то они удовлетворяют этому дополнительному условию и при всех $x^4 \in [0, T]$. Формула для ковариантного дифференцирования в § 27.5 показывает, что (28.9.12) можно переписать в виде

$$\partial G^{\alpha}_{\beta} / \partial x^{\alpha} + A^{\alpha\gamma}_{\beta\delta} G^{\delta}_{\gamma} = 0, \quad (28.9.13)$$

где коэффициенты $A^{\alpha\gamma}_{\beta\delta}$ зависят только от $g_{\mu\nu}$ и их первых производных.

Поскольку функции $g_{\mu\nu}$ таковы, что все $R_{jk} = 0$, уравнения (28.9.8) и (28.9.11) показывают, что каждую компоненту G^j_{β} (как функцию от $g_{\mu\nu}$ и их первых производных) можно выразить через G^4_{γ} ($\gamma = 1, \dots, 4$). Уравнение (28.9.13) переходит тогда в уравнение

$$\partial G^4_{\beta} / \partial x^4 = B^{\gamma}_{\beta j} \partial G^4_{\gamma} / \partial x^j + C^{\gamma}_{\beta} C^4_{\gamma},$$

в котором коэффициенты $B^{\gamma}_{\beta j}$ и C^{γ}_{β} зависят только от функций $g_{\mu\nu}$ и их первых производных. Это система линейных дифференциальных уравнений относительно G^4_{β} (если $g_{\mu\nu}$ заданы), в которой производные по времени выражены в явном виде через производные по пространственным координатам. По теореме Коши — Ковалевской ее решение единственно; следовательно, если все четыре G^4_{β} равны нулю на \mathcal{S} ($x^4 = 0$), то они равны нулю и при всех $x^4 > 0$, что и требовалось доказать.

Наконец, уравнения (28.9.9) можно рассматривать как дифференциальные уравнения относительно функций g_{jk} ($j, k = 1, 2, 3, j \leq k$). Однако эти уравнения содержат также и функции $g_{\alpha 4}$ [в членах, скрывающихся за многоточием в (28.9.5)]. Эти четыре функции можно произвольно (но гладко) доопределить на все пространство-время, проследив только за тем, чтобы они соответствовали значениям $g_{\alpha 4}$ и $\partial g_{\alpha 4} / \partial x^4$, заданным на поверхности \mathcal{S} ($x^4 = 0$). Но поскольку $g^{44} \neq 0$, (28.9.5) показывает, что уравнения (28.9.9) определяют вторые производные по времени от

всех g_{jk} . И снова, согласно теореме Коши—Ковалевской, эти уравнения имеют при заданных начальных данных единственное решение на некотором интервале $0 \leq x^4 \leq T$.

28.10 ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Общая задача расширения многообразий Эйнштейна далеко не решена. Почти ничего не известно о существовании или единственности геодезически полных расширений. Простые многообразия в § 28.7 не имеют таких расширений, а следующее многообразие имеет много расширений. Рассмотрим единственную карту, в которой $g_{\mu\nu}$ определяются матрицей

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & -1 \end{pmatrix} \quad (28.10.1)$$

на ограниченной области N координатного пространства. В одном из геодезически полных расширений N' совпадает с \mathbb{R}^4 , а $g_{\mu\nu}$ всюду задаются как (28.10.1). Это—стационарное плоское пустое пространство. В другом расширении N' снова совпадает с \mathbb{R}^4 , но при этом имеются некоторые гравитационные волны, которые еще не достигли области пространства-времени, представленной областью N . Почти ничего не известно и о задаче Коши, за исключением существования и единственности решения на *некотором* интервале времени $0 \leq x^4 \leq T$. Даже если имеется единственное решение для всех x^1, \dots, x^4 , оно все еще образует одну карту, которая может оказаться неполным многообразием.