

БИФУРКАЦИИ В ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Эволюционное уравнение; уравнения Навье—Стокса; течения Пуазейля и Куэтта; вихри Тейлора; волнистые вихри; потоки и полупотоки в гильбертовом пространстве; собственные колебания; полнота системы собственных колебаний; инвариантные многообразия; устойчивые и неустойчивые многообразия; неподвижные точки, замкнутые траектории и инвариантные торы; бифуркации; закритические и докритические бифуркации; субгармонические бифуркации; отображения Пуанкаре.

Предварительные сведения: гл. 1—8 и основы гидродинамики.

Работы Лоренца [1963] и Рюэля и Такенса [1971] положили начало применению в теории гидродинамической устойчивости концепций и принципов одного из современных и быстро развивающихся разделов математики — теории топологических динамических систем. Сразу стало ясно, что эти концепции (например, концепция типичных свойств систем) применимы, по существу, во всех физических теориях. Новые концепции и принципы позволяют по-новому взглянуть на давно известные явления, такие, например, как бифуркации. Идея странных аттракторов и их связь с непрерывными энергетическими спектрами дают новое представление о хаотическом поведении в целом.

В этой и в двух следующих главах показывается применение таких новых идей для изучения начальной стадии образования турбулентности.

29.1. КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Будем рассматривать слабо неустойчивое течение несжимаемой вязкой жидкости. Это течение является более гладким и простым, чем хаотическое течение, характерное для полностью развитой турбулентности, и в то же время обладает свойствами неустойчивости и непредсказуемости, которые можно изучать аналитически. Пусть создающая течение установка работает так, что число Рейнольдса медленно возрастает. Нас будет интересовать та стадия течения, на которой турбулентность только зарождается.

Течение — это, иначе говоря, баланс между устойчивым потоком энергии от некоторого внешнего источника и ее диссипацией за счет вязкого трения. В классических задачах типа задачи Пуа-

зейля энергия передается внешним градиентом давления, который, например, вызывает движение жидкости в длинной круглой трубе или в щели между параллельными плоскими стенками; в задачах Куэтта энергия поступает за счет бокового движения стенок, таких, как скользящая плоская стенка или вращающийся цилиндр; в задачах Бенара она поступает от внешнего источника тепла, который вызывает тепловую конвекцию. Другими примерами такого рода являются течение за круговым цилиндром (задача Кармана) и течение в пограничном слое над плоской пластиной, параллельной основному потоку (задача Блазиуса).

Конкретную задачу обычно можно охарактеризовать некоторой длиной l_0 и некоторой скоростью v_0 , где l_0 может быть диаметром или каким-либо другим характерным размером, а v_0 — средней скоростью течения или скоростью движения одной из стенок. Безразмерная величина

$$R = l_0 v_0 / \nu, \quad (29.1.1)$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости (равный коэффициенту вязкости, деленному на плотность жидкости), называется *числом Рейнольдса* рассматриваемой задачи. Обычно предполагается, что R изменяется за счет изменения v_0 при неизменных ν и размерах. Однако гидродинамические уравнения инвариантны относительно изменений масштабов длины и скорости (сохраняющих все *отношения* соответствующих длин и скоростей) и относительно замены одной жидкости другой, если при этом не изменится значение R .

Задача Тейлора о течении между вращающимися концентрическими цилиндрами (иногда называемая круговой задачей Куэтта) и задача Бенара о конвекции в горизонтальном слое жидкости, подогреваемого снизу, представляют собой наиболее изученные в настоящее время примеры возникновения турбулентности.

29.2. ПРИМЕРЫ БИФУРКАЦИЙ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Сначала рассмотрим частный случай задачи Тейлора о течении между концентрическими вращающимися цилиндрами, когда внешний цилиндр покоится. При медленном вращении внутреннего цилиндра течение будет ламинарным: у скорости жидкости отлична от нуля только компонента по θ (r , θ и z — цилиндрические координаты), которая зависит только от r . По достижении определенной критической скорости вращения это так называемое течение Куэтта становится неустойчивым и на него накладывается возмущение, состоящее из равномерно распределенных по пространству кольцевых вихрей, как показано на рис. 29.1. Если A обозначает некоторую меру интенсивности вихрей, скажем максимум компоненты скорости возмущения по r или по z , то A зависит от угловой

скорости Ω внутреннего цилиндра так, как это схематически изображено на рис. 29.2, а. Два возможных знака A при заданном значении Ω соответствуют двум возможным направлениям вращения вихря, которые одинаково вероятны и определяются начальными условиями (соседние вихри вращаются в противоположных направлениях). Если Ω лишь немного превосходит критическую скорость Ω_1 , то величина $|A|$ приблизительно пропорциональна $\sqrt{\Omega - \Omega_1}$.

Появление нового течения при $\Omega = \Omega_1$ называется *бифуркацией*. В только что описанном случае это бифуркация к другому стационарному течению: в фиксированной точке пространства скорость жидкости не зависит от времени, а кольцевые вихри являются устойчивыми и сохраняются до тех пор, пока внутренний цилиндр не перестанет вращаться.

Когда будет превышено второе критическое значение угловой скорости Ω_2 , кольцевые вихри станут неустойчивыми и произойдет вторая бифуркация к волнистым вихрям, схематически изображенным на рис. 29.3. Эти волнистые вихри вращаются вокруг общей оси цилиндров примерно со средней угловой скоростью жидкости в течении Куэтта. Следовательно, в

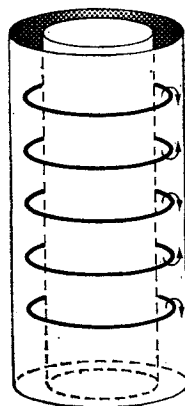


Рис. 29.1. Вихри Тейлора.

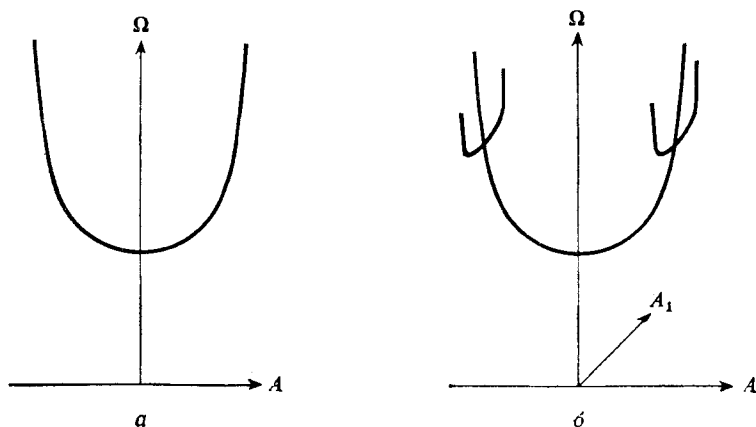


Рис. 29.2. Бифуркации в задаче Тейлора.

фиксированной точке пространства скорость жидкости будет теперь периодической функцией времени. Если A_1 обозначает амплитуду волн, то A_1 зависит от Ω так, как это показано на рис. 29.2, б.

Возможно, более известным примером является бифуркация в течении за круговым цилиндром. При небольшой скорости набегающей жидкости на цилиндр течение за ним будет ламинарным, но после превышения ею некоторого критического значения оно станет неустойчивым и перейдет в так называемую вихревую дорожку Кармана, в которой вихри образуются попеременно на двух сторонах цилиндра (их оси параллельны цилиндру), а затем движутся вниз по потоку со скоростью, примерно вдвое меньшей скорости окружающей жидкости. В этом случае после первой бифуркации течение будет периодическим.

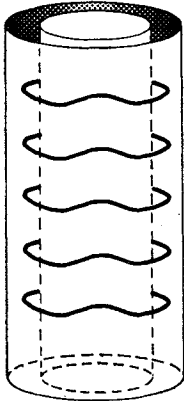


Рис. 29.3. Волнистые вихри в задаче Тейлора.

29.3. УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ — СТОКСА

Уравнения Навье—Стокса, записанные через переменные поля скоростей жидкости $u(x, t)$ и поля ее давлений $p(x, t)$ имеют вид

$$\frac{du}{dt} + (u \cdot \nabla) u + \nabla p - \nu \nabla^2 u = 0, \quad (29.3.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (29.3.2)$$

Они должны выполняться в некоторой области \mathcal{R} физического пространства вместе с граничным условием

$$u \text{ задано на } \partial\mathcal{R} \quad (29.3.3)$$

и надлежащим начальным условием. Здесь плотность принята равной единице за счет выбора системы единиц измерения.

Пусть $\dot{u}(x)$, $\dot{p}(x)$ — некоторое стационарное решение этих уравнений, соответствующее, например, течению Куэтта в задаче Тейлора. Для изучения влияния возмущений (конечных или инфинитезимальных) на это решение удобно представить полные поля в виде

$$\dot{u}(x) + u(x, t), \quad \dot{p}(x) + p(x, t),$$

где u и p обозначают теперь отклонения от выбранного стационарного решения. Эти отклонения удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{du}{dt} + (\dot{u} \cdot \nabla) u + (u \cdot \nabla) \dot{u} + (u \cdot \nabla) u + \nabla p - \nu \nabla^2 u = 0, \quad (29.3.4)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (29.3.5)$$

$$u = 0 \text{ на } \partial\mathcal{R}, \quad (29.3.6)$$

которая не является результатом линеаризации исходной задачи (она нелинейна). Теперь известная функция $\dot{u}(x)$ входит в коэффициенты членов, линейных по u .

29.4. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Каждой задаче о гидродинамической устойчивости соответствует некоторая эволюционная задача в банаховом (практически в гильбертовом) пространстве H , определяемая эволюционным уравнением

$$du/dt = Lu + B(u, u), \quad u = u(t) \in H, \quad t \geq 0, \quad (29.4.1)$$

и начальным условием

$$u(0) = u_0 \text{ (заданная функция)}. \quad (29.4.2)$$

Для каждого t элемент $u(t)$ является точкой пространства H и описывает мгновенное состояние системы, т. е. поле скоростей $u(x)$ и поле давлений $p(x)$ в физическом пространстве; L — линейный оператор. Уравнение Навье — Стокса, взятое в форме (29.4.1), содержит нелинейные квадратичные члены, совокупность которых обозначена через $B(u, u)$, где $B(\cdot, \cdot)$ — билинейная функция с надлежащей областью определения в пространстве $H \times H$. Иногда вместо $B(u, u)$ мы будем писать $Q(u)$.

В ряде случаев удобно рассматривать более общее уравнение

$$M du/dt = Lu + B(u, u), \quad (29.4.3)$$

где M — другой линейный оператор. Если M допускает обращение, то это уравнение может быть сведено к (29.4.1). Но нередко эволюционный процесс охватывает не все пространство H , а лишь некоторое его подпространство H_0 . Тогда M допускает обращение на этом подпространстве, а не на всем пространстве H , и к тому же оператор M^{-1} может оказаться достаточно сложным с вычислительной точки зрения. Поэтому уравнение (29.4.3) часто оказывается полезным.

В следующей главе рассматривается гильбертово пространство специального вида, удобное для решения задачи Тейлора.

29.5. ЗАДАЧА С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ. ПОЛУПОТОК В H

Основными членами в уравнении Навье — Стокса (29.3.1) являются первый и последний члены в левой части — они делают его сходным с уравнением диффузии. Задача, определяемая соответствующим уравнением диффузии с подходящими граничными условиями, имеет единственное решение для начальных элементов u из некоторого плотного в H множества, и это решение непрерывно зависит от начального u . Благодаря этой непрерывной зависимости можно определить обобщенные решения для любых начальных элементов u , и они также будут непрерывно зависеть от начального u (см. книгу Рихтмайера и Мортонa [1967]). В общем случае решение не может быть продолжено назад, в сторону от-

рицательных t , хотя иногда это возможно; в частности, это возможно для решений, являющихся собственными колебаниями.

Полное нелинейное уравнение Навье — Стокса обладает аналогичными общими качественными свойствами (см. работы Ладыженской [1970, 1975] и книгу Марседена и Мак-Кракена [1976, гл. 9]), однако доказательства в этом случае усложняются, а теория выглядит менее полной.

Будем предполагать, что каждое из уравнений (29.4.1), (29.4.3) имеет в H единственное решение $u(t)$ при $t \geq 0$ для произвольного $u(0) \in H$. Для заданного начального u обозначим это решение через $\varphi(u, t)$, т. е. положим

$$u(t) = \varphi(u(0), t). \quad (29.5.1)$$

При фиксированном u функция $\varphi(u, t)$ ($t \geq 0$) называется *движением* в H ; при фиксированном $t \geq 0$ соответствие $u \rightarrow \varphi(u, t)$ является отображением в H , и мы будем считать его непрерывным; при $t=0$ оно совпадает с тождественным отображением, поскольку $\varphi(u, 0) = u$. Функция $\varphi(\cdot, \cdot)$ называется *полупотоком* в H .

Хотя движения в общем случае не могут быть непрерывно продолжены назад по времени, такое продолжение, если оно существует, определяется однозначно. Иначе говоря, два различных движения за конечное время никогда не могут слиться и стать далее неразличимыми.

29.6. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Возьмем в качестве линеаризации (29.4.1) уравнение

$$du/dt = Lu \quad (29.6.1)$$

и будем искать решения этого уравнения в виде

$$u(t) = \psi e^{\lambda t}. \quad (29.6.2)$$

Это означает, что нужно найти собственные функции ψ и собственные значения λ оператора L , т. е. решить уравнение

$$L\psi = \lambda\psi \quad (29.6.3)$$

при условии, конечно, что $\psi \neq 0$. [Если исходить из (29.4.3), то нужно решать уравнение $L\psi = \lambda M\psi$.]

В гидродинамических задачах оператор L не является самосопряженным, и поэтому мы не можем применить обычную спектральную теорию. Тем не менее в большинстве случаев L имеет чисто точечный спектр, состоящий из счетного числа собственных значений, так что

$$L\psi_j = \lambda_j\psi_j \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (29.6.4)$$

Обсуждение вопроса о полноте системы $\{\psi_j\}$ собственных функций для определенных гидродинамических задач можно найти в статье Ди Примы и Хабетлера [1969], которые использовали для этого теорему Наймарка об операторах в гильбертовом пространстве. Более общий подход излагается у Сэттинджера [1970], применившего теорему Карлемана. Полнота понимается в том смысле, что конечные линейные комбинации функций ψ_j плотны в H . При этом имеется в виду, что рассматриваются не только собственные, но и *обобщенные собственные функции* (если они существуют), т. е. такие векторы ψ , для которых

$$(L - \lambda I)^{k+1}\psi = 0, \quad (L - \lambda I)^k\psi \neq 0. \quad (29.6.5)$$

(При $k=0$ ψ — обычная собственная функция.)

В гидродинамике всегда предполагается, что для задач на собственные значения существуют лишь обычные собственные функции. По аналогии с конечномерным случаем кажется вероятным, что существование обобщенных собственных функций не является типичным свойством течений жидкости (см. приложение к гл. 31). Матрицу A размера $n \times n$ можно рассматривать как точку пространства V , имеющего размерность n^2 . Для существования у матрицы A обобщенного собственного вектора необходимо, чтобы ее характеристическое уравнение

$$p(\lambda; A) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A - \lambda I) = 0 \quad (29.6.6)$$

имело кратный корень, т. е. такой корень, который одновременно удовлетворял бы уравнению

$$dp(\lambda; A)/d\lambda = 0. \quad (29.6.7)$$

Исключив λ из (29.6.6) и (29.6.7), можно получить алгебраическое уравнение, которому должна удовлетворять матрица A ; следовательно, только матрицы A , принадлежащие некоторой поверхности в пространстве V , т. е. некоторому множеству меры нуль, могут иметь обобщенные собственные векторы.

Мы будем предполагать, что оператор L имеет только обычные собственные функции.

Между прочим, для задач, решаемых численно в гильбертовом пространстве, нетрудно проверить возможность существования обобщенных собственных функций. Если решено уравнение $L\psi = \lambda\psi$, а затем для какого-либо из найденных λ получены решения сопряженного уравнения $L^*\chi = \bar{\lambda}\chi$ и при этом оказалось, что $(\chi, \psi) \neq 0$, то не существует обобщенных собственных векторов, соответствующих этому собственному значению λ^1 .

¹) Анализируя численное значение скалярного произведения, не следует забывать о приближенном характере вычислений.—Прим. перев.

Для задач гидродинамики собственные значения лежат главным образом на вещественной отрицательной полуоси или вблизи нее, а точнее, в области, ограниченной параболой

$$\operatorname{Re} \lambda \leq c_0 - c_1 (\operatorname{Im} \lambda)^2 \quad (c_1 > 0);$$

c_0 обычно возрастает с возрастанием числа Рейнольдса R , но при любом R только конечное число собственных значений лежит в правой полуплоскости. Поскольку уравнения Навье — Стокса вещественны, собственные значения либо вещественны, либо образуют комплексно сопряженные пары.

29.7. ПРИВЕДЕНИЕ К КОНЕЧНОМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

Для изучения начальной стадии турбулентности нет необходимости знать все траектории системы (29.4.1) в гильбертовом пространстве H . Достаточно рассмотреть одно специальное семейство траекторий, которые, согласно приводимым ниже физическим соображениям, принадлежат так называемому неустойчивому многообразию, возникающему в H из нуля в момент бифуркации. Движения в этом многообразии образуют конечномерную динамическую систему. Эта идея была использована Дэви, Ди Примо и Стюартом [1968], а также Рюэлем и Такенсом [1971].

Устойчивые и неустойчивые многообразия играют важную роль в теории дифференцируемых динамических систем: см. работы Смейла [1967], Абрахама и Роббина [1967], а также Келли [1967]. Большая часть теории берет начало в небесной механике и не может быть непосредственно применена к нашей задаче, потому что 1) динамические системы в небесной механике конечномерны с самого начала, а в гидродинамике нет и 2) в первом случае они являются гамильтоновыми, тогда как во втором строго диссипативными и их решения не продолжаются, вообще говоря, в область отрицательных времен, так что первые определяют поток в гильбертовом пространстве, а вторые — только полупоток (однако см. книгу Селла [1971], где большая часть теории сформулирована так, чтобы включались полупотоки). Наш подход в основном интуитивный, но он опирается на физические соображения.

Предположим, что значение числа Рейнольдса длительное время поддерживается постоянным и несколько превышающим первое критическое значение; предположим далее, что для этого значения в правой комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$ находится некоторое конечное число собственных значений λ_k линеаризованной задачи ($k = 1, \dots, K$), а остальные собственные значения лежат в левой полуплоскости. Пусть в очень ранний период (при больших отрицательных t), который мы назовем *ранним линейным режимом*, было наложено произвольное, но очень малое возмущение, представляющее собой линейную комбинацию всех собст-

венных колебаний $\psi_k e^{\lambda_k t}$ (k изменяется от 1 до ∞); с течением времени (когда t еще отрицательно) в *позднем линейном режиме* вклад всех собственных колебаний, за исключением первых K из них, становится несущественным и возмущение можно будет записать в виде линейной комбинации

$$\sum_{k=1}^K a_k \psi_k e^{\lambda_k t}, \quad (29.7.1)$$

где a_k — постоянные коэффициенты; будем считать, что это возмущение все еще достаточно мало, а входящие в него собственные функции возрастают экспоненциально и независимо одна от другой. Еще позднее наступает *нелинейный режим* развития возмущения (включающий «настоящий» момент времени $t=0$), когда возмущение, продолжая расти, из-за нелинейности теряет свою простую

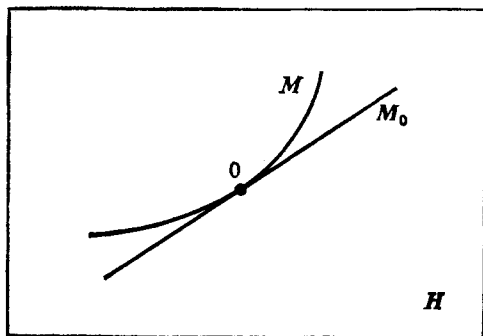


Рис. 29.4.

форму (29.7.1) (хотя еще и остается зависящим от параметров a_1, \dots, a_K) и может, например, переходить по спирали в замкнутую траекторию или иметь другое сложное нелинейное поведение.

Если зафиксировать момент времени (например, положить $t=0$) и варьировать значения параметров a_1, \dots, a_K , то получившиеся точки будут лежать на K -мерной поверхности или многообразии M в гильбертовом пространстве и это многообразие будет в нуле касаться линейного многообразия M_0 , натянутого на собственные векторы ψ_1, \dots, ψ_K (см. рис. 29.4). Многообразие M инвариантно относительно полупотока в H , определенного при помощи (29.4.1), в том смысле, что любая траектория, начинающаяся на M , не выходит из M , поскольку, согласно (29.7.1), сдвиг начала отсчета времени на t_0 , очевидно, эквивалентен изменению значений параметров по правилу $a_k \rightarrow a_k e^{\lambda_k t_0}$.

Лежащие в M траектории можно интерпретировать как движения некоторой динамической системы с K степенями свободы. Свойства этой системы мы и хотим изучить.

M называется *неустойчивым многообразием* в H , исходящим или зарождающимся из нуля. Неустойчивое многообразие, исходящее из любой другой фиксированной точки в H , можно определить аналогичным образом после предварительной линеаризации эволюционного уравнения в окрестности этой точки.

По поводу неустойчивых многообразий, исходящих из замкнутых или квазипериодических траекторий, мы рекомендуем читателю книгу Абрахама и Роббина [1967] (точнее, написанное Келли приложение С к ней).

Многообразие M является *локально притягивающим* в следующем смысле: существует такая окрестность нуля, что любая траектория, принадлежащая этой окрестности при всех $t > 0$, стремится к M при $t \rightarrow \infty$. Мы не будем уточнять это утверждение, за исключением одного случая: если M возникает в результате критической бифуркации при $R = R_c$ (именно такие примеры рассматриваются в оставшихся параграфах этой главы), то при $R > R_c$ многообразие M будет содержать новую неподвижную точку (в дополнение к нулю) или новую замкнутую траекторию — инвариантный тор, которая находится вблизи нуля и является устойчивой (в действительности притягивающей) относительно возмущений, принадлежащих M ; тогда если разность $R - R_c$ достаточно мала, то этот новый инвариантный объект будет притягивающим для произвольных малых возмущений (не обязательно принадлежащих M). Например, Дэви [1962] показал, что вихри Тейлора устойчивы в соответствующем двумерном неустойчивом многообразии, и мы заключаем отсюда, что при достаточно малой величине разности $R - R_c$ они будут устойчивы относительно произвольных малых возмущений, как это и наблюдается в экспериментах.

В линейном приближении локальная устойчивость M отражает экспоненциальное затухание со временем всех собственных колебаний кроме тех из них, которые вызвали появление M [см. (29.7.1)].

Координаты в M можно выбирать различными способами. Более удобными по сравнению с параметрами a_1, \dots, a_K являются координаты x_1, \dots, x_K , получающиеся при помощи проектирования на линейное многообразие M_0 , касательное к M в нуле пространства H . Для любого $u \in H$ такая проекция получается в результате действия на него оператора P , а именно

$$Pu = \sum_{k=1}^K (\chi_k, u) \psi_k, \quad (29.7.2)$$

где $\{\chi_k\}$ — система собственных функций сопряженной задачи, образующая базис, биортогональный к $\{\psi_k\}$. Следовательно, координаты любого u из неустойчивого многообразия M вычисля-

ются по формулам

$$x_k = (x_k, u), \quad k=1, \dots, K. \quad (29.7.3)$$

Для траекторий на M уравнение движения (29.4.1) примет вид

$$\dot{x}_k = F_k(x_1, \dots, x_K), \quad k=1, \dots, K. \quad (29.7.4)$$

Для точек вблизи нуля будем иметь

$$F_k(x_1, \dots, x_K) = \lambda_k x_k + \text{члены высшего порядка.} \quad (29.7.5)$$

Алгоритм вычисления функций F_k описывается в следующей главе. Он основан на том соображении, что если $u(x_1, \dots, x_K)$ — точка многообразия M (она входит и в H), имеющая координаты x_1, \dots, x_K , а $\{x_k(t)\}$ ($k=1, \dots, K$) — любое решение системы (29.7.4), то функция

$$u(t) = u(x_1(t), \dots, x_K(t)) \quad (29.7.6)$$

должна удовлетворять в H эволюционному уравнению (29.4.1). Этого требования вполне достаточно для определения как зависимости $x_K(\cdot)$ от t , так и зависимости $u(\cdot)$ от $\{x_k\}$. В алгоритме предполагается аналитичность по всем аргументам, и поэтому $u(x_1, \dots, x_K)$ можно представлять в виде степенных рядов по x_k с коэффициентами из пространства H , а $F_k(x_1, \dots, x_K)$ — в виде обычных степенных рядов. Это предположение следует рассматривать как предварительное, хотя оно и подкрепляется тем известным фактом, что решение уравнений Навье — Стокса принадлежит по крайней мере C^∞ (см. книгу Марсдена и Мак-Кракена [1976]).

Для n -мерных обратимых систем, рассматриваемых в небесной механике, можно определить также *устойчивое многообразие*, зарождающееся из нуля (и аналогично из любой другой неподвижной точки); оно касается в нуле линейного многообразия, натянутого на оставшиеся собственные векторы $\varphi_{K+1}, \dots, \varphi_n$. Его можно охарактеризовать как состоящее из таких движений $u(t)$, для которых $u(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В действительности устойчивое многообразие обычно вводится первым, а затем неустойчивое многообразие определяется как такое устойчивое, которое получилось бы при замене t на $-t$. Хотя в гидродинамике большинство движений не допускает обращения по времени, часть из них, образующая неустойчивое многообразие M , допускает это, так что M может быть описано как состоящее из таких обратимых движений, для которых $u(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$.

В § 29.10 нам потребуется другая трактовка неустойчивого многообразия, которая связана скорее с отображениями, чем с потоками. Вместо семейства отображений $u \rightarrow \varphi(u, t)$ в гильбертовом пространстве, зависящих от непрерывного параметра t , рассмотрим семейство отображений $x \rightarrow \Phi_m(x)$ в n -мерном много-

образии M , зависящих от дискретного параметра m и определяемых с помощью итераций Φ :

$$\Phi_m(x) = \Phi(\Phi(\dots\Phi(x)\dots)) \quad (m \text{ итераций}).$$

Предположим, что $x=0$ — неподвижная точка Φ . После линеаризации в малой окрестности нуля получим

$$\Phi(x) = Mx + \text{члены высшего порядка},$$

где M — матрица размера $n \times n$. Если собственные значения $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($k < n$) матрицы M лежат вне единичной окружности $|\alpha| = 1$ и им соответствуют независимые собственные векторы v_1, \dots, v_k , а все другие собственные значения лежат внутри единичной окружности, то существует k -мерное инвариантное многообразие N , лежащее в M и касающееся в нуле линейного многообразия N_0 , натянутого на векторы v_1, \dots, v_k (см. книгу Абрахама и Роббина [1967] или статью Смейла [1967]).

Замечание о вещественных и комплексных гильбертовых пространствах. В соответствующем гидродинамической системе гильбертовом пространстве H для функций p, u, v, w (давления и компонент поля скоростей) приходится допускать комплексные значения, тогда как для физических течений они вещественны, и поэтому физические решения должны лежать в вещественном подпространстве H_0 пространства H . Так как уравнения Навье—Стокса вещественны, собственные значения линеаризованной задачи либо вещественны, либо образуют комплексно сопряженные пары. Можно считать, что собственная функция ψ_k вещественна, если вещественно λ_k , и что ψ_k и $\psi_{k'}$, являются комплексно сопряженными, если таковыми являются λ_k и $\lambda_{k'}$. Тогда в представлении $u = \sum c_k \psi_k$ элемента из H нужно считать c_k вещественными для вещественных λ_k и комплексно сопряженными для комплексно сопряженных λ_k — при этом u будет принадлежать H_0 . При таком подходе многообразие M будет вещественной K -мерной поверхностью, касающейся в нуле вещественного линейного подпространства $M_0 \subset H_0$, а координаты x_k в M , задаваемые при помощи (29.7.3), также либо будут вещественными для вещественных λ_k , либо $x_k = \bar{x}_{k'}$, если $\lambda_k = \bar{\lambda}_{k'}$.

29.8. БИФУРКАЦИЯ К НОВОМУ СТАЦИОНАРНОМУ СОСТОЯНИЮ

В более простой из двух классических теорем Хопфа о бифуркациях предполагается, что одно простое вещественное собственное значение $\lambda_1(R)$ переходит в правую полуплоскость (т. е. проходит через нуль) в тот момент, когда число Рейнольдса, увеличиваясь, проходит через критическое значение R_c . Итак,

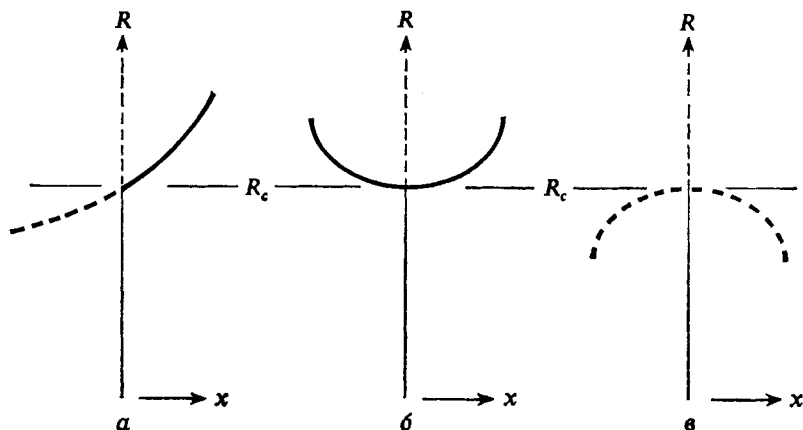


Рис. 29.5.

пусть

$$\lambda_1(R_c) = 0, \quad \lambda'_1(R_c) = \beta > 0. \quad (29.8.1)$$

В этом случае неустойчивое многообразие одномерно, а описывающая движение система (29.7.4) сведется к одному уравнению

$$\dot{x} = F(x; R), \quad (29.8.2)$$

в котором у x опущен нижний индекс 1 и учтена зависимость от R . При помощи (29.7.5) и (29.8.1) это уравнение можно переписать в виде

$$\dot{x} = \beta(R - R_c)x + \text{члены высшего порядка}. \quad (29.8.3)$$

Стационарные траектории $\dot{x} = 0$ представляются точками кривой $F(x; R) = 0$ в плоскости x, R . Это геометрическое место точек состоит из отрезка оси R и кривой, проходящей через точку $x = 0, R = R_c$; три возможных случая представлены на рис. 29.5, а, б и в.

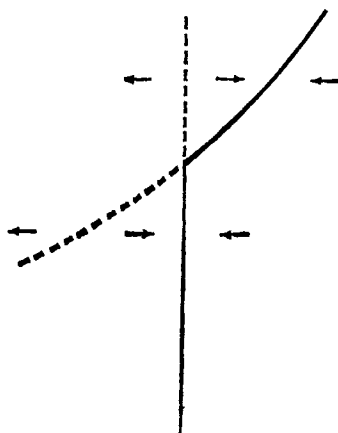


Рис. 29.6.

Если следующий по порядку малости член в (29.8.3) равен ax^2 , то имеет место несимметричная бифуркация; если он равен ax^3 , то бифуркация симметрична — она будет критической при $a < 0$ и докритической при $a > 0$.

Устойчивость определяется знаком \dot{x} в точках вблизи кривых. Например, на рис. 29.6 показано стрелками движение точек в

плоскости x , R в случае несимметричной бифуркации. Во всех случаях восходящие ветви устойчивы, а нисходящие нет, тогда как решение $x=0$ всегда неустойчиво при $R > R_c$.

В докритической бифуркации, которую иллюстрирует рис. 29.5, в, нет устойчивого равновесия в окрестности решения $x=0$ при $R > R_c$. Если в этом случае R , очень медленно возрастая, проходит через R_c , то типичная траектория переводит систему из точки $x \approx 0$ в далекие точки конфигурационного пространства за относительно короткий промежуток времени, как только R превышает R_c . Это явление называется *взрывным переходом* и противоположно переходу в виде адиабатической последовательности устойчивых состояний, которые характеризуют траекторию в других случаях.

29.9. БИФУРКАЦИЯ К ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ

Во второй классической теореме Хопфа о бифуркациях предполагается, что одна пара комплексно сопряженных собственных значений переходит в правую полуплоскость в тот момент, когда R , увеличиваясь, проходит через R_c , а все остальные собственные значения находятся в левой полуплоскости. Пусть переходят значения

$$\lambda_1, \lambda_2 = \sigma \pm i\omega = \sigma(R) \pm i\omega(R), \quad (29.9.1)$$

где

$$\sigma(R_c) = 0, \quad \sigma'(R_c) > 0, \quad \omega(R_c) \neq 0. \quad (29.9.2)$$

Теперь многообразие M двумерно. Вместо комплексно сопряженных координат x_1 и x_2 мы введем в M вещественные координаты x и y , так что $x_1 = x + iy$, $x_2 = x - iy$.

В первом приближении движение в M , согласно (29.7.4) и (29.7.5), описывается уравнением

$$d(x + iy)/dt = \lambda_1(x + iy) = (\sigma + i\omega)(x + iy).$$

Вблизи нуля траектории приближенно будут выглядеть как спирали:

$$(x + iy) \approx \text{const} \cdot e^{\sigma t} (\cos \omega t + i \sin \omega t).$$

В полярных координатах мы имеем

$$\dot{r} = \sigma r + O(r^2), \quad \dot{\theta} = \omega + O(r). \quad (29.9.3)$$

Отсюда следует, что в некоторой окрестности нуля на любой траектории θ всегда возрастает, а r всегда положителен; r может как возрастать, так и убывать; вблизи нуля r возрастает при $\sigma > 0$ и убывает при $\sigma < 0$. Теперь попробуем понять, что будет чуть дальше от нуля.

Определим для нашей задачи отображение Пуанкаре как отображение $x \rightarrow \Phi(x)$ оси x в M , полагая, что если траектория имеет координаты $x, 0$ при некотором t , то она будет иметь координаты $\Phi(x), 0$, когда θ увеличится на 2π . Заметим, что x и $\Phi(x)$ могут быть либо одновременно положительными, либо одновременно отрицательными. Пусть

$$\Phi(x) = x(1 + g(x)). \quad (29.9.4)$$

Структура траектории зависит от свойств функции $g(x)$. Из формул, описывающих спираль вблизи нуля, вытекает, что

$$1 + g(0) = e^{2\pi\sigma/\omega}; \quad (29.9.5)$$

в частности, $g(0) = 0$ при $R = R_c$, поскольку тогда $\sigma = 0$. Следовательно, разложив $g(x)$ в ряд Тейлора по x и по разности $R - R_c$, мы будем иметь

$$g(x) = g(x; R) = ax + b(R - R_c) + cx^2 + \dots \quad (29.9.6)$$

Коэффициент a должен быть равен нулю, так как в противном случае функция $g(x, R_c)$ имела бы противоположные знаки при $x > 0$ и $x < 0$ вблизи точки $x = 0$, а отсюда следовало бы, что траектория должна быть самопересекающейся, т. е. ее второй виток с одной стороны был бы дальше от нуля, чем первый, а с другой ближе. Коэффициент b положителен, так как, согласно предположению (29.9.2) относительно σ , траектории вблизи нуля раскручиваются по спирали при $R > R_c$ и скручиваются при $R < R_c$.

Рассмотрим на плоскости x, R множество точек, удовлетворяющих уравнению $g(x, R) = 0$. Если x_0, R_0 — одна из таких точек, то при $R = R_0$ будем иметь $\Phi(x_0) = x_0$, т. е. существует замкнутая траектория, пересекающая ось x при $x = x_0$. Это множество содержит точку $x = 0, R = R_c$; вблизи этой точки оно представляет собой кривую, которая пересекает ось R горизонтально; эта кривая направлена вверх, как на рис. 29.5, б, если $c < 0$, и направлена вниз, как на рис. 29.5, в, если $c > 0$. Бифуркация называется *закритической* в первом из этих двух случаев и *докритической* во втором. Как и в предыдущем параграфе, следует ожидать взрывного перехода, если $c > 0$.

29.10. БИФУРКАЦИЯ ОТ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ К ИНВАРИАНТНОМУ ТОРУ

Следующая бифуркация после той, которая привела к замкнутой траектории, т. е. к периодическому движению, может привести к двумерному инвариантному тору, как это показывает пример Хопфа [1948]. Теоремы об этой бифуркации приводятся у различных авторов, включая Наймарка [1959], Саккера [1964], Рюэля и Такенса [1971] и Ланфорда [1973]. Такие теоремы основываются главным

образом на теории Флоке, но мы выберем более наглядный подход, опирающийся на понятие отображения Пуанкаре.

Пусть R_1 — критическое значение числа Рейнольдса R , характеризующее первое появление периодических траекторий в закрытой бифуркации, обсуждавшейся в предыдущем параграфе. Предположим, что при некотором $R > R_1$ размерность неустойчивого многообразия M равна K . Многообразие M содержит двумерное многообразие, описанное в предыдущем параграфе, и мы предположим, что координаты в M выбраны так, что первые две из них — это координаты x, y из предыдущего параграфа; остальные координаты обозначим через x_3, \dots, x_K .

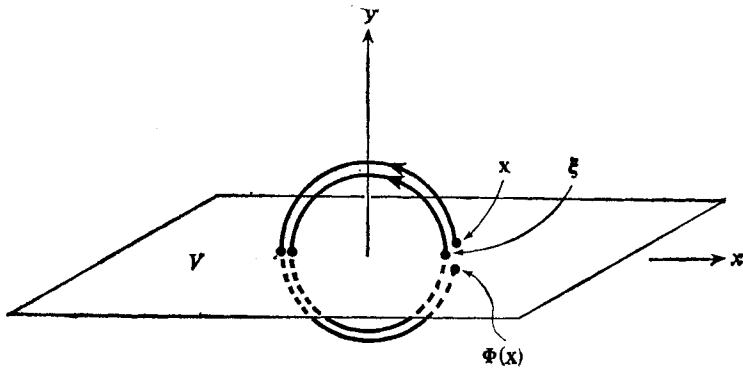


Рис. 29.7.

Тогда, если R лишь немного превосходит R_1 , то замкнутые траектории обходят нуль в подпространстве x, y и каждая из них один раз пересекает положительную и отрицательную полуоси оси x . Пусть V есть $(K-1)$ -мерная гиперповерхность в M , заданная уравнением $y=0$; тогда V дважды пересекается замкнутой траекторией, как схематически показано на рис. 29.7, и мы обозначим одно из этих пересечений как $x = \xi = \xi(R)$, где x есть $(K-1)$ -мерный вектор с компонентами x, x_3, \dots, x_K . Для x , близких к ξ , определим $\Phi(x)$ как вторую по счету точку пересечения V с той траекторией, которая начинается в x (см. рисунок). Тогда

$$\Phi: x \rightarrow \Phi(x)$$

— отображение Пуанкаре, определенное в некоторой окрестности точки ξ в V . Отметим, что $\Phi(\xi) = \xi$. Для x , близких к ξ , после линеаризации будем иметь

$$\Phi(x) - \xi = M(x - \xi) + \text{члены высших порядков}, \quad (29.10.1)$$

где M — матрица размера $(K-1) \times (K-1)$.

Теперь предположим, что M имеет одну пару собственных значений $\alpha (= \alpha(R))$ и $\bar{\alpha}$ с соответствующими им собственными векторами v, \bar{v} , такую, что

$$|\alpha(R_2)| = 1 \text{ для некоторого } R_2 > R_1, \quad (29.10.2)$$

$$d|\alpha(R)|/dR|_{R=R_2} > 0, \quad (29.10.3)$$

тогда как все прочие собственные значения M лежат внутри единичной окружности. Когда R возрастает, замкнутая траектория теряет устойчивость при $R > R_2$; следовательно, при $R = R_2$ имеет место новая бифуркация.

Согласно § 29.7, при $R > R_2$ отображение Φ в V имеет двумерное инвариантное неустойчивое многообразие или поверхность S в V , касающаяся в точке ξ линейного многообразия S_0 , натянутого на векторы v и \bar{v} . Чтобы сделать наши рассуждения более наглядными, будем считать поверхность V двумерной; тогда $S = V$ и S инвариантна относительно Φ ; следовательно, можно считать Φ отображением в S . Пусть u и v — такие вещественные координаты в S , что проекция элемента $x = \xi$ из S на S_0 равна $(u + iv)v + (u - iv)\bar{v}$, и пусть $z = u + iv$. Тогда отображение Пуанкаре примет вид $z \rightarrow z' = \alpha z + \text{члены высших порядков}$, или, точнее,

$$\Phi: z \rightarrow z' = \alpha z \left[1 + \sum_{j+k=1}^{\infty} q_{jk} z^j \bar{z}^k \right], \quad (29.10.4)$$

где q_{jk} — некоторые коэффициенты (в общем случае комплексные), а суммирование происходит по всем целым неотрицательным j и k , для которых $j + k \geq 1$.

При определенных дополнительных предположениях будет показано, что при $R > R_2$ существует почти круговая инвариантная замкнутая кривая \mathcal{E} в S , обходящая точку ξ . Пусть теперь \mathcal{E} переносится течением в M ; тогда она покинет V и начнет описывать инвариантную трубу в M , которая затем замкнется, образовав тор, когда \mathcal{E} снова окажется на поверхности V вблизи точки ξ .

Чтобы облегчить анализ отображения Пуанкаре, удобно ввести в S вместо u и v новые координаты ξ и η . Выберем эти координаты так, чтобы привести отображение Пуанкаре к настолько простой, насколько это возможно, форме (нормальной форме), т. е. чтобы исключить в (29.10.4) некоторые нелинейные члены. При $|\alpha| \neq 1$ можно исключить столько нелинейных членов, сколько представляется нужным (см. книгу Зигеля [1956, § 21]), но, чтобы при прохождении R через значение R_2 , когда $|\alpha(R)| = 1$, искомое преобразование не имело особенности, нужно в (29.10.4) оставить член $\alpha q_{11} z^2 \bar{z}$; таким образом, можно исключить все остальные члены по-

рядка не выше 4. (В принципе можно было бы исключить все члены порядка не выше 6, оставив лишь член $\alpha q_{22} z^2 \bar{z}^2$, и т. д., но исключение членов порядка не выше 4 — это в точности то, что необходимо нам для проведения анализа.) Перейдем к представлению $\zeta = \xi + i\eta$ с помощью равенств

$$z = \zeta + \sum_{l+m=2}^4 \varphi_{lm} \zeta^l \bar{\zeta}^m, \quad (29.10.5)$$

$$z' = \zeta' + \sum_{l+m=2}^4 \varphi_{lm} \zeta'^l \bar{\zeta}'^m \quad (29.10.6)$$

и выберем в них коэффициенты φ_{lm} таким образом, чтобы после подстановки этих соотношений в (29.10.4) отображение Пуанкаре приняло *нормальную форму*

$$\zeta \rightarrow \zeta' = \alpha \zeta (1 + \beta |\zeta|^2) + O(\zeta^5), \quad (29.10.7)$$

где $O(\zeta^5)$ содержит члены степени 5 и выше по ζ и $\bar{\zeta}$, а β — новая постоянная. Чтобы выразить коэффициенты φ_{lm} через заданные коэффициенты q_{jk} , подставим в правую часть (29.10.4) в качестве z правую часть (29.10.5), затем подставим в правую часть (29.10.6) в качестве ζ' правую часть (29.10.7) и подставим этот результат в качестве z' в левую часть (29.10.4). После этого (29.10.4) станет тождеством по ζ и $\bar{\zeta}$ и в нем полный коэффициент при $\zeta^p \bar{\zeta}^q$ можно приравнять нулю. Получившиеся таким образом уравнения, если их расположить в правильном порядке, могут быть разрешены относительно коэффициентов φ_{lm} при условии, что

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 \text{ и } \alpha^5 \text{ не равны } 1, \quad (29.10.8)$$

как это объясняется в приложении к данной главе. (Уравнение, получающееся при $p=2$ и $q=1$, не может быть разрешено относительно φ_{21} , если $|\alpha|=1$, но оно всегда разрешимо относительно β , и мы просто положим $\varphi_{21}=0$.)

Для успешного применения этого метода мы должны предположить, согласно (29.10.8), что, когда при возрастании R точка $\alpha(R)$ пересекает единичную окружность $|\alpha|=1$ в комплексной плоскости, она не совпадает ни с одним из корней из единицы степени меньше 6. Тот случай, когда она совпадает с одним из этих корней, кратко обсуждается в следующем параграфе.

Введем вместо R новый безразмерный параметр $\mu = |\alpha(R)| - 1$ и используем полярные координаты r и θ , в которых $\zeta = r e^{i\theta}$; тогда отображение Пуанкаре примет вид

$$\Phi: \begin{cases} r' = (1 + \mu) r + c_1 r^3 + f(r, \theta) r^5, & (29.10.9) \\ \theta' = \theta + c_2 + c_3 r^2 + g(r, \theta) r^4, & (29.10.10) \end{cases}$$

где f и g — гладкие функции, а c_1, c_2, c_3, f, g гладко зависят от μ в некоторой окрестности значения $\mu=0$.

Константа c_1 играет роль постоянной Ландау: если $c_1 < 0$ (именно это мы и предположим), бифуркация будет закритической.

Если в (29.10.9) не учитывать член высшего порядка малости, содержащий $f(r, \theta)$, то кривая \mathcal{C}_0 , для которой $r = r_0$, где

$$r_0 = \sqrt{\mu/(-c_1)},$$

была бы при $\mu > 0$ инвариантной относительно отображения Пуанкаре. Она концентрична с замкнутой траекторией, изображенной на рис. 29.7; следовательно, при своем движении по течению в M она образовала бы тор. Чтобы учесть влияние отброшенного члена, определим последовательность кривых

$$\mathcal{C}_n: \{r = r_n(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

по индукции, начиная с \mathcal{C}_0 и полагая далее $\mathcal{C}_{n+1} = \Phi(\mathcal{C}_n)$. Можно показать, что для достаточно малых μ (т. е. для достаточно малой разности $R - R_2$) эти кривые сходятся при $n \rightarrow \infty$ к предельной кривой \mathcal{C}_∞ , которая и будет инвариантной относительно Φ .

Доказательства сходимости и ограничений на μ слишком длинны и поэтому опущены, за исключением немногих утверждений и формул, приведенных в приложении к этой главе. Показывается, например, что при малом μ кольцо

$$2/3 r_0 < r < 4/3 r_0 \quad (29.10.11)$$

отображается Φ в меньшее кольцо

$$(2/3 + 5/27\mu) r_0 < r' < (4/3 - 5/27\mu) r_0. \quad (29.10.12)$$

Это подтверждает тот факт, что Φ — сжимающее отображение. Показано также, что если

$$\Delta_n = \max_{(\theta)} |r_{n+1}(\theta) - r_n(\theta)|$$

— максимальное радиальное перемещение кривой \mathcal{C}_n под действием Φ , то

$$\Delta_{n+1} \leq K \Delta_n, \quad (29.10.13)$$

где константа $K < 1$, если μ достаточно мало. Наконец, показывается, что при достаточно малом μ

$$|dr_n(\theta)/d\theta| < \mu \text{ для всех } n \text{ и всех } \theta, \quad (29.10.14)$$

так что предельная кривая \mathcal{C}_∞ будет по меньшей мере непрерывной по Липшицу.

Наконец, рассмотрим трубку в K -мерном пространстве M , состоящую из траекторий, которые начинаются в точках кривой \mathcal{C}_∞ . Эта трубка соединяется сама с собой, образуя замкнутую поверхность, когда траектории возвращаются на поверхность S , где они

снова проходят через кривую \mathcal{C}_∞ . Такая поверхность гомеоморфна тору, а не бутылке Клейна, поскольку при замыкании трубки ориентация кривой \mathcal{C}_∞ сохраняется [последнее следует из определения отображения Пуанкаре (29.10.9), (29.10.10), откуда видно, что θ' является возрастающей функцией θ].

Мы не утверждаем здесь, что любая отдельная траектория плотно покрывает получившийся тор и, следовательно, является квазипериодической функцией времени. В самом деле, в гл. 31 будет объяснено, что в силу теоремы Пейксото это представляется в общем случае маловероятным.

29.11. СУБГАРМОНИЧЕСКАЯ БИФУРКАЦИЯ

В предыдущем параграфе уже отмечалось, что если $\alpha(R)$ при возрастании R пересекает единичную окружность $|\alpha|=1$ в точке, являющейся корнем из единицы степени менее 6, то изложенным методом нельзя обосновать существование инвариантного тора. В этом случае бифуркация может привести к одной или нескольким дополнительным периодическим траекториям.

Мы рассмотрим только простейшую ситуацию, когда высшие члены в отображении (29.10.4) в основном уже отсутствуют и, следовательно, нет необходимости их исключать. Положим $\alpha = \exp\{2\pi ip/q\}$ ($q \leq 5$) и возьмем отображение вида

$$z' = \alpha z(1 + \beta |z|^2) \quad (\beta \text{ вещественно и отрицательно})$$

или, в полярных координатах,

$$\begin{aligned} r' &= (1 + \mu)r + c_1 r^3 \quad (c_1 < 0), \\ \theta' &= \theta + 2\pi p/q. \end{aligned} \quad (29.11.1)$$

В этом случае на расстоянии $r_0 = \sqrt{\mu/(-c_1)}$ (на поверхности S) от старой траектории образуются новые траектории, которые будут замкнутыми, потому что после q -кратного применения отображения Пуанкаре каждая точка окружности $r=r_0$ переходит сама в себя. При малых положительных μ старая траектория неустойчива, если $c_1 < 0$, а новые траектории устойчивы. Когда μ , возрастая, проходит через 0, период рассматриваемой траектории скачкообразно увеличивается в q раз.

В этом случае результатом бифуркации *может быть* еще и инвариантный тор, хотя наш метод его нахождения теперь уже непригоден. В рассмотренном выше примере такой тор существует, так как окружность $r(\theta) = r_0$ является инвариантной.

И наоборот, даже когда удастся обосновать существование инвариантного тора, на кривой \mathcal{C}_∞ могут найтись такие точки, которые будут инвариантны относительно некоторой степени отображения Пуанкаре и тем самым будут порождать замкнутые траектории на этом торе.

Приложение к главе 29.

НЕКОТОРЫЕ ДЕТАЛИ ПОСТРОЕНИЯ ИНВАРИАНТНОГО ТОРА

Сначала рассмотрим вопрос об определении входящих в (29.10.5) и (29.10.6) коэффициентов φ_{lm} по заданным коэффициентам q_{jk} из (29.10.4) — это необходимо для приведения отображения Пуанкаре к нормальной форме (29.10.7). Как отмечалось в тексте, для этого нужно подставить (29.10.5) — (29.10.7) в (29.10.4) и, получив таким образом тождество относительно степеней ξ и $\bar{\xi}$, приравнять затем полные коэффициенты при $\xi^p \bar{\xi}^q$ в правой и левой его частях. При $(p, q) = (0, 0), (1, 0)$ и $(0, 1)$ получившиеся уравнения удовлетворяются автоматически. Следующие 12 уравнений располагаются в такой последовательности:

$$\begin{aligned} (p, q) = & (2, 0), (1, 1), (0, 2), \\ & (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3), \\ & (4, 0), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (0, 4), \end{aligned}$$

и в этой же последовательности из них находятся коэффициенты φ_{pq} ; тогда φ_{pq} будет неизвестным только в том уравнении, в котором он впервые появляется, а это уравнение имеет вид

$$\alpha p \bar{\alpha}^q \varphi_{pq} + \dots = \alpha \varphi_{pq} + \dots$$

Отсюда можно найти φ_{pq} , за исключением того случая, когда

$$\alpha p \bar{\alpha}^q = \alpha.$$

Так как $p+q > 1$, последнее верно лишь тогда, когда $|\alpha| = 1$ и при этом

$$\alpha^{p-q-1} = 1.$$

Если $p-q-1 \neq 0$, то последнее равенство выполняется только тогда, когда α является корнем степени $|p-q-1|$ из единицы, откуда и следуют ограничения (29.10.8). Случай $p-q-1=0$ имеет место только при $(p, q) = (2, 1)$; это уравнение не может быть разрешено относительно φ_{21} , если $|\alpha| = 1$, но зато из него можно определить β ; следовательно, мы просто положим $\varphi_{21} = 0$.

Приведем также, опуская доказательство, некоторые ограничения на μ , выполнение которых гарантирует существование инвариантной предельной кривой \mathcal{C}_∞ , обсуждавшейся в основном тексте. Во-первых, кольцо (29.10.11) отображается в кольцо (29.10.12), если

$$\max |f| \mu < {}^{45/1024} c_1^2 \quad \text{и} \quad \mu < {}^3/13,$$

где $\max |f|$ означает максимум величины $|f(r, \theta, \mu)|$ в некоторой области $r \leq r_1, |\mu| \leq \mu_1$, в которой отображение Пуанкаре имеет нормальную форму (29.10.9), (29.10.10). Во-вторых, оценка (29.10.14) для $dr_n/d\theta$ справедлива, если дополнительно

$$\max |f_r| c_4^5 \mu^{3/2} + 5 \max |f| c_4^4 \mu + \max |f_\theta| c_4^5 \sqrt{\mu} < 1/6$$

и

$$2 |c_3| c_4 \sqrt{\mu} + \max |g_r| c_4^4 \mu^2 + 4 \max |g| c_4^3 \mu^{3/2} + \max |g_\theta| c_4^4 \mu < 1/6,$$

где

$$c_4 = 4/(3 \sqrt{-c_1}).$$

Наконец, оценка (29.10.13) выполняется при $K = 1 - \mu/6$, если дополнительно

$$2 |c_3| c_4 \sqrt{\mu} + \max |g_r| c_4^4 \mu^2 + 4 \max |g| c_4^3 \mu^{3/2} + 5 \max |f| c_4^4 \mu + \max |f_r| c_4^5 \mu^{3/2} < 1/6.$$