

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ В ЗАДАЧЕ ТЕЙЛОРА

Представление конечномерных многообразий в гильбертовом пространстве степенными рядами; координаты на многообразии; определение коэффициентов разложения; динамические системы на многообразиях; разделение переменных; вихри Тейлора, волнистые вихри; винтовые вихри.

Предварительные сведения: гл. 29.

Эта глава посвящена методу нахождения неустойчивого многообразия, которое возникает из основного течения в гидродинамических задачах, рассматривавшихся Дэви [1962], Дэви, Ди Примой и Стюартом [1968] и Иглзом [1971] в связи с исследованием задачи Тейлора. Хотя результаты, которые были получены до сих пор этим методом, являются довольно ограниченными, он остается пока что единственным известным приемом для решения таких задач (см. также работу Хассарда [1980], посвященную аналогичному методу для конечномерных пространств). Вероятно, методы такого рода будут необходимы для детального понимания процесса возникновения турбулентности.

30.1. ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ПО ЗАДАЧЕ ТЕЙЛОРА, ПОЛУЧЕННЫХ К 1968 Г.

Пусть r_1 и r_2 — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров (предполагаемых бесконечно длинными), ограничивающих течение, а Ω_1 и Ω_2 — угловые скорости цилиндров. Для невозмущенного течения угловая скорость на радиусе r ($r_1 \leq r \leq r_2$) равна

$$\Omega(r) = A + B/r^2, \quad (30.1.1)$$

где A и B определяются из условия прилипания на стенках, а именно $\Omega_1 = A + B/r_1^2$ и $\Omega_2 = A + B/r_2^2$. Эту задачу можно охарактеризовать различными безразмерными параметрами, например параметром r_1/r_2 (который фиксирован для данной физической установки), и двумя числами Рейнольдса

$$R_1 = \Omega_1 r_1^2 / \nu, \quad R_2 = \Omega_2 r_2^2 / \nu. \quad (30.1.2)$$

Устойчивость основного ламинарного течения Куэтта, заданного в виде (30.1.1), по отношению к малым осесимметричным возмущениям изучалась Тейлором [1923] как теоретически, так и экспери-

ментально. Он установил устойчивость для значений величин R_1 и R_2 , соответствующих точкам, лежащим ниже сплошной кривой на рис. 30.1, для случая $r_1/r_2=0.880$. Еще ранее при помощи простых соображений Рейлей показал, что течение будет устойчивым при $0 < R_1 < R_2$, т. е. для случая, когда точка (R_1, R_2) находится справа от штриховой прямой на рисунке.

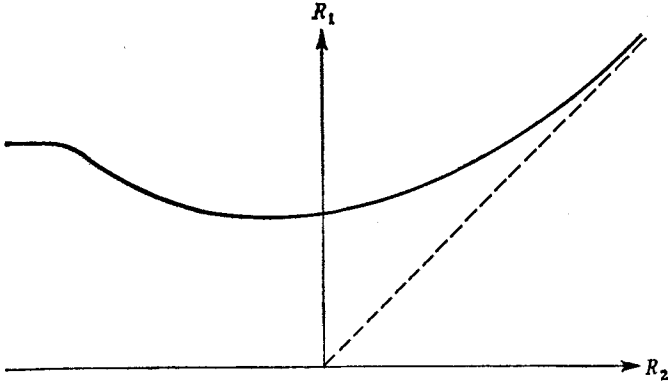


Рис. 30.1. Схематическая диаграмма тейлоровской устойчивости.

Вычисления Тейлора показывают, что, как только R_1 , возрастая, превысит при фиксированном R_2 свое критическое значение (т. е. значение на кривой), основное течение становится неустойчивым относительно собственного колебания, поле скоростей которого в цилиндрических координатах r, θ, z имеет вид

$$\mathbf{u} = \text{Re} [f(r) e^{i\alpha z}]. \quad (30.1.3)$$

Структура этого возмущения представляет собой ряд кольцевых вихрей, равномерно расположенных вдоль оси z , как схематически показано на рис. 29.1 в предыдущей главе. Тейлор установил, что экспериментально наблюдаемые вихри (которые можно сделать видимыми при помощи взвешенных частиц) в жидкости качественно согласуются с вычислениями; в частности, их осевое разделение согласуется со значением α из (30.1.3), для которого возмущение впервые становится неустойчивым (т. е. возмущение устойчиво при меньших значениях R_1).

При R_1 , ненамного превосходящем свое критическое значение, вихри (называемые теперь вихрями Тейлора) будут устойчивыми; вместе с основным течением, на которое они накладываются, они образуют новое стационарное течение (в каждой точке пространства вектор скорости жидкости не зависит от времени), которое будет существовать до тех пор, пока цилиндры не перестанут вращаться.

Тейлор наблюдал экспериментально, что при достижении параметром R_1 следующего критического значения вихри становятся волнистыми и вращаются вокруг оси со скоростью, примерно равной средней угловой скорости $(\Omega_1 + \Omega_2)/2$.

Анализ Тейлора, будучи линейным, годится лишь для исследования течения только до достижения параметром R_1 первого критического значения и непосредственно после этого; он не позволяет судить об устойчивости или неустойчивости вихрей Тейлора, а лишь фиксирует факт их возникновения. Очевидно, для интервала значений R_1 , при которых экспериментально наблюдаются вихри Тейлора, экспоненциальный рост собственного колебания (30.1.3) благодаря влиянию нелинейностей происходит лишь до некоторой конечной амплитуды.

Последующие более тонкие теоретические и экспериментальные исследования в общем подтвердили результаты Тейлора. Однако Тейлор рассматривал только осесимметричные возмущения, а Крюгер, Гросс и Ди Прима [1966] показали, что в случае противоположно вращающихся цилиндров при достаточно больших по модулю значениях отношения Ω_2/Ω_1 (выходящих за ту область, которая экспериментально изучалась Тейлором) собственное колебание, которое первым становится неустойчивым, не является осесимметричным, а зависит от угла по закону $e^{im\theta}$, где m , возрастая, принимает значения 1, 2, 3, ... по мере роста по модулю отношения Ω_2/Ω_1 . Следовательно, левая часть кривой на рис. 30.1 должна быть опущена вниз, но весьма незначительно, так как устойчивость собственного колебания в случае сравнительно близко расположенных цилиндров ($r_1/r_2=0,880$), изучавшемся Тейлором, очень слабо зависит от m .

Эти предварительные выводы были экспериментально подтверждены Снайдером [1970], который показал также, что если возникают неосесимметричные собственные колебания, то они являются винтовыми. (В рамках линейной теории нельзя отличить винтовые вихри от волнистых кольцевых вихрей: все четыре собственных колебания, содержащие $e^{\pm iaz}e^{\pm im\theta}$, одинаково возможны и при своем объединении дают вещественную зависимость либо вида $\frac{\sin}{\cos} \alpha z \frac{\sin}{\cos} m\theta$, либо вида $\frac{\sin}{\cos} (\alpha z \pm m\theta)$, и только нелинейная теория позволяет сказать, какая из этих возможностей реализуется.

За последние десятилетия при помощи нелинейной теории, разрабатывавшейся Дэви [1962], Дэви, Ди Примой и Стюартом [1968] и Иглзом [1971], удалось понять структуру и устойчивость вихрей Тейлора с конечной амплитудой, вторую бифуркацию к волнистым вихрям и структуру и устойчивость волнистых вихрей, как это будет описано ниже.

Для задач, подобных этой, когда имеется последовательность бифуркаций, теория представляет собой идеальное чередование

линейного и нелинейного анализа. После каждой бифуркации структура и амплитуда нового течения находятся с помощью нелинейного анализа. Затем его устойчивость исследуется путем линеаризации уравнений в окрестности этого нового течения и изучения роста инфинитезимальных возмущений, чтобы найти следующую бифуркацию, и т. д.

30.2. ПОСТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

В этом параграфе мы опишем в общих чертах метод построения неустойчивого многообразия, разработанный упомянутыми выше авторами на основе более ранней работы Стюарта и Ватсона.

Возьмем эволюционное уравнение в виде (29.4.3); тогда собственные значения и собственные функции линеаризованной задачи будут удовлетворять уравнениям

$$\lambda_j M \psi_j = L \psi_j \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (30.2.1)$$

Как и в § 29.6, будем считать, что система функций ψ_j полна в H , а сопряженные функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\overline{\lambda}_j M^* \chi_j = L^* \chi_j \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (30.2.2)$$

образуют по отношению к ψ_j биортогональную систему в том смысле, что

$$(\chi_j, M \psi_k) = \delta_{jk}. \quad (30.2.3)$$

Пусть неустойчивое многообразие M является K -мерным, и пусть координаты точки $u \in M$, как и в § 29.7, получаются путем проектирования на M_0 , а именно

$$x_k = (\chi_k, Mu) \quad (k = 1, \dots, K). \quad (30.2.4)$$

Поэтому для $u \in M$

$$u = \sum_{k=1}^K x_k \psi_k + u', \quad (30.2.5)$$

где вектор u' ортогонален χ_1, \dots, χ_K , т. е.

$$(\chi_k, Mu') = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, K). \quad (30.2.6)$$

Нам нужно найти функцию $u(x_1, \dots, x_K)$, или, для краткости, $u(x)$, со значениями в H , которая дает точку из M с координатами x_1, \dots, x_K хотя бы в некоторой окрестности нуля. Предположим, что эта функция является аналитической и, следовательно, может быть представлена в виде степенного ряда:

$$u(x) = \sum_{(q \in \mathcal{E})} x^q u_q, \quad (30.2.7)$$

где \mathbf{x} и \mathbf{q} суть K -мерные векторы и суммирование проводится по множеству

$$\mathcal{L} = \{\mathbf{q}: \text{каждое } q_i \text{ — неотрицательное целое и хотя бы одно } q_i > 0\}, \quad (30.2.8)$$

$\mathbf{x}^{\mathbf{q}}$ — сокращенное обозначение произведения $x_1^{q_1} x_2^{q_2} \dots x_K^{q_K}$, а каждый коэффициент $u_{\mathbf{q}}$ является элементом из H .

Согласно (30.2.5) и (30.2.6), коэффициенты $u_{\mathbf{q}}$ линейных членов в (30.2.7) — это первые K собственных функций ψ_1, \dots, ψ_K , тогда как остальные $u_{\mathbf{q}}$ ортогональны χ_1, \dots, χ_K в смысле (30.2.6). Эти последние $u_{\mathbf{q}}$ не являются собственными функциями, а удовлетворяют некоторым неоднородным уравнениям, которые будут приведены ниже; поэтому (30.2.7) *не будет* разложением по собственным функциям.

Предположим, что функции из (29.7.4), описывающие динамическую систему в M , также аналитичны и могут быть разложены в степенные ряды по x_1, \dots, x_K , так что

$$\dot{x}_j = \sum_{(\mathbf{p} \in \mathcal{L})} a_{j\mathbf{p}} x^{\mathbf{p}} \quad (j = 1, \dots, K), \quad (30.2.9)$$

где $a_{j\mathbf{p}}$ — скалярные коэффициенты.

Из (30.2.7) и (30.2.9), используя правило дифференцирования сложной функции, найдем $\dot{u} = du/dt$, а затем подставим u и \dot{u} в эволюционное уравнение (29.4.3) и будем рассматривать этот результат как тождество по x_1, \dots, x_K . Этого достаточно для определения коэффициентов $u_{\mathbf{q}}$ и $a_{j\mathbf{p}}$.

Чтобы найти u из (30.2.7), нужно продифференцировать $\mathbf{x}^{\mathbf{q}}$ по x_j для каждого j , а затем использовать (30.2.9). Пусть \mathbf{e}_j есть K -мерный вектор, у которого j -я компонента равна 1, а все остальные компоненты равны 0. Тогда

$$\partial \mathbf{x}^{\mathbf{q}} / \partial x_j = q_j \mathbf{x}^{\mathbf{q} - \mathbf{e}_j}; \quad (30.2.10)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \sum_{(\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathcal{L})} \sum_{j=1}^K q_j a_{j\mathbf{p}} x^{\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{e}_j} u_{\mathbf{q}} = \\ &= \sum_{(\mathbf{s} \in \mathcal{L})} x^{\mathbf{s}} \sum_{j=1}^K \sum'_{(\mathbf{q})} q_j a_{j\mathbf{s} + \mathbf{e}_j - \mathbf{q}} u_{\mathbf{q}}, \end{aligned} \quad (30.2.11)$$

где через \sum' обозначена сумма по всем таким $\mathbf{q} \in \mathcal{L}$, для которых $\mathbf{s} + \mathbf{e}_j - \mathbf{q}$ также принадлежит \mathcal{L} (при заданном \mathbf{s} она содержит лишь конечное число слагаемых).

Для векторов из множества \mathcal{L} удобно ввести норму, положив

$|\mathbf{q}| = \sum_{j=1}^K q_j$; тогда $|\mathbf{q}|$ будет целым положительным числом. Если $|\mathbf{q}| = 1$, то \mathbf{q} совпадает с одним из векторов \mathbf{e}_j .

Теперь подставим u в виде (30.2.7) и \dot{u} в виде (30.2.11) в эволюционное уравнение (29.4.3) и приравняем полные коэффициенты при x^s в обеих частях для каждого $s \in \mathcal{L}$. Тогда, во-первых, если s — один из векторов \mathbf{e}_l , то квадратичные члены не дают никакого вклада и поэтому

$$\sum_{j=1}^K a_{j\mathbf{e}_l} M u_{\mathbf{e}_j} - L u_{\mathbf{e}_l} = 0 \quad (l=1, \dots, K). \quad (30.2.12)$$

Но мы уже знаем, что $u_{\mathbf{e}_j} = \psi_j$; отсюда и из (30.2.1) следует, что

$$a_{j\mathbf{e}_l} = \begin{cases} \lambda_l & \text{при } j=l, \\ 0 & \text{при } j \neq l. \end{cases} \quad (30.2.13)$$

Тогда с точностью до первого порядка при малых x_1, \dots, x_K (30.2.9) дает $x_j = \text{const} \cdot \exp(\lambda_j t)$, чего и следовало ожидать.

Во-вторых, если s не совпадает ни с одним из \mathbf{e}_l , т. е. если $|\mathbf{s}| > 1$, мы получаем при помощи (30.2.13)

$$\left(\sum_{j=1}^K s_j \lambda_j M - L \right) u_s = - \sum_{j=1}^K \sum_{(\mathbf{q})} q_j a_{j\mathbf{s}+\mathbf{e}_j-\mathbf{q}} M u_{\mathbf{q}} + \sum_{(\mathbf{q})}'' B(u_{\mathbf{q}}, u_{\mathbf{s}-\mathbf{q}}), \quad (30.2.14)$$

где через \sum'' обозначена сумма по всем таким $\mathbf{q} \in \mathcal{L}$, для которых $\mathbf{s} + \mathbf{e}_j - \mathbf{q}$ также принадлежит \mathcal{L} и $\mathbf{q} \neq \mathbf{s}$, а через \sum''' сумма по всем таким $\mathbf{q} \in \mathcal{L}$, для которых $\mathbf{s} - \mathbf{q}$ также принадлежит \mathcal{L} ; обе эти суммы содержат конечное число слагаемых.

Теперь покажем, что эти уравнения, будучи определенным образом упорядоченными по $s \in \mathcal{L}$, позволяют индуктивно определить неизвестные функции u_s и неизвестные коэффициенты $a_{j\mathbf{s}}$. Предположим, что уравнения (30.2.14) расположены в таком порядке, что все уравнения с данным значением $|\mathbf{s}|$ и для каждого из уравнений все входящие в него функции и коэффициенты, входившие и в предыдущие уравнения, уже определены. (Порядок следования уравнений с одним и тем же значением $|\mathbf{s}|$ не имеет значения.) Мы утверждаем, что тогда впервые появившиеся в правой части (30.2.14) $u_{\mathbf{q}}$ уже известны. Действительно, там для большинства членов $|\mathbf{q}| < |\mathbf{s}|$, кроме тех, для которых $\mathbf{q} = \mathbf{s} + \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_l$ при $l \neq j$ (назовем такое \mathbf{q} не равным \mathbf{s}); однако член с таким значением \mathbf{q} содержит коэффициент $a_{j\mathbf{e}_l}$, равный нулю в силу (30.2.13); следовательно, все $u_{\mathbf{q}}$, впервые появляющиеся в правой части уравнения, можно считать известными. Поэтому

неизвестными в каждом уравнении будут функция u_s и коэффициенты a_{ls} ($l = 1, \dots, K$).

Чтобы определить коэффициент a_{ls} при некотором $l = 1, \dots, K$, умножим скалярно обе части (30.2.14) на вектор χ_l . Тогда в левой части получится нуль, а в правой части все члены из первой суммы будут равны нулю, кроме тех, для которых $q = e_l$ и $j = l$; следовательно,

$$a_{ls} = - \left(\chi_l, \sum_{(q)}''' B(u_q, u_{s-q}) \right).$$

После того как эти коэффициенты найдены для $l = 1, \dots, K$, уравнение (30.2.14) можно разрешить относительно u_s . Таким путем определяется инвариантное K -мерное многообразие M в той окрестности нуля пространства H , в которой сходятся ряды (30.2.7) и (30.2.9).

Именно этот метод применяется в работах Дэви [1962], Дэви, Ди Прими и Стюарта [1968] и Иглза [1971]. Хотя эти авторы не описывают метод таким образом, его основная отличительная черта — это построение неустойчивого многообразия, происходящего из нуля пространства H ; тогда уравнения (30.2.9) представляют конечномерную динамическую систему на этом многообразии и могут изучаться любым из стандартных методов как аналитически относительно неподвижных точек и циклов, так и численно, когда траектории получаются в результате решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Важным моментом в их методе является предположение об ортогональности всех u_q (кроме тех, для которых $|q|=1$) системе сопряженных функций χ_1, \dots, χ_K . У нас это предположение отражено в виде равенств (30.2.5) и (30.2.6) просто как удобный способ задания координат x_1, \dots, x_K на неустойчивом многообразии, однако оно имеет более глубокий смысл и представляет собой тот главный фактор, который делает применение метода успешным.

Каждая функция u_s определяется через известные величины с помощью неоднородного уравнения (30.2.14), которое на практике оказывается дифференциальным уравнением с граничными условиями. Для некоторых из этих уравнений, когда число Рейнольдса близко к одному из критических значений, оператор в левой части становится почти вырожденным и на самом деле вырождается, когда число Рейнольдса совпадает с этим значением.

Согласно теореме об альтернативе Фредгольма из линейной алгебры, которая применяется также и к линейным уравнениям в гильбертовом пространстве, вырожденное неоднородное линейное уравнение имеет решение только тогда, когда его правая часть ортогональна всем решениям соответствующего транспонированного однородного уравнения, которыми в данном случае будут функции χ_1, \dots, χ_K : если это так, то решение не однозначно, но может

быть сделано таковым, если потребовать, чтобы оно также было ортогонально функциям χ_1, \dots, χ_K .

Без этого или какого-либо другого сходного с ним предположения функции u_q могут оказаться неприемлемо большими для представляющих интерес значений чисел Рейнольдса, что, по-видимому, будет препятствовать сходимости ряда (30.2.7).

30.3. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Уравнения Навье—Стокса имеют вид (см. (29.3.4) и (29.3.5))

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + (\dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad (30.3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (30.3.2)$$

где $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ соответствует основному ламинарному течению (для задачи Тейлора это течение Куэтта). Введем цилиндрические координаты r, θ, z и соответствующие компоненты вектора скорости u, v, w . Тогда

$$\mathbf{u} = uk_r + vk_\theta + wk_z, \quad (30.3.3)$$

где k_r, k_θ, k_z —единичные векторы по направлениям возрастания r, θ и z соответственно. В цилиндрических координатах операторы ∇^2 и $\mathbf{u} \cdot \nabla$ имеют вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (30.3.4)$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z}.$$

Когда эти операторы применяются к векторному полю вида (30.3.3), нужно учитывать зависимость единичных векторов k_r и k_θ от θ :

$$\partial k_r / \partial \theta = k_\theta, \quad \partial k_\theta / \partial \theta = -k_r.$$

Для задачи Тейлора основное ламинарное течение в силу (30.1.1) определяется из уравнений $\dot{\mathbf{u}} = 0, \dot{\mathbf{w}} = 0$ и

$$\dot{v} = \dot{v}(r) = Ar + B/r. \quad (30.3.5)$$

Приведенные выше уравнения, будучи объединенными, образуют систему уравнений в частных производных относительно величин u, v, w и p , рассматриваемых как функции переменных r, θ, z и t . Для практического применения изложенного в предыдущем параграфе метода удобно представить эти уравнения в форме, указанной Иглзом [1971],— путем введения шестимерных векторов \mathbf{U}, \mathbf{V} и т. д., где компоненты вектора \mathbf{U} это функции $p, \partial v / \partial r, \partial w / \partial r, u, v, w$. Тогда наша система запишется в виде

$$\partial \mathbf{U} / \partial t - \mathbf{A} \mathbf{U} - \mathbf{M} \partial \mathbf{U} / \partial t - \mathbf{K}(\mathbf{U}) \mathbf{U} = 0, \quad (30.3.6)$$

где A , M и $K(\mathbf{U})$ — операторнозначные матрицы размера 6×6 , содержащие $\partial/\partial\theta$ и $\partial/\partial z$, но не содержащие $\partial/\partial r$. [Для достижения последнего используется уравнение неразрывности $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, при помощи которого производная $\partial u/\partial r$ исключается так, чтобы она осталась только в первом члене левой части (30.3.6).] Эти матрицы выписаны в приложении к настоящей главе; они по существу те же самые, что и в статье Иглза, и лишь слегка отличаются обозначениями. Все элементы матриц M и $K(\mathbf{U})$ равны нулю, кроме тех, которые расположены в правой верхней четверти матрицы. Чтобы объяснить обозначение $K(\mathbf{U})$, рассмотрим выражение $K(\mathbf{U})\mathbf{V}$; в нем элементы матрицы линейно зависят от компонент вектора \mathbf{U} и действуют линейно на компоненты вектора \mathbf{V} .

30.4. ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

Для задачи Тейлора теория и эксперимент одинаково показывают, что если вихри Тейлора (а также волнистые или винтовые вихри) уже образовались, то полное течение будет периодическим в направлении оси z с периодом, примерно равным удвоенному расстоянию между цилиндрами, по крайней мере в том случае, когда цилиндры очень длинные, и в таком приближении, когда краевыми эффектами пренебрегают. Здесь же мы просто предположим, что такая периодичность имеет место, и будем также считать известным волновое число α , так что период будет равен $2\pi/\alpha$. Будем рассматривать нашу задачу в области

$$\mathcal{R}: r_1 \leq r \leq r_2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 2\pi/\alpha \quad (30.4.1)$$

и возьмем в качестве H гильбертово пространство $L^2(\mathcal{R})^6$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \iiint_{\mathcal{R}} \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{V} \, dr \, d\theta \, dz. \quad (30.4.2)$$

При таком выборе скалярного произведения задача на собственные значения, сопряженная задаче

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{U} / \partial r - A \mathbf{U} - \lambda M \mathbf{U} &= 0, \\ U_4 = U_5 = U_6 &= 0 \quad \text{при } r = r_1 \text{ и } r = r_2, \end{aligned} \quad (30.4.3)$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{U} / \partial r - A^* \mathbf{U} - \bar{\lambda} M^* \mathbf{U} &= 0, \\ U_1 = U_2 = U_3 &= 0 \quad \text{при } r = r_1 \text{ и } r = r_2, \end{aligned} \quad (30.4.4)$$

где A^* и M^* получаются транспонированием матриц A и M с заменой $\partial/\partial\theta$ и $\partial/\partial z$ на $-\partial/\partial\theta$ и $-\partial/\partial z$.

Как и в предыдущем параграфе, предположим, что:

1) для данного λ задача (30.4.3) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение задача (30.4.4);

2) каждая из задач имеет полную систему собственных функций, так что не нужно рассматривать обобщенные собственные функции более высокого порядка, например решения уравнения $(\partial/\partial r - A - \lambda M)^2 U = 0$ и т. д.

Такие предположения подтверждаются, насколько это возможно, численными расчетами, в которых рассчитывалось около 40 первых собственных функций. Собственные функции $U^{(j)}$ для прямой задачи и $U^{+(j)}$ для сопряженной задачи могут быть выбраны так, чтобы они были биортогональными в том смысле, что

$$(U^{+(j)}, MU^{(l)}) = \delta_{jl}. \quad (30.4.5)$$

Выбор скалярного произведения в форме (30.4.2) связан с некоторым произволом. Например, может показаться более естественным взять там rdr вместо dr . Тогда несколько изменится уравнение в сопряженной задаче (30.4.4) и будут другими сопряженные функции $U^{+(j)}$, но соотношения биортогональности (30.4.5) останутся верными. Однако только эти соотношения и имеют значение: они используются для построения проекций точек неустойчивого многообразия M на соответствующее линейное многообразие M_0 , касательное к M в нуле. Скалярное произведение нельзя выбрать так, чтобы операторы были самосопряженными.

30.5. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Для линеаризованной задачи и, в частности, для задач (30.4.3) и (30.4.4) на собственные значения переменные могут быть разделены, так что собственные функции имеют вид $U = V(r) e^{ip\alpha z + im\theta}$, где p и m — целые числа, и поэтому k -ю собственную функцию можно записать как

$$V_k(r) e^{ip_k z + im_k \theta}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (30.5.1)$$

Одним из преимуществ описанного в § 30.2 метода Дэви, Ди Примы и Стюарта является то, что, хотя для нелинейной задачи переменные не разделяются, они разделяются для каждого члена, входящего в представление (30.2.7) неустойчивого многообразия через переменные x_1, \dots, x_k . Появляющийся там коэффициент u_q является элементом гильбертова пространства и поэтому представляет собой векторную функцию переменных r, θ, z в области \mathcal{R} , причем эта функция как раз имеет вид (30.5.1).

Точнее говоря, эти коэффициенты, которые теперь лучше обозначить через U_q (q является точкой множества \mathcal{L} , определенного в (30.2.8)), и скалярные коэффициенты a_{jq} , входящие в (30.2.9), обладают свойствами, указанными в следующей лемме.

Лемма. Для всех допустимых j и q коэффициенты a_{jq} могут быть отличны от нуля только тогда, когда $p(q) = p(e_j)$ и $m(q) = m(e_j)$; кроме того, для U_q справедливо представление

$$U_q = V_q(r) e^{ip(q)az + im(q)\theta},$$

где

$$p(q) = \sum_{k=1}^K q_k p_k, \quad m(q) = \sum_{k=1}^K q_k m_k$$

и e_j — такой вектор из \mathcal{L} , у которого j -я компонента равна 1, а остальные — нулю.

Доказательство леммы легко получается индукцией по норме $|q| = q_1 + \dots + q_K$, введенной в § 30.2, и поэтому здесь не приводится.

Преимущество разделения переменных проявляется в том, что линейные уравнения (30.2.14), которые нужно решать для нахождения u_q , оказываются *обыкновенными* дифференциальными уравнениями относительно функций от r на отрезке $[r_1, r_2]$. Для них получаются двухточечные граничные задачи шестого порядка с тремя граничными условиями на каждом конце отрезка. На каждую исходную задачу приходится довольно много таких граничных задач (например, их будет 800, если размерность K неустойчивого многообразия равна 14 и в рядах (30.2.7) и (30.2.9) берутся члены до пятого порядка включительно), но современные методы решения этих задач по быстродействию и точности превосходят методы, применяемые для решения уравнений в частных производных.

30.6. ПОСЛЕДНИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПО ЗАДАЧЕ ТЕЙЛОРА

В этом параграфе мы подытожим основные результаты, вытекающие из численных расчетов Дэви, Ди Примы и Стюарта [1968], Иглза [1971] и тех немногих дополнительных расчетов, которые были недавно проведены мною на ЭВМ Cray-1 в Национальном центре исследований атмосферы (Боулдер, штат Колорадо), функционирующем в рамках Национального научного фонда.

Пусть внешний цилиндр покоится ($\Omega_2 = 0$). Тогда интенсивность вращения обычно характеризуют числом Тейлора

$$T = 2\Omega_1^2 r_1^2 (r_2 - r_1)^3 / [\nu (r_1 + r_2)],$$

пропорциональным квадрату числа Рейнольдса R_1 (R_2 равно нулю).

С возрастанием T при фиксированном отношении r_1/r_2 первое собственное значение линеаризованной задачи, переходящее в правую полуплоскость, является вещественным и соответствует значению $m_k = 0$ в представлении (30.5.1) для собственных функций. Далее туда перейдет пара комплексно сопряженных собственных

значений, соответствующих $m_k=2$, и т. д. Каждое собственное значение имеет кратность 2 (вырождение соответствует возможности сдвига течения как целого в направлении z); следовательно, размерность K неустойчивого многообразия последовательно принимает значения 2, 6, 10, 14, Вычисления проводились до значения $K=14$. (При еще больших значениях T снова встретятся значения $m_k=0, 1, \dots$, но соответствующие им собственные функции будут более сложным образом зависеть от радиуса; для этого режима вычисления не проводились.)

Все собственные колебания (устойчивые или неустойчивые), которые рассматривались до сих пор, соответствовали периодическим траекториям динамической системы на неустойчивом многообразии (см. (30.2.9)). Это не относится к основному ламинарному течению (течению Куэтта) и к вихрям Тейлора, которые являются неподвижными точками этой системы. Кроме уже рассмотренных нами, существуют следующие собственные колебания.

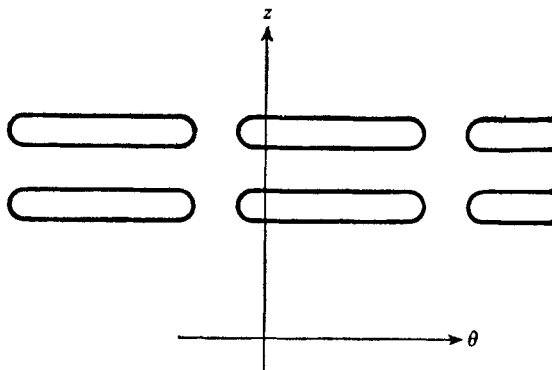


Рис. 30.2.

Винтовые вихри. Они аналогичны вихрям Тейлора, за исключением того, что после совершения оборота вдоль одного из них при изменении θ от 0 до 2π мы попадем не в его начало, а в начало либо второго, либо четвертого, либо шестого и т. д. вихря, лежащего над (или под) ним. Определим соответствующее целое $m=1, 2, 3, \dots$. (После завершения оборота нельзя попасть на первый, третий и т. д. вихри, потому что они вращаются в противоположном направлении.) Все течение вращается вокруг оси с угловой скоростью, не слишком отличающейся от средней угловой скорости жидкости, равной $\Omega_1/2$.

Неосесимметричное простое собственное колебание (всегда неустойчивое). Интенсивность вихря изменяется синусоидально вокруг оси. Взаимное расположение средних частей вихрей схематически показано на рис. 30.2. Эта картина вращается вокруг оси.

Вихри с осевой волнистостью. Они аналогичны вихрям Тейлора, но их средние части смещаются попеременно в положительном и отрицательном направлениях оси z при изменении θ от 0 до 2π . Обозначим через m ($=1, 2, \dots$) число таких смещений в каждом направлении.

Вихри с радиальной волнистостью. Эти вихри аналогичны вихрям с осевой волнистостью, за исключением того, что средние части вихрей теперь смещаются попеременно к оси и от нее в радиальном направлении. Они всегда неустойчивы. Оба типа волнистых вихрей вращаются вокруг оси с угловой скоростью, близкой к $\Omega_1/2$.

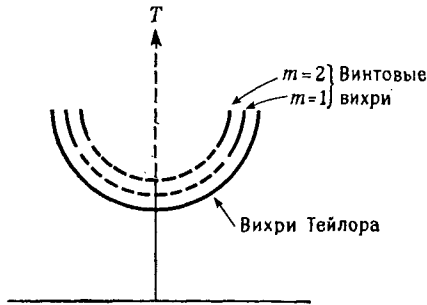


Рис. 30.3. Недоступные устойчивые винтовые вихри.

Во всех случаях можно установить, что после превышения числом Тейлора T первого критического значения T_1 ламинарное течение становится неустойчивым и на него накладываются вихри Тейлора, интенсивность которых примерно пропорциональна $\sqrt{T - T_1}$; они устойчивы вплоть до второго критического значения T_2 , когда на них накладывается волнистость с амплитудой, примерно пропорциональной $\sqrt{T - T_2}$.

Винтовые вихри накладываются на основное ламинарное течение после T_1 , т. е. после того, как основное течение уже стало неустойчивым (см. рис. 30.3). Винтовые вихри неустойчивы в момент своего появления, но затем становятся устойчивыми при чуть больших значениях T , как указано на рисунке сплошными отрезками кривых. Таким образом, это — устойчивые собственные колебания, которые недоступны в том смысле, что к ним нельзя перейти от основного течения посредством непрерывной последовательности устойчивых колебаний.

Экспериментальная работа Голлуба и Суинни [1975] указывает на то, что при числе Тейлора порядка $200T_1$ должны появиться странные аттракторы, потому что эти авторы наблюдали непрерывный энергетический спектр. Вычисления нельзя продолжить до столь больших значений T , так как размерность неустойчивого многообразия становится неприемлемо большой. Конечно, можно

продолжить вычисления для многообразия меньшей размерности, определив его при помощи собственных значений, дальше всего ушедших вправо в комплексной плоскости. Такое многообразие является инвариантным, но не будет притягивающим. Вычисления подобного рода указывают на то, что волнистые вихри при этом *могут* оставаться устойчивыми до очень высоких значений T , задерживая тем самым появление странного аттрактора, а возможно, даже бифуркации более высокого порядка.

Приложение к главе 30.

МАТРИЦЫ, ВОХОДЯЩИЕ В ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ В ФОРМЕ ИГЛЗА

Матрицы, входящие в уравнение (30.3.6), имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{v}{r} \partial_\theta & -v \partial_z & B & \frac{2V}{r} - \frac{v}{r^2} \partial_\theta & 0 \\ \frac{1}{vr} \partial_\theta & -\frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{v} \left(V' + \frac{V}{r} \right) - \frac{2}{r'} \partial_\theta & -\frac{1}{v} B + \frac{1}{r^2} & 0 \\ \frac{1}{v} \partial_z & 0 & -\frac{1}{r} & 0 & 0 & -\frac{1}{v} B \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} \partial_\theta & -\partial_z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $B = v [(1/r^2) \partial_\theta^2 + \partial_z^2] - (V/r) \partial_\theta$;

$$M = \begin{pmatrix} & -1 & 0 & 0 \\ (0) & 0 & 1/v & 0 \\ & 0 & 0 & 1/v \\ (0) & (0) & & \end{pmatrix},$$

$$K(U) = \begin{pmatrix} & \frac{u}{r} - \frac{v}{r} \partial_\theta - w \partial_z & \frac{v}{r} + \frac{u}{r} \partial_\theta & u \partial_z \\ (0) & \frac{1}{v} \left(\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) & \frac{1}{v} \left(\frac{v}{r} \partial_\theta + w \partial_z \right) & 0 \\ & \frac{1}{v} \frac{\partial w}{\partial r} & 0 & \frac{1}{v} \left(\frac{v}{r} \partial_\theta + w \partial_z \right) \\ (0) & & (0) & \end{pmatrix}$$