

## РАННЯЯ СТАДИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Периодические, квазипериодические, почти периодические и аperiodические движения;  $\omega$ -предельное множество; аттракторы; энергетический спектр; устойчивость по Ляпунову; странные аттракторы; аттрактор Лоренца; сильно типичные, типичные, нетипичные и сильно нетипичные свойства систем.

*Предварительные сведения:* гл. 29.

В прикладной гидродинамике турбулентным называют течение со столь высокой степенью хаотичности, что для изучения достаточно широкого набора его характеристик можно использовать статистические методы. Турбулентность в этом смысле возникает при существенно более высоких числах Рейнольдса, чем те, которые мы будем рассматривать. Например, для вполне развитой турбулентности в воздухе с полностью сформировавшимся так называемым инерциальным интервалом необходимы более суровые условия, чем те, которых можно достичь в большинстве аэродинамических труб, и такая турбулентность наблюдается главным образом в открытой атмосфере.

Между ламинарным течением и турбулентностью существует нечетко определенная область состояний, называемая переходным режимом или установлением турбулентности. Мы познакомимся с этим режимом только при совсем низких числах Рейнольдса. Слово «ранняя» в названии главы относится к такому реальному течению, для которого число Рейнольдса растет со временем очень медленно. Рассматриваемые нами течения являются простыми и гладкими, но, несмотря на это, они отражают определенные характерные свойства непредсказуемости и хаотичности на совсем ранних стадиях.

### 31.1. МОДЕЛЬ ЛАНДАУ — ХОПФА

Схематически эта модель перехода описана в книге Ландау и Лифшица [1954]. Предполагается, что хотя бы для некоторых задач существует последовательность закритических бифуркаций, схематически образующих дерево, изображенное на рис. 31.1. После первой бифуркации движение в общем случае является периодическим, после второй оно в общем случае будет квазипериодическим с двумя периодами и т. д. *Квазипериодическая функция с  $m$  перио-*

дами имеет вид

$$f(t) = g(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_m t), \quad (31.1.1)$$

где функция  $g(\cdot, \cdot, \dots, \cdot)$  периодична по каждому из своих аргументов с периодом  $2\pi$ , а частоты  $\omega_i$  несоизмеримы, что означает необращение в нуль линейной комбинации  $c_1\omega_1 + \dots + c_m\omega_m$  с рациональными коэффициентами  $c_1, \dots, c_m$ , если хотя бы один из них отличен от нуля. Если  $\omega_1, \dots, \omega_m$  соизмеримы, то число

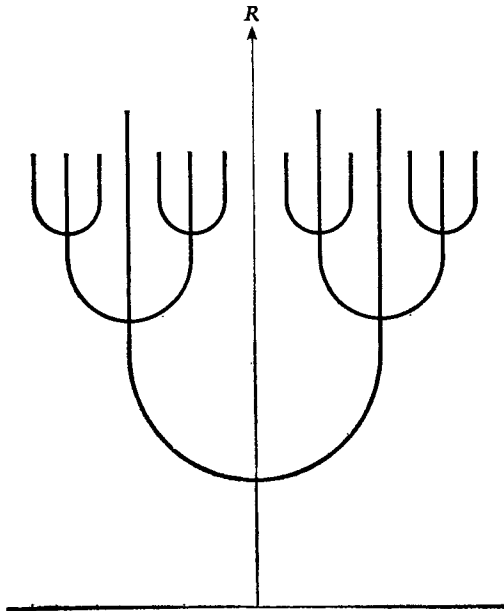


Рис. 31.1. Дерево бифуркаций.

независимых частот меньше  $m$ . Предположим, например, что  $m=2$  и  $\omega_2/\omega_1 = p/q$ , где  $p$  и  $q$  — целые числа. Тогда для

$$t_0 = 2\pi (q/\omega_1 + p/\omega_2) \quad (31.1.2)$$

будем иметь  $\omega_1 t_0 = 4\pi q$  и  $\omega_2 t_0 = 4\pi p$ , так что  $f(t)$  — это периодическая (а не только квазипериодическая) функция с периодом, равным величине (31.1.2).

В последнем параграфе предыдущей главы было показано, что если первая бифуркация приводит к замкнутой траектории, то вторая может привести к притягивающему инвариантному тору в фазовом пространстве  $H$ . Если, кроме того, движение таково, что его траектория плотно покрывает тор, то результирующие функции времени (такие, как одна из координат в фазовом пространстве)

будут квазипериодическими с двумя периодами. Точнее говоря, на торе можно определить две внутренние угловые координаты  $\theta$  и  $\varphi$  так, что  $\theta = \omega_1 t + \text{const}$ ,  $\varphi = \omega_2 t + \text{const}$ , и траектория плотно покроем тор тогда и только тогда, когда  $\omega_1$  и  $\omega_2$  несоизмеримы. После следующей бифуркации может возникнуть движение на трехмерном торе и т. д.

Реальный выбор ветви дерева, изображенного на рис. 31.1, зависит от структуры инфинитезимального возмущения, вызывающего отклонение от основного или ламинарного течения в тот момент, когда число Рейнольдса достигло первого критического значения. В более общем случае фазы, связанные с различными частотами, случайным образом зависят от такого возмущения, так что (31.1.1) лучше переписать в виде

$$f(t) = g(\omega_1 t + \beta_1, \dots, \omega_m t + \beta_m). \quad (31.1.3)$$

Идея, отражаемая моделью Ландау — Хопфа, состоит в том, что при наличии многих независимых частот движение в момент своего зарождения столь иррегулярно, что с точки зрения приложений оно должно рассматриваться как хаотическое.

В ряде случаев эта модель может оказаться неподходящей.

1. Одна из бифуркаций в изображенной на рис. 31.1 последовательности может быть докритической; тогда непосредственно после превышения числом Рейнольдса соответствующего критического значения для системы не найдется близкого к устойчивому движению, а будет иметь место так называемый взрывной переход к движению, связывающему более или менее отдаленные части фазового пространства.

2. Для некоторых задач, таких, как течение в круглой трубе, основное течение устойчиво по отношению к инфинитезимальным возмущениям при всех числах Рейнольдса, но неустойчиво по отношению к конечному возмущению довольно небольшой амплитуды, и с ростом числа Рейнольдса характеризующая наступление неустойчивости амплитуда уменьшается, приближаясь к нулю, так что практически не удается получить устойчивое течение из-за наличия малых, но конечных возмущений.

3. Хотя при второй бифуркации обычно появляется инвариантный тор, траектория не обязательно будет плотно покрывать его; она может вернуться в свою первоначальную точку после конечного числа оборотов вокруг оси тора; тогда траектория будет замкнутой, а движение периодическим, как уже отмечалось в § 29.11. В действительности на основании теоремы Пейксо́то (см. приложение к этой главе) теперь создается впечатление, что замкнутые траектории на торе менее вероятны, чем плотно покрывающие его. Это может указывать на справедливость модели Фейгенбаума (см. § 31.19).

4. Ситуация, обсуждавшаяся Рюэлем и Такенсом [1971], заключается в том, что после нескольких бифуркаций в фазовом прост-

ранстве появляется инвариантное множество точек, которое представляет собой не тор, а так называемый странный аттрактор; тогда, как это объясняется ниже, движение будет не квазипериодическим, а аperiodическим.

### 31.2. ПРИМЕР ХОПФА

В 1948 г. Хопф привел пример простой динамической системы, у которой имеется бесконечная последовательность бифуркаций, причем каждая из них приводит к притягивающему тору размерности на единицу большей, чем у предыдущего. Пусть  $u(x, t)$  и  $z(x, t)$  — комплекснозначные в общем случае функции вещественных переменных  $x$  и  $t$ , периодические по  $x$  с периодом  $2\pi$ . Эти функции должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t &= -z \circ u - u \circ 1 + \mu \partial^2 u / \partial x^2, \\ \partial z / \partial t &= z \circ u + z \circ F + \mu \partial^2 z / \partial x^2; \end{aligned} \quad (31.2.1)$$

здесь кружком обозначена свертка: в общем случае

$$f \circ g = (f \circ g)(x) = [1/(2\pi)] \int_0^{2\pi} f(x-y) \overline{g(y)} dy;$$

$u \circ 1$  — это в точности среднее значение функции  $u$ ,  $\mu$  — положительная постоянная, а  $F = F(x)$  — заданная комплекснозначная четная периодическая функция.

Эту систему можно рассматривать как простой аналог уравнений Навье — Стокса на компактном многообразии (на окружности) с представлением нелинейностей в виде сверток, а не в виде адвективных членов. Функция  $F(x)$  обозначает силу, а  $\mu$  (вязкость) — это тот параметр, который можно варьировать.

Решения этой системы можно найти с помощью разложения всех функций в ряды Фурье по  $x$  (например,  $u(x, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_n(t) e^{inx}$ ; обозначения для остальных функций аналогичны). Так как преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению их преобразований Фурье, члены, соответствующие различным  $n$ , нельзя группировать. В этом отношении система (31.2.1) отличается от уравнений Навье — Стокса, но зато ее решения можно получить в явном виде.

Нужно наложить лишь ограничения на описывающую силу функцию  $F(x)$ , чтобы эта система не оказалась слишком специальной, т. е. нетипичной. А именно если

$$F(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} (a_n + ib_n) e^{inx}, \quad (31.2.2)$$

то предполагается, что бесконечно многие из  $a_n$  будут больше нуля, что отношение любых  $b_n$  не является рациональным числом (т. е. любое конечное их множество линейно независимо над полем рациональных чисел) и что среди величин  $a_n/n^2$  нет равных.

Критические значения параметра  $\mu$  — это числа  $a_n/n^2$ , которые можно упорядочить в виде последовательности  $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \dots \rightarrow 0$ . Общее решение представляет движущуюся в бесконечномерном пространстве  $\Omega$  точку с координатами  $u_n(t)$ ,  $z_n(t)$ ,  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Хопф доказал, что при  $\mu > \mu_1$  неподвижная точка в нуле пространства  $\Omega$  притягивает все остальные решения, так что  $u_n \rightarrow 0$  и  $z_n \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ; при прохождении уменьшающегося  $\mu$  через  $\mu_1$  это решение станет неустойчивым и произойдет бифуркация к притягивающей периодической траектории, которая развивается из нуля; когда  $\mu$ , уменьшаясь, будет проходить через  $\mu_2$ , эта траектория также станет неустойчивой и произойдет бифуркация к притягивающему тору (размерности 2), который развивается из этой траектории, и т. д. После  $k$ -й бифуркации получится  $k$ -мерный притягивающий тор и каждая лежащая на нем траектория плотно покрывает его.

### 31.3. МОДЕЛЬ РЮЭЛЯ — ТАКЕНСА

В модели ранней стадии турбулентности, предложенной Рюэлем и Такенсом [1971], предполагается, как и в модели Ландау — Хопфа, что первые четыре бифуркации являются закритическими и что они приводят к инвариантным торам  $T^k$ ,  $k=1, 2, 3, 4$ , каждый из которых будет притягивающим с момента своего появления и до следующей бифуркации. Вопросы о существовании этих торов мы коснемся при обсуждении модели Фейгенбаума в § 31.19. Рюэль и Такенс показали, что для  $T^4$  весьма возможно движение по странному аттрактору специального вида, принадлежащему  $T^4$ . Этот аттрактор локально представляет собой декартово произведение двумерного канторова множества и двумерной поверхности.

Теорему Рюэля — Такенса можно перефразировать следующим образом. Рассмотрим банахово пространство  $\mathbf{V}$ , каждая точка которого представляет векторное поле на торе  $T^4$ , с нормой, включающей модули компонент векторного поля и их производных порядка не выше 3. Две точки из  $\mathbf{V}$ , мало отличающиеся по норме, можно рассматривать как две физические системы, получающиеся одна из другой путем малого возмущения векторного поля. Тогда для любого заданного постоянного поля на  $T^4$  (поля, для которого угловые переменные на торе изменяются линейно со временем) и любого заданного  $\epsilon_1 > 0$  существует возмущение этого поля, по норме меньшее, чем  $\epsilon_1$ , которое порождает странный аттрактор описанного этими авторами вида. Далее, существует другое число  $\epsilon_2 > 0$  (возможно, много меньшее, чем  $\epsilon_1$ ), такое, что странный аттрактор сохра-

няется при наложении любого дополнительного возмущения, не превосходящего по норме  $\varepsilon_2$ . Следовательно, векторные поля, порождающие странный аттрактор, нельзя считать редкими исключениями.

В их выборе странного аттрактора есть некоторый произвол; возможны его многочисленные вариации с сохранением сформулированного выше свойства.

В механизме возникновения странного аттрактора, обнаруженного ранее Э. Лоренцом (см. § 31.9—31.17), имеются некоторые отличия. По-видимому, никому еще не удалось построить на конкретном многообразии конкретное векторное поле, которое приводило бы к странному аттрактору в точном соответствии с моделью Рюэля — Такенса. В их статье содержится важное утверждение о том, что движения по странным аттракторам в некотором смысле вероятны или по крайней мере не являются чем-то исключительным, а возможно, даже типичны при некоторых обстоятельствах. В их теореме не утверждается, что существование странного аттрактора — это типичное свойство векторных полей на  $T^4$  (см. приложение к этой главе). Соответствующее множество банахова пространства  $\mathbf{B}$  является открытым, но не обязательно замкнутым: оно лишь произвольно близко примыкает к каждой точке пространства  $\mathbf{B}$ , которая представляет постоянное векторное поле на  $T^4$ . Теорема Рюэля — Такенса просто утверждает, что если о существовании инвариантного тора  $T^4$  уже известно, то на нем движение по странному аттрактору более вероятно, чем квазипериодическое движение.

#### 31.4. $\omega$ -ПРЕДЕЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО ДВИЖЕНИЯ

По аналогии с § 29.7 рассмотрим на конечномерном многообразии  $M$  динамическую систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (31.4.1)$$

где  $\mathbf{F}(\cdot)$  — гладкое векторное поле на  $M$ . Решение  $\mathbf{x}(t)$  этого уравнения называется *движением* на  $M$ , а множество принадлежащих  $M$  точек

$$\gamma = \{\mathbf{x}(t) : \text{все } t\} \quad (31.4.2)$$

называется *траекторией* (или *орбитой*) этого движения. Предположим, что задача с начальными данными для уравнения (31.4.1) корректно поставлена, и для любого  $\mathbf{x}_0$  из  $M$  и всех  $t \geq 0$  обозначим через  $\varphi(\mathbf{x}_0, t)$  решение, которое начинается в точке  $\mathbf{x}_0$ ; таким образом, если  $\mathbf{x}(t)$  — какое-либо решение, то

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(\mathbf{x}(0), t). \quad (31.4.3)$$

При фиксированном  $\mathbf{x}$  функция  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  — это движение, тогда как при фиксированном  $t \geq 0$  — это взаимно однозначное отобра-

ражение  $x \rightarrow \varphi(x, t)$  многообразия  $M$  на себя. Функция  $\varphi(x, t)$  называется *полупотоком*; она обладает полугрупповым свойством, а именно для неотрицательных  $t$  и  $s$

$$\varphi(\varphi(x, t), s) = \varphi(x, t + s). \quad (31.4.4)$$

При  $t = 0$   $\varphi$  совпадает с тождественным отображением:  $\varphi(x, 0) \equiv x$ . Будем предполагать, что функция  $\varphi(x, t)$  непрерывна по  $x$  и  $t$ .

Точка  $\xi$  из  $M$  называется  $\omega$ -предельной точкой движения  $x(t)$ , если для произвольно больших времен  $x(t)$  сколь угодно близко подходит к  $\xi$ , т. е. если существует такая последовательность  $\{t_n\}_1^\infty$ , что

$$\left. \begin{array}{l} t_n \rightarrow \infty \\ |x(t_n) - \xi| \rightarrow 0 \end{array} \right\} \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (31.4.5)$$

Множество всех  $\omega$ -предельных точек движения называется его  $\omega$ -предельным множеством и обозначается через  $\Omega_x$ , где  $x$  — начальная точка движения; это множество точек замкнуто. Для любой другой точки  $y$  той же самой траектории  $\Omega_y = \Omega_x$ .

Приведем несколько простейших примеров. Если при  $t \rightarrow \infty$  движение стремится к неподвижной точке, то эта точка и будет  $\omega$ -предельным множеством данного движения. Если движение на плоскости по спирали стремится изнутри к некоторой замкнутой кривой, то эта кривая будет  $\omega$ -предельным множеством такого движения. Если траектория движения на торе плотно покрывает его, то для каждой точки этой траектории  $\omega$ -предельным множеством будет полная поверхность тора.

Символ  $\omega$  относится к будущему времени. Если движение существует при всех  $t$ , то, устремляя  $t$  к  $-\infty$ , аналогично определяют  $\alpha$ -предельные точки и  $\alpha$ -предельные множества.

Если при  $t \geq 0$  движение  $x(t)$  остается в ограниченной области многообразия  $M$ , то его  $\omega$ -предельное множество  $\Omega$  непусто и с ростом времени  $x(t)$  стремится к  $\Omega$ , т. е.

$$(\text{расстояние от } x(t) \text{ до } \Omega) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty \quad (31.4.6)$$

(см. книгу Немыцкого и Степанова [1947, гл. 5, § 3]). Однако  $\Omega$  не всегда будет устойчивым или притягивающим: другие близкие движения могут пройти мимо него и никогда не возвратиться.

Имеется важная связь  $\omega$ -предельных множеств с вопросом обратимости движения. Решение уравнения (31.4.1) не может быть в общем случае продолжено на все отрицательные  $t$ . Например, этого нельзя сделать для решений уравнения  $\dot{x} = -x^3$  на  $\mathbb{R}$  [за исключением решения  $x(t) \equiv 0$ ] и, вообще говоря, для решений уравнений Навье—Стокса из-за параболического характера последних. Однако для некоторых специальных движений это можно сделать.

Из непрерывности и полугруппового свойства  $\Phi$  следует, что если в качестве начальной точки  $x(0)$  выбрана одна из  $\omega$ -предельных точек движения  $x(t)$ , то каждая последующая точка  $x(t_0)$  также будет  $\omega$ -предельной для  $x(t)$ . Точнее говоря, если движение начинается в своей  $\omega$ -предельной точке, оно там и остается. Можно доказать, что такие движения могут также быть продолжены бесконечно далеко назад по времени и, следовательно, принадлежат  $\Omega_{x(0)}$  при всех  $t$  (см. книгу Селла [1971, теорему II. 8]).

Этот последний результат может показаться парадоксальным с точки зрения физических наблюдений или численного моделирования, для которых возможна лишь некоторая конечная точность. Согласно соотношению (31.4.6), для практических целей можно считать, что любое ограниченное движение  $x(t)$  по прошествии конечного промежутка времени попадает в свое собственное  $\omega$ -предельное множество. Отсюда не следует, конечно, что при помощи конечно-разностных методов можно двигаться по такой траектории бесконечно долго в обратном направлении, не удаляясь при этом от  $\Omega_{x(0)}$ ; это означает только, что, если движение каким-то образом построено в прямом направлении для достаточно большого интервала времени и уже не наблюдается его заметного изменения, этот результат можно рассматривать как достаточно точное приближение к такому движению, которое в идеальном смысле принадлежит  $\Omega_{x(0)}$  при всех  $t$ .

### 31.5. АТТРАКТОРЫ

Грубо говоря, аттрактор—это такое множество из  $M$ , что любое достаточно близкое к нему движение стремится к нему с возрастанием времени. Точнее говоря, мы будем называть связное замкнутое ограниченное множество  $S$  из  $M$  *аттрактором*, если выполняются следующие условия.

1.  $S$  содержится в таком открытом множестве  $\mathcal{R}_0$ , что для любого  $x$  из  $\mathcal{R}_0$  движение  $\Phi(x, t)$  принадлежит  $\mathcal{R}_0$  при всех  $t > 0$ .

2. Если  $\mathcal{R}$ —любое открытое множество, содержащее  $S$  (см. рис. 31.2), то для любого  $x$  из  $\mathcal{R}$  найдется такое значение времени  $\tau$ , что  $\Phi(x, t)$  будет принадлежать  $\mathcal{R}$  при всех  $t > \tau$ .

3. Для данной области  $\mathcal{R}_0$  множество  $S$  является наименьшим из имеющих указанные свойства множеств. Минимальность понимается в том смысле, что если  $\mathcal{R}(t)$ —результат преобразования области  $\mathcal{R}_0$  под действием  $\Phi$ , то при  $t \rightarrow \infty$   $\mathcal{R}(t)$  стягивается к  $S$ , но не более того, т. е.

$$S = \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{R}(t).$$

Для данного аттрактора  $S$  наибольшее открытое множество  $\mathcal{R}_0$ , обладающее перечисленными свойствами, называется *областью*



притяжения  $S$ . Будем считать  $S$  связным, так как если он состоит из двух несвязанных «кусков»  $S_1$  и  $S_2$ , то каждый из них может быть включен в подходящие области  $\mathcal{R}_1$  и  $\mathcal{R}_2$  и рассматриваться как отдельный аттрактор.

Смейл [1967] сделал дополнительное предположение о том, что должна существовать траектория, плотно покрывающая  $S$ . Примером, в котором это условие не выполнено (тогда как другие выполнены), является задача Тейлора о течениях между вращающимися цилиндрами. После первой бифуркации получается замкнутая кривая (в действительности окружность) в фазовом (гильбертовом) пространстве, состоящая из неподвижных точек, и любое близкое

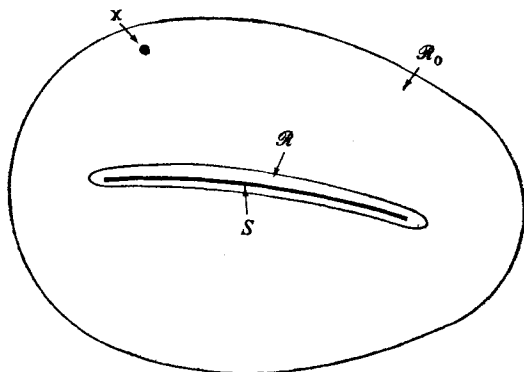


Рис. 31.2.

движение асимптотически стремится к состоянию покоя в одной из этих неподвижных точек. Однако этот пример нетипичен в том смысле, что произвольно малое возмущение (скажем, перемещение всей установки с малой скоростью вдоль оси или в направлении  $z$ ) может привести эти точки в движение вдоль окружности, так что окружность превратится в траекторию.

$\omega$ -предельное множество движения будет аттрактором, если оно притягивает также все другие близкие движения. В более общем случае аттрактор  $S$  — это объединение нескольких  $\omega$ -предельных множеств, а именно  $\omega$ -предельных множеств всех движений, которые начинаются в  $\mathcal{R}$ . В частности,  $S$  может содержать неподвижные точки и замкнутые траектории, которые, конечно, являются своими собственными  $\omega$ -предельными множествами.

Притягивающие неподвижные точки, притягивающие замкнутые траектории и притягивающие инвариантные торы различных размерностей представляют собой примеры аттракторов. Другие аттракторы часто имеют более сложную геометрическую структуру, содержащую, например, канторовы множества. Странным называется такой аттрактор, на котором движения неустойчивы в смысле Ляпу-

нова и, следовательно, характеризуются непрерывным энергетическим спектром, как это объясняется в остальной части данной главы.

### 31.6. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ДЛЯ ДВИЖЕНИЙ В $\mathbb{R}^n$

Основы теории энергетического спектра обсуждались в § 4.6 тома 1. Там это делалось для непрерывной функции  $f(t)$ , которая осциллирует более или менее иррегулярно при всех  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Такая функция не может быть представлена ни с помощью классического ряда Фурье, поскольку она не является периодической, ни с помощью классического интеграла Фурье, так как она не принадлежит  $L^2$ . Но она является распределением медленного роста и, следовательно, имеет преобразование Фурье в смысле теории распределений. Энергетический спектр — это функция  $S(\omega)$ , которая описывает распределение энергии, связанной с  $f(t)$ , через частоты компонент Фурье без учета их фаз. А именно  $S(\omega) —$  неубывающая вещественная функция и  $S(\omega_2) - S(\omega_1) —$  это энергия, заключенная в компонентах Фурье с частотами из интервала  $(\omega_1, \omega_2)$ .

Мы кратко сформулируем здесь результаты применительно к (вместо  $f(t)$ ) векторнозначной функции  $x(t)$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ .

Для  $x(t)$  автоковариационная функция определяется как

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} [1/(2T)] \int_{-T}^T \overline{x(t+\tau)} \cdot x(t) dt, \quad (31.6.1)$$

а энергетический спектр как

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) [(e^{i\omega\tau} - 1)/(2\pi i\tau)] d\tau. \quad (31.6.2)$$

#### Пояснения

1. Мы молчаливо предполагаем, что все компоненты вектора  $x(t)$  эквивалентны в смысле их вклада в энергию движения. Обобщение получается путем замены скалярного произведения в (31.6.1) на

$$x(t+\tau) \cdot Bx(t), \quad (31.6.3)$$

где  $B$  — положительно определенная матрица, вводимая из физических соображений таким образом, чтобы выражение (31.6.3) представляло энергию.

2. Если спектр «непрерывен», т. е. функция  $S(\omega)$  абсолютно непрерывна, что имеет место тогда, когда  $R(\tau)$  достаточно быстро стремится к нулю при  $\tau \rightarrow +\infty$ , то спектральная плотность

получается как обычное преобразование Фурье:

$$S'(\omega) = [1/(2\pi)] \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (31.6.4)$$

В численных расчетах  $R(\cdot)$  задается только для некоторых дискретных значений  $\tau$ , а  $S(\cdot)$  или  $S'(\cdot)$  получаются только для некоторых дискретных значений  $\omega$ . В этом случае  $S'(\cdot)$  обычно получается из  $R(\cdot)$  при помощи алгоритма быстрого преобразования Фурье, и, если спектр содержит линии, они выглядят не как вклады вида  $\delta$ -функции в  $S'(\cdot)$ , а как отдельные значения  $S'(\cdot)$ , которые много больше окружающих значений.

3. Если  $x(t)$  получается из эксперимента или путем численного моделирования, то в (31.6.1) нельзя совершить предельный переход и вместо этого следует положить

$$R(\tau) \approx [1/(b-a)] \int_a^b \overline{x(t+\tau)} \cdot x(t) dt, \quad (31.6.5)$$

где  $(a, b)$  — некоторый большой интервал. Как было указано в конце § 31.4, хотя функция  $x(t)$  и рассматривается как некоторое приближение к движению на его собственном  $\omega$ -предельном множестве и тем самым как определенная для всех  $t$ , на практике она известна только при  $t \geq 0$ ; поэтому в представлении (31.6.5) мы имеем  $0 < a < b$ . К тому же это представление будет хорошим приближением, если все быстрые переходы произошли гораздо раньше момента времени  $t = a$ .

По поводу дальнейших подробностей и примеров см. § 4.6 тома 1.

### 31.7. ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И АПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ

Квазипериодические движения, предсказываемые согласно модели Ландау — Хопфа, являются частным случаем почти периодических движений и, следовательно, имеют чисто линейчатый спектр.

Если периодическая функция  $g$  из (31.1.1) с  $m$  периодами разложена в  $m$ -кратный ряд Фурье, т. е.

$$g(z_1, \dots, z_m) = \sum_{-\infty}^{\infty} c(k_1, \dots, k_m) e^{i(k_1 z_1 + \dots + k_m z_m)}, \quad (31.7.1)$$

то после надлежащей перенумерации слагаемых квазипериодическая функция  $f(t)$ , заданная в виде (31.1.1), может быть представлена как

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e^{i\tilde{\omega}_j t}, \quad (31.7.2)$$

где каждое  $\tilde{\omega}_j$  является линейной комбинацией  $\omega_1, \dots, \omega_m$  с целочисленными коэффициентами.

Если бы нашлось такое значение  $\tau > 0$ , для которого все величины  $\omega_k \tau$  ( $k=1, \dots, m$ ) одновременно будут целыми кратными числа  $2\pi$ , то функция  $f(t+\tau)$  тождественно равнялась бы  $f(t)$  и  $f(\cdot)$  была бы периодической. Так как  $\omega_k$  несоизмеримы, такого  $\tau$  не существует. Однако можно показать, что  $\tau$  можно выбрать так, чтобы разность  $f(t+\tau) - f(t)$  стала произвольно малой. Более того, для данного  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $T = T(\varepsilon) > 0$ , что в каждом интервале по  $t$  длины  $T$  будет содержаться по крайней мере одно такое  $\tau$ , для которого

$$|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon \quad \text{при всех } t.$$

Любая непрерывная функция, обладающая этим последним свойством, называется *почти периодической* по Бору и может быть разложена в ряд вида (31.7.2), который при этом сходится по определенной  $L^2$ -норме (см. книгу Рисса и Секефальви-Надя [1953, гл. 4]). Квазипериодическая функция, как мы ее определили, является почти периодической функцией, для которой только конечное число частот будут линейно независимыми над полем рациональных чисел.

Векторнозначная почти периодическая функция  $x(t)$  определяется аналогично.

Как было показано в § 4.6 тома 1, почти периодическая функция имеет чисто линейчатый энергетический спектр. Следовательно, при переходе к турбулентности согласно модели Ландау — Хопфа энергетический спектр остается чисто линейчатым после лобого конечного числа бифуркаций, хотя число линий в данном частотном интервале может заметно увеличиваться с ростом числа Рейнольдса.

Как мы увидим, модель Рюэля — Такенса предсказывает появление непрерывного спектра после сравнительно небольшого числа бифуркаций.

Почти периодический характер движения в модели Ландау — Хопфа кажется неправдоподобным с интуитивной точки зрения. Если движение в каком-то смысле случайно, оно не должно «запоминать» свое прошлое поведение настолько точно, чтобы воспроизводить это поведение с любой желаемой степенью точности в сколь угодно далекие времена в будущем, как это имеет место для почти периодического движения. Это можно выразить также в терминах автоковариационной функции  $R(\tau)$ , поскольку  $R(\tau)/R(0)$  — автокорреляция, т. е. корреляция функций  $f(t)$  и  $f(t+\tau)$ . Теорема о почти периодических функциях гласит, что свертка двух таких функций в смысле (31.6.1) также будет почти периодической (см. книгу Рисса и Секефальви-Надя). Следовательно,  $R(\tau)$  будет почти периодической, если такова  $f(t)$ , и коэффициент корреляции  $f(t)$  и  $f(t+\tau)$  будет произвольно близко приближаться к 1.0 повторно для определенных произвольно больших значений  $\tau$ .

Напротив, для типичного движения по странному аттрактору  $R(\tau)$  быстро убывает к нулю при  $\tau \rightarrow \pm \infty$ ; тогда энергетический спектр оказывается чисто непрерывным и получается с помощью (31.6.4). Случай такого аттрактора Лоренца рассматривается в § 31.11.

### 31.8. УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛЯПУНОВУ

Движение  $x(t)$  [решение уравнения (31.4.1)] *устойчиво в смысле Ляпунова*, если любое другое движение  $\tilde{x}(t)$  [другое решение уравнения (31.4.1)], которое достаточно близко к нему в начальный момент, остается близким и в дальнейшем, точнее, если для любого  $\epsilon > 0$  найдется такое  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ , что

$$\text{если } |\tilde{x}(0) - x(0)| < \delta, \text{ то } |\tilde{x}(t) - x(t)| < \epsilon \\ \text{при всех } t > 0.$$

Если движение неустойчиво в этом смысле, то найдется такое (не обязательно очень малое) положительное  $\epsilon$ , что при любой малости  $\delta$  будет существовать возмущение, по модулю меньшее  $\delta$  вначале и большее  $\epsilon$  в некоторый более поздний момент времени. Одна из причин появления излагаемой ниже работы Лоренца состояла в том, чтобы показать, что некоторый простой прототип атмосферного движения является неустойчивым по Ляпунову, а это имеет очевидное отношение к задаче о прогнозе погоды.

### 31.9. СИСТЕМА ЛОРЕНЦА. БИФУРКАЦИИ

Первый странный аттрактор в задаче, имеющей отношение к гидродинамике, был обнаружен Э. Лоренцом в 1963 г. Лоренц разложил уравнения Бенара, описывающие тепловую конвекцию в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости, в тройные ряды Фурье относительно пространственных переменных, а затем оставил в получившейся системе обыкновенных дифференциальных уравнений, характеризующих зависимость коэффициентов Фурье от времени, только три уравнения. Если коэффициенты Фурье в этих уравнениях обозначить через  $X(t)$ ,  $Y(t)$  и  $Z(t)$ , то уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y, \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ, \\ \dot{Z} &= -bZ + XY, \end{aligned} \quad (31.9.1)$$

или короче в виде

$$\dot{X} = F(X). \quad (31.9.2)$$

Постоянные  $\sigma$ ,  $r$  и  $b$  безразмерны; для физической системы, рассматривавшейся Лоренцом, они имели значения

$$\sigma = 10, \quad b = 8/3, \quad 0 < r < \infty; \quad (31.9.3)$$

параметр  $r$  пропорционален числу Релея и является мерой интенсивности подогрева.

Лоренц хотел получить общее представление о характере неустойчивости, заложенной в основе атмосферных явлений, и не стремился к тому, чтобы указанная выше система была реальной моделью атмосферы или тепловой конвекции. Позднее Карри [1978] изучал более реальное приближение для уравнений конвекции Бенара, оставив в системе четырнадцать уравнений вместо трех. У него получилась более сложная последовательность бифуркаций при увеличении числа Релея  $r$ , но и тогда странный аттрактор еще имел место для определенных значений  $r$ .

Лоренц показал, что существует такая зависящая от  $\sigma$ ,  $r$  и  $b$  постоянная  $R$ , что решение  $\mathbf{X}(t)$  системы (31.9.1) в конце концов навсегда попадает в шар

$$X^2 + Y^2 + Z^2 < R^2. \quad (31.9.4)$$

Далее, из (31.9.1) следует, что дивергенция векторного поля  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  имеет постоянное значение:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = -(\sigma + b + 1) = -13^{2/3}, \quad (31.9.5)$$

так что объем области, переносимой вдоль по потоку (31.9.1) в  $\mathbb{R}^3$ , уменьшается со временем как  $\exp(-13.67 t)$ . Поэтому в шаре (31.9.4) имеется хотя бы один аттрактор и каждый такой аттрактор занимает в  $\mathbb{R}^3$  нулевой объем.

Система (31.9.1) имеет следующие неподвижные точки, или стационарные решения.

1. При любом  $t$  начало координат  $X=Y=Z=0$  будет неподвижной точкой. При  $0 < r < 1$  она устойчива (и фактически является притягивающей). При  $r > 1$  она неустойчива: линеаризованная задача имеет одно положительное и два отрицательных собственных значения. Имеются одномерное неустойчивое многообразие с горизонтально направленным касательным вектором в нуле (он параллелен плоскости  $Z=0$ ) и двумерное устойчивое многообразие с расположенной вертикально касательной плоскостью.

2. При любом  $r > 1$  имеются две дополнительные неподвижные точки

$$\begin{aligned} P_1: X=Y &= -\sqrt{b(r-1)}, \quad Z=r-1, \\ P_2: X=Y &= \sqrt{b(r-1)}, \quad Z=r-1. \end{aligned} \quad (31.9.6)$$

Следовательно, при  $r=1$  происходит первая бифуркация описанного в § 29.9 типа.

Чтобы ответить на вопрос об устойчивости новых неподвижных точек, положим  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{X}_1$ , где  $\mathbf{X}_0$  — одна из точек (31.9.6),

и проведем линеаризацию относительно  $X_1$ , после чего получим

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \\ \dot{Z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - Z_0 & -1 & -X_0 \\ Y_0 & X_0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}. \quad (31.9.7)$$

Если подставить сюда  $X_0$ ,  $Y_0$  и  $Z_0$  из (31.9.6), то матрица этой системы примет вид

$$\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix};$$

она имеет одно вещественное отрицательное и два комплексно сопряженных собственных значения. Комплексные собственные значения будут находиться в левой полуплоскости (и тем самым новые неподвижные точки будут устойчивыми), если  $r < r_0$ , где

$$r_0 = \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1) = 24.74. \quad (31.9.8)$$

Следовательно, при  $r = r_0$  имеет место вторая бифуркация, а ее тип совпадает с описанным в § 29.10, так что она приводит к периодическим решениям. Однако, как показывают вычисления Марсдена и Мак-Кракена [1976], эта бифуркация является докритической. Следовательно, периодические решения имеются только при  $r < r_0$  и неустойчивы, а при  $r > r_0$  следует ожидать взрывного перехода к чему-то иному. Как мы увидим ниже, оказывается, что переход на самом деле не будет «взрывным» благодаря наличию другого аттрактора (в действительности странного аттрактора) в близкой окрестности в  $\mathbb{R}^3$  (см. § 31.17).

При  $r > r_0$  с каждой из точек  $P_1$  и  $P_2$  связаны одномерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразия. На последнем решения раскручиваются по спирали из неподвижной точки. Близкие решения также раскручиваются по спирали и в то же самое время быстро движутся к неустойчивому многообразию благодаря тому, что с устойчивым многообразием связано большее по модулю отрицательное собственное значение.

### 31.10. АТТРАКТОР ЛОРЕНЦА. ОБЩЕЕ ОПИСАНИЕ

Чтобы исследовать поведение системы после второй бифуркации при  $r = r_0 = 24.74$ , Лоренц численно нашел решения системы (31.9.1) при  $r = 28$ . Он установил, что после прохождения участков относительно быстрого изменения траектории оказываются лежащими, насколько это позволяют утверждать расчеты, на ветвящейся поверхности  $L_0$ , схематически изображенной на рис. 31.3а, где указаны также и направления движения. Грубо говоря, эта поверхность

имеет сердцевидную форму и расположена очень близко к вертикальной плоскости  $X=Y$ , содержащей неподвижные точки  $P_1$  и  $P_2$ , определенные в (31.9.6). Она симметрична по отношению к отражению относительно оси  $Z$  и имеет два отверстия — по одному вокруг каждой из неподвижных точек  $P_1$  и  $P_2$ . Ниже линии ветвления  $BB$ , которая соединяет эти два отверстия и проходит несколько ниже горизонтали  $P_1P_2$ , поверхность представляет собой сплошной лист. Над ним расположены два листа: один чуть левее и сзади, другой чуть правее и спереди. Они соединяются по средней части линии ветвления  $BB$ , изображенной жирной прямой.

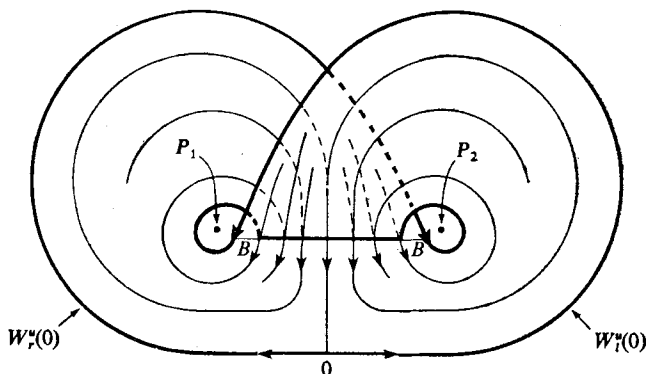


Рис. 31.3а. Ветвящаяся поверхность.

Поверхность  $L_0$  ограничена частью относящегося к нулю неустойчивого многообразия, которая состоит из двух траекторий  $W_1^+$  и  $W_2^+$ , выходящих из нуля в противоположных направлениях. Эти траектории в дальнейшем уходят внутрь поверхности  $L_0$ , но перед этим они обойдут указанные отверстия и затем пересекут линию ветвления  $BB$  в концах ее средней части. Неподвижные точки  $P_1$  и  $P_2$  находятся в отверстиях, и если бы поверхность  $L_0$  закрыла отверстия, то траектории раскручивались бы по спирали на их месте; на рисунке тем не менее видно, что вошедшая в  $L_0$  траектория уже никогда не выйдет на отверстия.

Каждая траектория пересекает линию ветвления  $BB$  сверху вниз; после пересечения  $BB$  в центральной точке она асимптотически стремится к состоянию покоя в нуле; в противном случае она обходит одно из отверстий и снова пересекает  $BB$  и т. д. Мы определим отображение Пуанкаре  $s \rightarrow \psi_0(s)$  отрезка  $BB$  следующим образом. Пусть  $s$  — параметр вдоль  $BB$  (например, длина дуги), причем для центральной точки  $s=0$ . Если траектория пересекает  $BB$  при  $s=s_1 \neq 0$ , то в следующий раз она пересечет  $BB$  при  $s=\psi_0(s_1)$ ; значение  $\psi_0(0)$  не определено. Рис. 31.3б схематически поясняет это определение. Путем численного построения траекторий можно прове-



речь, что такое отображение обладает свойством, названным Вильямсом [1977] «несохранением близости»<sup>1)</sup> и состоящим в следующем: если  $I$  — любой интервал  $s_0 < s < s_0 + \varepsilon$  (он может быть сколь угодно малым), то  $n$ -кратное отображение  $I$  при некотором  $n$  будет совпадать с  $BB$ . Иначе говоря, независимо от того, насколько близко две траектории на  $L_0$  одна к другой вначале, с течением времени они в конце концов станут вполне разделенными. В этом можно убедиться, например показав, что при подходящем выборе параметра  $s$  для всех  $s$  справедлива оценка  $\psi'_0(s) \geq \text{const} > 1$ .

Траектория, которая пересекает линию ветвления  $BB$  слева от ее центра, обходит точку  $P_1$  по часовой стрелке, перед тем как

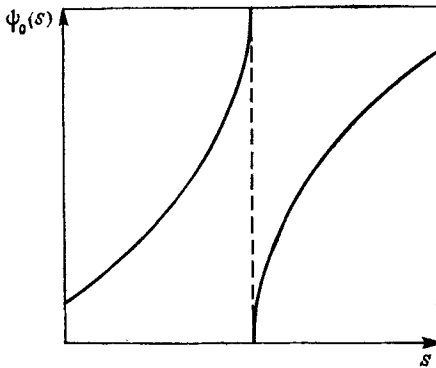


Рис. 31.36. Отображение Пуанкаре.

вернуться к  $BB$ , а если пересечение было справа от центра, траектория обойдет против часовой стрелки точку  $P_2$ . Число обходов траекторией одной из точек  $P_1$  или  $P_2$ , перед тем как перейти к другой, зависит от того, как быстро она раскручивается по спирали относительно этой точки, а также от критического пути или от того, как далеко от центра она впервые пересекла  $BB$  после прихода с другой стороны. Сущность открытия Лоренца состоит в том, что последовательные числа оборотов относительно этих точек изменяются псевдослучайным образом, так что движение является аperiodическим.

Как отметил сам Лоренц, картина, основанная на ветвящейся поверхности  $L_0$ , не может быть точной, потому что две траектории, пересекающие линию ветвления  $BB$  в одной и той же точке, должны были бы после этого полностью совпасть, что противоречит однозначной обратимости траекторий. Следовательно, два листа поверхности не могут сливаться в один лист, а должны оставаться разведенными на очень небольшое расстояние. После того как траектории сделают еще по одному обороту, два листа превратятся в четыре и т. д. Отсюда следует, что аттрактор должен состоять из бесконечного множества листов, возможно как-то связанных вместе в единую структуру в  $R^3$ , которая называется *аттрактором Лоренца* и обозначается через  $L$ . Однако, по крайней мере для значений параметров, исследованных Лоренцом ( $\sigma=10$ ,  $b=8/3$ ,  $r=28$ ), приведенная выше детализация структуры в действительности является вполне

<sup>1)</sup> В оригинале locally eventually onto. — Прим. перев.

исчерпывающей: разделение листов оказывается настолько незначительным, что с точностью примерно до четырех десятичных знаков ветвящаяся поверхность  $L_0$  вместе с движениями на ней, как они были схематически изображены, полностью описывает аттрактор.

### 31.11. АТТРАКТОР ЛОРЕНЦА. АПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ

Лоренц заметил, что случайность движения можно оценивать, рассматривая последовательные максимумы  $Z_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , координаты  $Z(t)$  полученной численно траектории. [Из третьего уравнения системы (31.9.1) видно, что эти максимумы имеют место

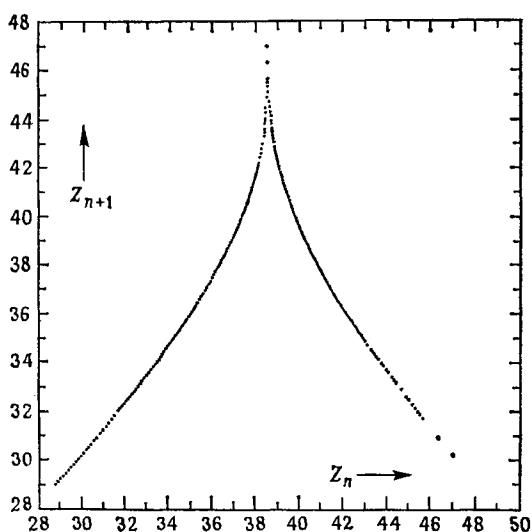


Рис. 31.4. График Лоренца.

при пересечениях траектории с гиперболоидом, заданным уравнением  $Z = (1/b)XY$ .] Лоренц установил, что точки  $(Z_n, Z_{n+1})$  образуют представленную на рис. 31.4 кривую  $Z_{n+1} = f(Z_n)$ , которая является гладкой всюду, за исключением центральной точки возврата.

Как отметил Лоренц,  $Z_{n+1}$  не может быть в точности однозначной функцией от  $Z_n$ , так как ее значение, вообще говоря, зависит также от значений  $X(t)$  и  $Y(t)$ , взятых в тот момент, когда  $Z(t) = Z_n$ . Следовательно, график Лоренца должен быть слегка размытым и иметь некоторую поперечную структуру, хотя возможно, и в очень узких пределах. Эта структура отражает тонкую структуру аттрактора  $L$ , и ее можно начать раз-

личать, если отклонения точек графика от гладкой кривой увеличить примерно в тысячу раз (см. работу Рихтмайера [1981]).

Если пренебречь тонкой структурой графика Лоренца, то последовательность  $\{Z_n\}_0^\infty$  максимумов координаты  $Z(t)$  можно рассматривать как полученную из некоторого начального значения  $Z_0$  путем последовательного применения отображения  $f: Z \rightarrow f(Z)$ , так что  $Z_{n+1} = f(Z_n)$ .

Чтобы изучить итерации отображения статистически, рассмотрим задачу перехода от  $Z$  к новой переменной  $W$  при помощи уравнений

$$Z = \zeta(W), \quad W = \zeta^{-1}(Z) \quad (31.11.1)$$

и постараемся по возможности упростить вид нового отображения  $g: W \rightarrow g(W)$ . В частности, мы хотим выбрать переход (31.11.1) так, чтобы функция  $g(W)$  была «треугольной», т. е.

$$g(W) = \begin{cases} 2W, & \text{если } 0 \leq W \leq 1/2, \\ 2-2W, & \text{если } 1/2 \leq W \leq 1. \end{cases} \quad (31.11.2)$$

Лоренц рассматривал отображение  $g$ , основанное на этой функции, как некоторую модель для отображения  $f$ , получающегося в его вычислениях, чтобы качественно предсказать статистические свойства движения. Покажем, как

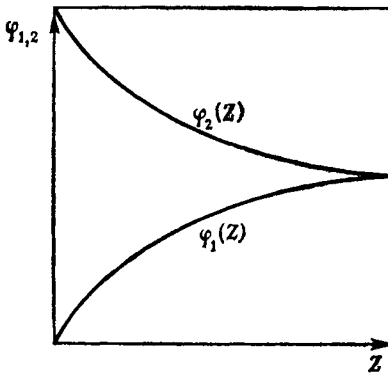


Рис. 31.5.

при определенных предположениях относительно функции  $f(Z)$  можно построить преобразование (31.11.1) численно. Во-первых, предположим, что координата  $Z$  преобразована линейно таким образом, что наименьшее и наибольшее значения  $Z_n$  стали равными 0 и 1. Тогда функция  $f(Z)$  будет отображать интервал  $[0, 1]$  на себя. Предположим, что  $f(0) = f(1) = 0$ . [На самом деле  $f(0) \approx 0.0035$ , но мы будем пренебрегать этой разностью, поскольку она одного порядка с тонкой структурой графика

Лоренца.] Будем также предполагать, что  $f(Z)$  дифференцируема всюду, за исключением точки возврата, и что при всех  $Z$   $|f'(Z)|$  больше некоторой постоянной  $\alpha > 1$ . Тогда можно показать (см. работу Руссмана и Зендера [1980] или Рихтмайера [1981]), что существует единственная непрерывная возрастающая функция  $\zeta(W)$ , которая переводит отображение  $Z \rightarrow f(Z)$  в отображение  $W \rightarrow g(W)$ .

Чтобы получить значения  $\zeta(W)$ , введем функции  $\varphi_1(Z)$  и  $\varphi_2(Z)$ , обратные для восходящей и нисходящей частей  $f(Z)$ , как показано на рис. 31.5. Тогда из (31.11.2) видно, что функция  $\zeta(W)$  должна удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}\zeta(W) &= \varphi_1(\zeta(2W)), & \text{если } 0 \leq W \leq 1/2, \\ \zeta(W) &= \varphi_2(\zeta(2-2W)), & \text{если } 1/2 \leq W \leq 1.\end{aligned}$$

Из этих уравнений  $\zeta(W)$  последовательно вычисляется для двоичных значений  $W$ , взятых в таком порядке:  $W = 0, 1, 1/2, 1/4, 3/4, 1/8, \dots$ , начиная с  $\zeta(0) = 0$  и  $\zeta(1) = 1$ , а затем это делается для других значений на основании условия непрерывности. Полученный результат представлен на рис. 31.6а, а на рис. 31.6б представлен результат применения преобразования  $\zeta(W)$  к графику Лоренца.

Функция  $\zeta(W)$  является непрерывной по Гёльдеру, причем показатель Гёльдера равен  $\log_2 \alpha$ , где  $\alpha$  — наимышая оценка снизу для  $|f'(Z)|$ , но она не будет абсолютно непрерывной; следовательно, то, что верно для отображения  $g: W \rightarrow g(W)$  при почти всех  $W$ , не обязательно верно для отображения  $f: Z \rightarrow f(Z)$  при почти всех  $Z$ .

Следствием непрерывности функции  $\zeta(W)$  (для этого не требуется абсолютной непрерывности) будет то, что отображение  $f$  не сохраняет близости (так назвал это свойство Вильямс — см. § 31.10): если  $I$  — любой интервал  $a < Z < a + \varepsilon$ , то после некоторого конечного числа итераций  $n$  множество  $f^n(I)$  полностью покроеет  $[0, 1]$ . Ясно, что  $f$  будет обладать этим свойством тогда и только тогда, когда  $g$  также обладает им, но для  $g$  оно почти очевидно. В самом деле, длина любого интервала  $I$  на оси  $W$  удваивается под действием  $g$ , если  $g(I)$  не содержит точку  $W = 1/2$ , а в этом последнем случае длина по крайней мере не уменьшается. Следовательно, после каждой пары итераций длина по меньшей мере удваивается, пока для некоторого  $I$  оба множества  $g(I)$  и  $g(g(I))$  не будут содержать точку  $W = 1/2$ , а в этом последнем случае  $g(g(I))$  полностью покроеет интервал  $[1/2, 1]$ , так что  $g(g(g(I)))$  покроеет  $[0, 1]$ .

Отсюда следует, что итерации отображения  $f$  неустойчивы в смысле Ляпунова, так как независимо от того, насколько две точки были близки друг к другу вначале, они будут в конце концов отстоять одна от другой на конечное расстояние (например, по меньшей мере на  $1/2$ ). Следовательно, если мы можем пренебречь тонкой структурой графика Лоренца, то движение на аттракторе Лоренца также станет неустойчивым по Ляпунову и тем самым будет иметь чисто непрерывный энергетический спектр.

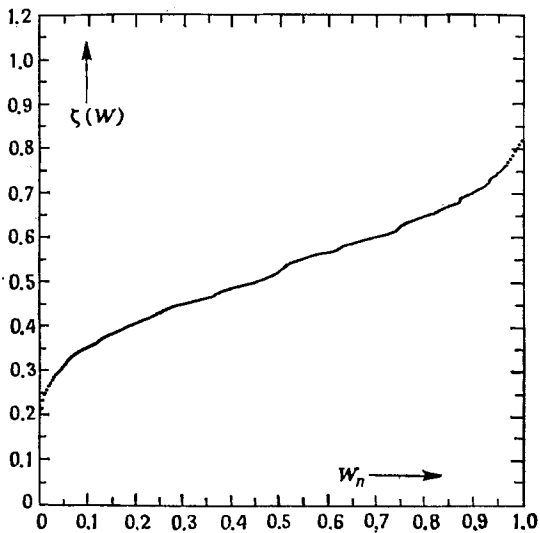
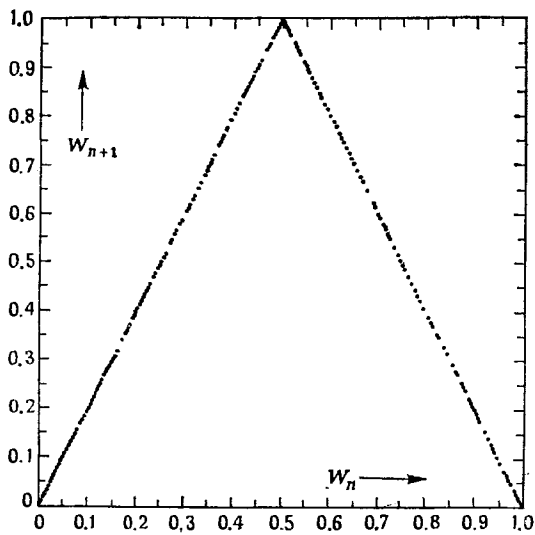


Рис. 31.6а.

Рис. 31.6б, График Лоренца для переменной  $W$ .

**31.12. СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ  $f$  и  $g$** 

Статистические свойства этих отображений несколько различны; первым рассмотрим отображение  $g$ . Чтобы воспользоваться специфическими свойствами функции  $g(W)$ , определенной в (31.11.2), представим  $W$  в двоичном виде как  $W=0.a_0a_1a_2\dots$ , где каждое  $a_i$  равно 0 или 1. Тогда для  $g(W)$  будем иметь просто

$$g(0.a_0a_1a_2\dots) = \begin{cases} 0.a_1\bar{a}_2\dots, & \text{если } a_0=0, \\ 0.\bar{a}_1a_2\dots, & \text{если } a_0=1, \end{cases}$$

где черта сверху обозначает дополнение, т. е. замену 0 на 1 и 1 на 0. Теперь предположим, что начальный элемент  $W_0$  последовательности  $\{W_n\}_{n=0}^\infty$ , получающейся путем итерирования  $g$ , выбран случайным образом исходя из равномерного распределения на интервале  $[0, 1]$ . Тогда каждая двоичная цифра элемента  $W_0$  может с одинаковой вероятностью быть равной 0 или 1 независимо от значений других цифр и, более того,  $W_n$  будет меньше  $1/2$  или не меньше  $1/2$  в зависимости от значения  $n$ -й цифры элемента  $W_0$ . Отсюда следует, что каждый элемент  $W_n$  может с одинаковой вероятностью быть меньше  $1/2$  или не меньше  $1/2$ , и поэтому не существует корреляции между близкими членами последовательности.

Чтобы установить соответствующие свойства отображения  $f$ , путем итерирования  $f$  была численно сгенерирована последовательность  $\{Z_n\}$  длиной в 200 000 элементов (см. работу Рихтмайера [1981]). Для анализа результата на ее элементах была определена функция

$$s_n = \begin{cases} -1, & \text{если } Z_n < 1/2, \\ +1, & \text{если } Z_n \geq 1/2. \end{cases}$$

Среднее значение  $s_n$  оказалось равным  $-0.1416$  (около 64 стандартных отклонений), а значимые положительные корреляции были обнаружены между  $s_n$  и  $s_{n+1}$ ,  $s_{n+2}$  и  $s_{n+3}$ . Корреляции между  $s_n$  и  $s_{n+k}$  при  $k \geq 4$  уже не были значимыми по отношению к размеру взятой выборки.

Разница между свойствами отображений  $f$  и  $g$  отражает отсутствие абсолютной непрерывности у функции  $\zeta(W)$ , которая связывает  $Z$  и  $W$ . Ясно, что  $W < 1/2$  тогда и только тогда, когда  $Z = \zeta(W) < 1/2$  (потому что изображенный на рис. 31.4 график Лоренца симметричен с высокой степенью точности), но поведение функции  $g(W)$  при почти всех  $W$  не является таким же, как поведение функции  $f(Z)$  при почти всех  $Z$ . На интервале  $[0, 1]$  найдется некоторое множество меры нуль, которое под действием  $\zeta$  преобразуется в множество положительной меры (в действительности равной 1), и аналогичные множества имеются для  $\zeta^{-1}$ . Тем не менее оба ото-

бражения имеют аналогичное поведение; следовательно, качественные статистические свойства системы Лоренца могут быть получены при помощи изучения  $f$ , как это и сделал Лоренц.

### 31.13. АТТРАКТОР ЛОРЕНЦА. ДЕТАЛИ СТРУКТУРЫ. I

Согласно § 31.10, аттрактор Лоренца  $L$  содержит бесконечно много листов (фактически несчетное множество), лежащих вблизи идеализированной ветвящейся поверхности  $L_0$  и как-то связанных вместе, в результате чего образуется некоторая многолистная структура в  $\mathbb{R}^3$ . Структура аттрактора  $L$  была исследована Вильямсом [1977], и мы приведем его основные результаты, изложив их на некотором интуитивном геометрическом уровне без учета определенных топологических трудностей, таких, которые возникают из-за наличия бесконечно многих вершин у клеточного комплекса  $F$  в ограниченной области полосы  $S$  (см. ниже).

Конечно, аттрактор полностью определяется дифференциальными уравнениями (31.9.1). Однако до сих пор неизвестен метод для его точного определения, исходящий из этих уравнений, и даже метод для определения его общих топологических свойств. Более того, эти уравнения являются несколько специфическими и искусственными; следовательно, представляются более интересными общие разновидности аттрактора, которые определяются уравнениями, в общем аналогичными уравнениям (31.9.1). Целью работы Вильямса было найти все аттракторы, которые связаны с ветвящимся многообразием  $L_0$  описанного выше вида точно так же, как и аттрактор  $L$ . Он назвал их *аттракторами Лоренца* в общем.

Вильямс использовал абстрактную топологическую конструкцию, называемую обратным пределом. Топологические свойства получившегося аттрактора и поток на нем полностью определяются заданным на  $L_0$  полупотоком, а на самом деле так называемыми последовательностями обходов <sup>1)</sup> для траекторий  $W^u$  и  $W^s$ . Вильямс показал, что существует несчетное множество таких различных аттракторов (различных в топологическом смысле).

Обнаруженные Вильямсом аттракторы могут быть вложены в  $\mathbb{R}^3$ , но вопрос о том, какой из них будет определяться системой дифференциальных уравнений типа (31.9.1), остается открытым.

Чтобы исследовать структуру аттрактора, следуя Вильямсу, рассмотрим кусок поверхности и затем продолжим его, двигаясь по лежащим на нем траекториям как вперед, так и назад по времени. Если траектория обходит точку  $P_1$ , то она движется к листу многообразия  $L$ , расположенному позади того, который был перед этим (с точки зрения наблюдателя, смотрящего на рис. 31.3а), а если она обходит  $P_2$ , то движется к листу, расположенному спере-

<sup>1)</sup> В оригинале kneading sequences. — Прим. перев.

ди. Если она сначала обходит одну, а затем другую точку, то уже нельзя сказать определенно, впереди или сзади от начальной точки она будет после этого; она даже может вернуться в свою начальную точку, и тогда мы получили бы периодическую траекторию. Один из результатов Вильямса состоит в том, что периодические траектории плотны на  $L$ .

Роль неустойчивого многообразия  $W^u(0)$  заключается в следующем. Как было указано в § 31.10, оно состоит из двух траекторий, которые выходят из нуля горизонтально в двух противоположных направлениях, образуя границу поверхности  $L_0$  и затем уходя внутрь нее. Формально возможен тот случай, когда одна из них или обе они могут в конце концов пройти точно через центр линии  $BB$  и затем асимптотически устремиться к состоянию покоя в нуле. Мы отбросим эту возможность как маловероятную и предположим, что они будут бесконечно долго вращаться на  $L_0$ . Следуя Вильямсу, обозначим через  $W_1^u(0)$  траекторию, которая выходит из нуля вправо и, следовательно, впервые пересекает линию  $BB$  в ее левом конце, а через  $W_2^u(0)$  — траекторию, которая выходит из нуля влево и, следовательно, впервые пересекает линию  $BB$  в ее правом конце. Определим так называемую *последовательность обходов* для этих траекторий как  $z_1 z_2 z_3 \dots$ , где  $z_k$  равно 1 или 2 в соответствии с тем, вокруг какой из точек,  $P_1$  или  $P_2$ , происходит  $k$ -й виток траектории. Ниже будет предполагаться, что эти последовательности начинаются как 2111... и 1222... соответственно для  $W_1^u(0)$  и  $W_2^u(0)$ , и будет показано, что они полностью определяют топологию аттрактора  $L$ .

Чтобы осуществить намеченное, нам придется сделать следующие предположения [считая их, таким образом, следствиями дифференциальных уравнений (31.9.1) — численные расчеты вполне подтверждают большинство из них].

1. Ветвящаяся поверхность  $L_0$  и полупоток на ней являются такими, как описано в § 31.10. [Мы говорим «полупоток», а не «поток» потому, что из-за ветвления траектория  $x(t)$  на  $L_0$  в противоположность траектории на  $L$  не может быть однозначно определена при  $t < 0$ , исходя из  $x(0)$ .]

2. Отображение Пуанкаре  $\psi_0$  линии  $BB$  не сохраняет близости.

3. Существует непрерывное отображение (проекция)  $p$  многообразия  $L$  на  $L_0$ , которое переводит траектории на  $L$  в траектории на  $L_0$ : если  $x(t)$  — движение на  $L$ , то  $p(x(t))$  — движение на  $L_0$ .

4. Каждое движение на  $L_0$  получается как результат действия  $p$  на единственное движение на  $L$ . (Представляется затруднительным получить убедительное подтверждение этого предположения численным путем.) Более того, движение на  $L$  непрерывно зависит от движения на  $L_0$ : если траектории  $x_0(t)$  и  $x'_0(t)$  близки друг к другу на  $L_0$  в течение длительного интервала времени ( $-T, T$ ), то они



будут проекциями траекторий  $x(t)$  и  $x'(t)$ , близких друг к другу в пространстве (т. е. на  $L$ ) в течение длительного интервала времени.

5. Последовательности обходов для  $W_t^u(0)$  и  $W_t^s(0)$  начинаются как 2111... и 1222... соответственно. Это означает, что траектория  $W_t^u(0)$  после своего первоначального обхода точки  $P_2$  затем обойдет  $P_1$  по крайней мере три раза (для системы Лоренца она делает это 25 раз) перед тем, как она снова начнет обход точки  $P_2$ ; аналогичное утверждение справедливо и для  $W_t^s(0)$ .

Чтобы двигаться по траекториям собственно в трехмерном пространстве, заменим линию ветвления  $BB$  полосой  $S$ , поперечной к  $L_0$  и пересекающей  $L_0$  по  $BB$ . Оказывается удобным оття-

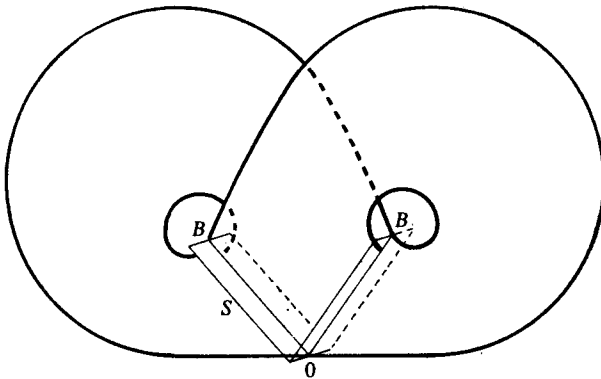


Рис. 31.7. Полоса  $S$ .

нуть как  $S$ , так и  $BB$  вниз настолько, чтобы они прошли через нуль, как показано на рис. 31.7. Мы приведем детальное описание пересечения  $S \cap L \stackrel{\text{def}}{=} F$  полосы  $S$  и аттрактора  $L$ . Множество  $F$  будет описано в форме так называемого клеточного комплекса, состоящего из точек, называемых вершинами, и кривых, которые называются «звеньями»<sup>1)</sup> и каждая из которых связывает некоторую пару вершин. Мы установим, что вершины — это нуль и точки пересечения многообразия  $W^u(0)$  с полосой  $S$ , а звенья — это пересечения составляющих аттрактор  $L$  листов с полосой  $S$ . Множество  $F$  состоит из нуля и двух частей, лежащих по разные стороны от линии, пересекающей полосу  $S$  в нуле. Эта линия принадлежит относящемуся к нулю устойчивому многообразию и служит для того, чтобы отделить траектории, которые будут в очередной раз обходить  $P_1$ , от траекторий, которые будут в очередной раз обходить  $P_2$ .

<sup>1)</sup> В оригинале 1-cells.— Прим. перев.

Мы увидим, что  $W^u(0)$  на всей своей протяженности является границей бесконечно многих листов аттрактора  $L$ , которые скреплены вместе этой границей, образующей, по выражению Вильямса, «корешок канторовой книги» (см. рис. 31.9 в § 31.16). Линия, трансверсальная к  $L_0$  точно внутри границы, пересекается с этими листами в канторовом множестве точек, как это будет объяснено ниже.

Обозначим через  $l_1, l_2, \dots$  последовательные пересечения траектории  $W^u_i(0)$  с полосой  $S$  (они могут лежать по любую сторону от нуля), а через  $r_1, r_2, \dots$  — пересечения  $W^s_i(0)$  с  $S$ ; все они

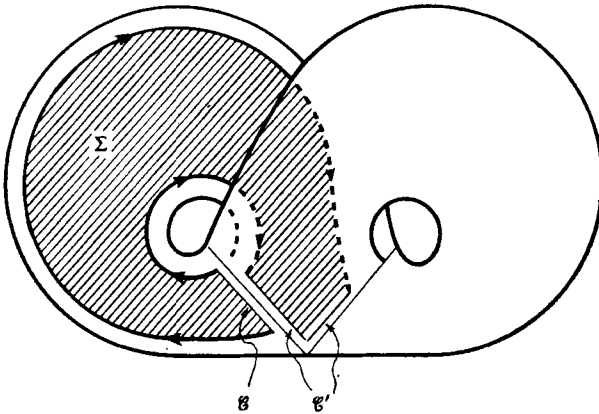


Рис. 31.8. Поверхностный элемент на аттракторе Лоренца.

являются точками  $S$ . При проектировании на  $L_0$  точка  $l_1$  займет на линии ветвления  $BB$  крайнее левое положение, а  $r_1$  — крайнее правое положение; проекции остальных точек будут находиться между ними.

Каждый лист аттрактора  $L$  пересекает полосу  $S$  по кривой  $\mathcal{E}$ , являющейся некоторым звеном множества  $F$ , и если  $\mathcal{E}$  будет переноситься потоком вкруговую до тех пор, пока она снова не окажется на  $S$  в виде другой кривой  $\mathcal{E}'$ , то она опишет поверхностный элемент  $\Sigma$  в  $\mathbb{R}^3$ , как показано на рис. 31.8, и мы будем представлять себе  $L$  составленным из таких поверхностных элементов;  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{E}'$  являются соответственно *начальной* и *конечной* кривыми элемента  $\Sigma$ . Сделаем предварительное предположение о том, что на  $S$  найдется кривая, соединяющая точки  $l_1$  и  $r_1$  и состоящая из точек аттрактора  $L$ . (Это предположение обосновывается ниже, а именно в § 31.17.) Такая кривая проходит через нуль и поэтому состоит из двух звеньев множества  $F$ . Мы должны рассмотреть их отдельно, и пусть  $\mathcal{E}$  будет тем звеном, которое соединяет нуль с  $r_1$ . Как  $\mathcal{E}$  переносится потоком вкруговую, описывая поверх-

ность  $\Sigma$ , так и ее левый конец, вначале расположенный в нуле, переносится из нуля вправо вдоль  $W_t^u(0)$ , так что он, как и все точки кривой  $\mathcal{C}$ , обходит точку  $P_2$  один раз против часовой стрелки; после этого он оказывается на  $S$  в точке  $I_1$ ; следовательно, конечная кривая  $\mathcal{C}'$  поверхностного элемента  $\Sigma$  соединяет  $I_1$  с  $r_2$  в  $S$ , располагаясь чуть впереди  $\mathcal{C}$  (т. е. ближе к наблюдателю).

Прежде чем переносить по потоку точки кривой  $\mathcal{C}'$ , следует заметить, что, так как  $I_1$  и  $r_2$  лежат по разные стороны от нуля (согласно пятому из приведенных выше предположений), мы должны разделить  $\mathcal{C}'$  на два звена, скажем  $\mathcal{C}'_1$  и  $\mathcal{C}'_2$ , соединяющих  $I_1$  с нулем и нуль с  $r_2$  соответственно. Тогда  $\mathcal{C}'_1$  будет обходить по часовой стрелке точку  $P_1$ , а  $\mathcal{C}'_2$ —против часовой стрелки точку  $P_2$ , создавая таким образом два новых поверхностных элемента на  $L$ , скажем  $\Sigma'_1$  и  $\Sigma'_2$ . Этот процесс можно продолжать сколько угодно долго.

В общем случае для двух данных точек  $I_i$  и  $r_j$ , получающихся соответственно при пересечении  $W_t^u(0)$  и  $W_t^s(0)$  с  $S$  и лежащих по одну сторону от нуля, может существовать (а может и не существовать) звено из  $F$ , связывающее  $I_i$  с  $r_j$  (т. е. кривая на  $S$ , соединяющая  $I_i$  с  $r_j$  и состоящая из точек аттрактора  $L$ ; причем если существует одна такая кривая, то их будет бесконечно много). Если такая кривая переносится вдоль по потоку, как это было описано выше, она описывает некоторый поверхностный элемент  $\Sigma$  аттрактора  $L$ .

Нуль обозначается также через  $I_0$  и  $r_0$ . Будем обозначать его через  $r_0$ , если он далее переносится вдоль  $W_t^u(0)$  к  $r_1$ , и через  $I_0$ , если он далее переносится вдоль  $W_t^s(0)$  к  $I_1$ . Тогда общий поверхностный элемент  $\Sigma$  аттрактора  $L$  получается путем переноса звена, связывающего  $I_i$  с  $r_j$  в  $S$  (теперь допускается  $i=0$  или  $j=0$ ), вокруг  $P_1$  или вокруг  $P_2$  до кривой, соединяющей  $I_{i+1}$  с  $r_{j+1}$ . (Если при этом  $I_{i+1}$  и  $r_{j+1}$  лежат по разные стороны от нуля, то необходимо разделить новую кривую на два звена, как это делалось выше.)

### 31.14. СИМВОЛЫ ВИЛЬЯМСА $[i, j]$

Если для данных  $i$  и  $j$  точки  $I_i$  и  $r_j$  связаны звеном из  $F$  (а следовательно, бесконечно многими звеньями, как мы увидим далее), то мы будем говорить, что определен или существует символ  $[i, j]$ . Следуя Вильямсу, сформулируем теперь правила, позволяющие ответить на вопрос о существовании таких символов. Наше предварительное предположение состоит в том, что  $[0, 1]$  и  $[1, 0]$  являются символами (а отсюда и из предположения о том, что  $r_2$  лежит правее нуля, следует, что  $[0, 2]$  тоже символ). Эти правила таковы:

1)  $[0, 1]$  и  $[1, 0]$ —символы;

2) пусть  $[i, j]$ —символ; тогда

(а) если  $l_{i+1}$  и  $r_{j+1}$  лежат соответственно слева и справа от нуля, то  $[i+1, 0]$  и  $[0, j+1]$ —символы;

(б) в противном случае  $[i+1, j+1]$ —символ.

В случае 2 (а) мы говорим, что символ  $[i, j]$  *предшествует* символам  $[i+1, 0]$  и  $[0, j+1]$  или символы  $[i+1, 0]$  и  $[0, j+1]$  *следуют за*  $[i, j]$ , а в случае 2 (б)—что он предшествует символу  $[i+1, j+1]$  (может быть, лучше было бы говорить «непосредственно предшествует»).

(Замечание. В противоположность Вильямсу мы предполагаем, как уже говорилось выше, что  $l_i$  и  $r_j$  никогда в точности не попадают в нуль при  $i > 0$  или  $j > 0$ .)

Правила выбраны так, что  $[i, j]$  предшествует  $[i', j']$  тогда и только тогда, когда существует поверхностный элемент  $\Sigma$ , начальная кривая которого связывает  $l_i$  с  $r_j$ , а его конечная кривая связывает  $l_{i'}$  с  $r_{j'}$ . [Это описывает лишь часть конечной кривой в случае 2 (а).]

Следующие утверждения непосредственно вытекают из этих правил (некоторые из них доказываются по индукции).

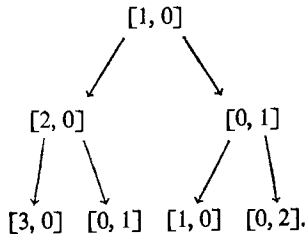
1) Если  $[i, j]$ —символ, то  $i \neq j$ .

2) У каждого символа есть один или два последующих в зависимости от того, какой случай имеет место: случай 2 (а) или случай 2 (б).

3) Символу  $[i, j]$  при положительных  $i$  и  $j$  предшествует только один символ, а именно  $[i-1, j-1]$ .

4) Если  $[i, j]$ —символ, то либо  $l_i < r_j \leq 0$ , либо  $0 \leq l_i < r_j$ , где знак  $<$  обозначает порядок следования после проектирования полосы  $S$  на линию ветвления  $BB$  поверхности  $L_0$ .

5) Так как, согласно предположению 5 предыдущего параграфа, траектория  $W^u(0)$  после прохождения точки  $l_1$  по меньшей мере еще дважды обойдет неподвижную точку  $P_1$ , прежде чем перейти через центр на правую половину полосы  $S$ , мы видим, что первые несколько символов, начиная с  $[1, 0]$ , будут такими:



В частности, символу  $[0, 1]$  предшествуют по крайней мере два различных символа—символы  $[1, 0]$  и  $[2, 0]$ .

б) Каждый символ в конечном счете предшествует любому другому символу в том смысле, что если  $\sigma = [i, j]$  и  $\tau = [i', j']$  заданы, то найдется такая конечная последовательность  $\sigma_0 = \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n = \tau$ , в которой  $\sigma_k$  всегда предшествует символу  $\sigma_{k+1}$ . Это ясно, если  $\sigma_0 = [1, 0]$  (или  $[0, 1]$ ), так как, согласно правилам, все другие символы следуют за  $[1, 0]$  или  $[0, 1]$  (т. е. получают из них), и мы только что видели, что  $[1, 0]$  и  $[0, 1]$  следуют один из другого. С другой стороны, если  $\tau = [1, 0]$  (или  $[0, 1]$ ), а символ  $\sigma$  произволен, то нужную последовательность можно найти, используя свойство несохранения близости, которым обладает отображение Пуанкаре  $\psi_0(s)$  линии ветвления  $BB$ . Грубо говоря, это свойство означает, что можно выбрать такую последовательность, чтобы ширина интервала  $(I_i, r_j)$  постоянно увеличивалась. Вильямс доказал, что, начав с произвольного  $\sigma$ , можно достичь символа  $[1, 0]$  (а тем самым и символа  $[0, 1]$ ) за конечное число шагов, если производная  $\psi'_0(s) > \sqrt{2}$  для всех  $s$ . В случае, изучавшемся Лоренцем, минимум  $\psi'_0(s)$  был больше, чем примерно 1.05; однако при помощи метода, обсуждавшегося в § 31.11, на  $BB$  вместо длины дуги  $s$  можно ввести новый параметр, чтобы превратить график функции  $\psi_0(s)$  в два прямолинейных отрезка, и тогда  $\psi'_0(s)$  на самом деле будет больше  $\sqrt{2}$  (фактически больше, чем примерно 1.9).

7) Для каждого  $i > 0$  (и каждого  $j > 0$ ) найдется по крайней мере одно  $j$  (одно  $i$ ), такое, что  $[i, j]$  будет символом.

### 31.15. ПРЕДЫСТОРИИ

Согласно § 31.4, одно из характерных свойств аттрактора  $L$  состоит в том, что точка  $x$  принадлежит  $L$  тогда и только тогда, когда траектория  $x(t)$ , для которой  $x(0) = x$ , лежит на  $L$  как при всех  $t < 0$ , так и при всех  $t \geq 0$ . При  $t \rightarrow -\infty$  траектория  $x(t)$  проходит по однозначно определяемой последовательности поверхностных элементов  $\Sigma, \Sigma', \Sigma'', \dots$  вида, описанного в § 31.13. Если траектории на  $\Sigma$  проходятся назад по времени, они переходят на  $\Sigma'$  и т. д. Следовательно, начальная кривая элемента  $\Sigma$  является по меньшей мере частью конечной кривой элемента  $\Sigma'$ . Если начальная кривая для  $\Sigma$  связывает  $I_i$  с  $r_j$ , а такая же кривая для  $\Sigma'$  связывает  $I_{i'}$  с  $r_{j'}$ , то  $[i', j']$  предшествует  $[i, j]$ . В общем случае у  $[i, j]$  может быть много предшествующих символов, но как только выбрано конкретное звено, соединяющее  $I_i$  с  $r_j$ , тем самым однозначно выделяется и предшествующий элемент, потому что начальная кривая поверхностного элемента  $\Sigma'$  однозначно определяется его конечной кривой.

Отсюда следует, что если  $[i, j]$ —символ, то каждое звено, связывающее  $I_i$  с  $r_j$ , характеризуется такой единственной беско-

нечной последовательностью символов  $\dots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0 = [i, j]$ , в которой  $\sigma_{-k-1}$  предшествует символу  $\sigma_{-k}$  при каждом  $k$ .

Можно показать, что если продолжить эту последовательность до бесконечности и в другом направлении, т. е. взять

$$\dots \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \quad (31.15.1)$$

то мы выделим не только конкретное звено, связывающее  $I_i$  с  $r_j$ , но и отдельную точку этого звена, так что каждая последовательность (31.15.1), в которой  $\sigma_k$  всегда предшествует  $\sigma_{k+1}$ , соответствует единственной траектории на  $L$ . Это следует из свойства несохранения близости для отображения Пуанкаре на  $BB$ . Если продолжить две траектории вперед по времени, то независимо от того, насколько они были близки друг к другу при  $t=0$ , они будут в конце концов разделены так, что в некоторый момент времени  $t > 0$  окажутся на разных поверхностных элементах  $\Sigma$ .

### 31.16. АТТРАКТОР ЛОРЕНЦА. ДЕТАЛИ СТРУКТУРЫ. II

Покажем сначала, что если  $[i, j]$  — символ, то найдется несчетное число звеньев из  $F$ , связывающих  $I_i$  с  $r_j$ . Согласно предыдущему параграфу, каждое такое звено соответствует единственной последовательности символов

$$\dots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0 = [i, j], \quad (31.16.1)$$

в которой  $\sigma_{-k-1}$  всегда предшествует  $\sigma_{-k}$ . Верно и обратное (см. следующий параграф): любая такая последовательность определяет некоторое звено, и мы увидим, что для данного  $\sigma_0$  такую последовательность можно выбрать несчетным числом способов. После того как выбран какой-либо символ  $\sigma_{-k}$ , возможно выбрать (согласно утверждению 6 из § 31.14) такие  $\sigma_{-k-1}, \sigma_{-k-2}, \dots$ , чтобы дойти до  $[0, 1]$  за конечное число шагов; положим  $\sigma_{-k-l} = [0, 1]$ . Тогда, согласно утверждению 5 из того же параграфа,  $\sigma_{-k-l-1}$  можно выбрать по меньшей мере двумя способами. Следовательно, при построении последовательности можно бесконечно много раз выбирать один из двух вариантов. Представив такой выбор на  $n$ -м шаге двоичной цифрой  $a_n$ , мы видим, что для данного  $\sigma_0$  существует по меньшей мере столько последовательностей (31.16.1), сколько имеется на единичном интервале вещественных чисел  $0.a_0a_1a_2\dots$ , т. е. множество таких последовательностей по меньшей мере несчетно.

Отсюда следует, что линия, трансверсальная к ветвящейся поверхности  $L_0$ , пересекает несчетное число листов аттрактора  $L$ . Пусть  $M$  — точечное множество пересечений этой линии с  $L$ . Так как  $L$  — замкнутое множество в  $\mathbb{R}^3$ ,  $M$  — замкнутое множество

на этой линии. Как было указано в § 31.9,  $L$  имеет нулевую меру Лебега в  $\mathbb{R}^3$ ; следовательно,  $M$  имеет нулевую меру на линии, так как в противном случае декартово произведение  $M$  и куска поверхности одного из листов аттрактора  $L$  имело бы положительную меру в трехмерном пространстве. Следовательно,  $M$  — несчетное замкнутое множество меры нуль. Наконец, в  $M$  нет изолированных точек, так как приведенные Вильямсом соображения топологического характера показывают, что если звено определяется последовательностью (31.16.1), то найдутся другие, произвольно близкие к нему звенья, соответствующие последовательностям, которые согласуются с (31.16.1) достаточно далеко в обратном направлении. Следовательно,  $M$  является канторовым множеством.

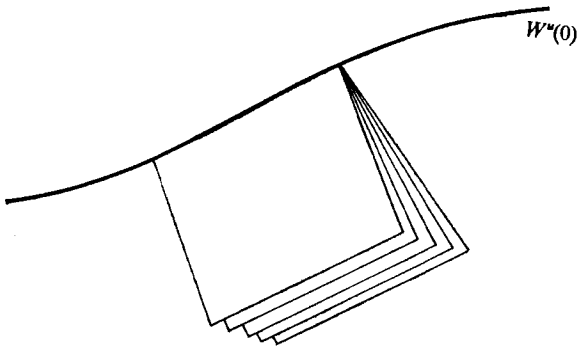


Рис. 31.9. «Канторова книга».

Согласно утверждению 7 из § 31.14, каждая из точек  $l_i$  и  $g_i$  является концом несчетного числа звеньев из  $F$ . Перенося эти звенья вдоль по потоку, мы видим, что неустойчивое многообразие  $W^u(0)$  на всей своей протяженности представляет собой корешок канторовой книги в соответствии с терминологией Вильямса (см. рис. 31.9).

Последовательность (31.15.1), если она периодична, соответствует периодической траектории на  $L$ . Взяв любую последовательность (31.15.1), можно без труда найти такую периодическую последовательность, которая согласуется с выбранной, скажем при  $-K < k < K$ , где  $K$  — большое число. Следовательно, взяв любую траекторию, можно найти периодическую траекторию, произвольно близкую к ней, так что периодические траектории плотны на  $L$ . (Конечно, в физической реализации или в численной модели понятие строго периодической траектории является чистой идеализацией из-за конечной точности и неустойчивости по Ляпунову.)

31.17. СУЩЕСТВОВАНИЕ ЗВЕНЬЕВ В  $F$ 

В § 31.13 мы считали необходимым предположить предварительно, что в  $F$  имеется хотя бы одно звено, связывающее, например, нуль с  $\mathbf{r}_1$ . (Отсюда уже вытекало существование других звеньев, если переносить первое в круговую по потоку до очередного его пересечения с полосой  $S$  и т. д.) Таким образом, мы предположили, что аттрактор  $L$  содержит некоторую кривую, лежащую на  $S$  и связывающую нуль с  $\mathbf{r}_1$ . Проекция множества  $F$  на поверхность  $L_0$ —это линия ветвления  $BB$ , которая является пространственной кривой. Это хорошо подтверждается численными расчетами. Для выяснения деталей структуры самого множества  $F$  нам придется обратиться к предположениям 1—5, которые были сделаны в § 31.13 относительно аттрактора  $L$ . Здесь мы объясним, как из этих предположений можно сделать заключение о существовании звена, связывающего нуль с  $\mathbf{r}_1$  (или  $l_1$  с нулем—рассуждения в этом случае будут аналогичными).

Мы рассмотрим также следующую задачу. Было показано, что если  $\sigma_0 = [i, j]$ —символ, то любое звено, связывающее  $l_i$  с  $\mathbf{r}_j$ , определяет единственную последовательность  $\dots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0$ , в которой  $\sigma_{-k-1}$  всегда предшествует символу  $\sigma_{-k}$ . Задача состоит в том, чтобы показать, что верно и обратное: любая такая последовательность определяет некоторое звено, связывающее  $l_i$  с  $\mathbf{r}_j$ .

Свое решение первой задачи Вильямс начинает с того, что берет произвольную точку  $\mathbf{x}_{00}$  на линии ветвления  $BB$  между проекциями нуля и точки  $\mathbf{r}_1$ , строит на ветвящейся поверхности  $L_0$  такую траекторию  $\mathbf{x}_0(t)$ , для которой  $\mathbf{x}_0(0) = \mathbf{x}_{00}$ , определяя для этого ее предысторию, а затем вводит на  $L$  траекторию  $\mathbf{x}(t)$ , проекция которой на  $L_0$ , согласно предположению 4 из § 31.13, совпадала бы с  $\mathbf{x}_0(t)$ . Это построение таково, что траектория  $\mathbf{x}(t)$  непрерывно зависит от положения точки  $\mathbf{x}_{00}$  на  $BB$ ; следовательно, точка траектории  $\mathbf{x}(0)$  непрерывно зависит от  $\mathbf{x}_{00}$ ; описывая при изменении  $\mathbf{x}_{00}$  кривую в  $F$ , которая достигает своими двумя концами нуля и  $\mathbf{r}_1$ .

Имеется много способов выбора предыстории  $\mathbf{x}_0(t)$ , приводящих к желаемому результату, так как существует бесконечно много звеньев, связывающих нуль с  $\mathbf{r}_1$  в  $F$ . Способ, используемый Вильямсом, состоит в том, чтобы сделать предысторию чередующейся между двумя половинами  $BB$ , а именно если при некотором  $t_1$  точка  $\mathbf{x}_0(t_1)$  предыстории принадлежит  $BB$  (но не совпадает с проекциями нуля,  $l_1$  или  $\mathbf{r}_1$ ), то траектория продолжается назад (вверх) на задний лист поверхности  $L_0$  для  $\mathbf{x}_0(t_1)$ , лежащей справа от нуля, и на передний лист для  $\mathbf{x}_0(t_1)$ , лежащей слева от нуля. Нетрудно проверить (обратившись к рис. 31.3а), что это всегда возможно и никогда не приводит предысторию в нуль или в проекции точек  $\mathbf{r}_1$  и  $l_1$ . Чтобы убедиться в непрерывной зави-



симости от  $x_{00}$ , заметим, что если  $x_{00}$  и  $x'_{00}$  близки друг к другу на линии ветвления  $BB$ , то получающиеся на  $L_0$  траектории  $x_0(t)$  и  $x'_0(t)$  будут близки друг к другу в течение длительного интервала времени, но тогда это верно и для траекторий  $x(t)$  и  $x'(t)$  на  $L$  в силу предположения 4 из § 31.13.

Чтобы показать, что получившаяся в  $F$  кривая имеет нужные концевые точки, заметим сначала, что если точка  $x_{00}$  очень близка к проекции точки  $r_1$  на  $BB$ , то предыстория будет очень близка к внешнему ребру того листа поверхности  $L_0$ , который лежит позади; следовательно, в прошлом траектория  $x(t)$  должна была длительное время находиться вблизи точки зстоя в нуле и поэтому длительное время была близка к траектории  $W^u_r(0)$ , которая идет из нуля к  $r_1$ . Наконец, если  $x_{00}$  находится очень близко от центра линии ветвления  $BB$ , траектория уже очень близка к точке зстоя и поэтому в течение длительного времени в прошлом была близка к стационарной траектории  $x(t) \equiv 0$ .

Аналогичная проверка того, что любая последовательность

$$\dots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0 = [i, j], \quad (31.17.1)$$

где  $\sigma_{-k-1}$  предшествует символу  $\sigma_{-k}$ , определяет некоторое звено из  $F$ , является более сложной, и мы отсылаем читателя к статье Вильямса, где точечное множество  $F$  аппроксимируется с помощью так называемых ретракций<sup>1)</sup>. Смысл этого приема состоит в том, что, если  $x_{00}$  — точка линии  $BB$  между проекциями на  $BB$  точек  $l_i$  и  $r_j$ , положим, что последовательность (31.17.1) предписывает, какой лист поверхности  $L_0$  будет следующим для предыстории  $x_0(t)$  каждый раз при встрече с линией ветвления, когда мы двигаемся по траектории  $x_0(t)$  назад (вверх) через  $BB$ . По чисто техническим соображениям целесообразно использовать последовательность (31.17.1) таким образом лишь на конечном числе шагов, скажем на  $n$  шагах, и считать, что перед этим предыстория чередовалась между двумя половинами  $BB$ , как было описано выше. Тогда получившаяся траектория  $x(t)$  будет не совсем такой, какая нам нужна, но близкой к ней и будет сближаться с ней при  $n \rightarrow \infty$ .

Утверждение о том, что каждая последовательность (31.17.1) определяет единственное звено из  $F$ , уже было использовано в предыдущем параграфе для установления несчетности числа листов аттрактора  $L$ .

### 31.18. БИФУРКАЦИЯ К СТРАННОМУ АТТРАКТОРУ

В § 31.9 мы отмечали, что бифуркация в системе Лоренца при  $r=r_0=24.74$  является докритической, и упомянули о возможности

<sup>1)</sup> Или стягиваний (топ.) — Прим. перев.

взрывного перехода в тот момент, когда неподвижные точки  $P_1$  и  $P_2$  утрачивают устойчивость. Однако при медленном возрастании  $r$  после прохождения  $r_0$  движение на аттракторе  $L$  происходит без какого-либо взрывного перехода, за исключением разве того случая, когда внезапное возникновение движения на  $L$  может рассматриваться как взрыв.

Описанный аттрактор соответствует  $r=28$ . Если  $r$ , уменьшаясь, становится меньше  $r_0$ , то оба отверстия на ветвящейся поверхности  $L_0$  уменьшаются, стягиваясь к неподвижным точкам  $P_1$  и  $P_2$ . При еще меньших значениях  $r$  (меньших 13.96)  $L$  продолжает существовать как инвариантное множество для движения (хотя уже не будет аттрактором), но оно достигает неподвижных точек  $P_1$  и  $P_2$  только при  $r=r_0$ . При  $r$ , лишь немного превышающих  $r_0$ , траектория, исходящая из  $P_1$  и  $P_2$ , сразу же становится траекторией на  $L$ . В этом смысле бифуркация при  $r_0$  происходит как внезапный переход от стационарной траектории в точке  $P_1$  или  $P_2$  к движению на аттракторе  $L$ .

### 31.19. МОДЕЛЬ ФЕЙГЕНБАУМА

Во время как аттрактор Лоренца появился в связи с докритической бифуркацией Хопфа, в моделях Ландау — Хопфа и Рюэля — Такенса предполагается существование последовательности закритических бифуркаций, приводящих к инвариантным торам все более высокой размерности (произвольно высокой в первой модели и по меньшей мере четвертой во второй). Однако, согласно теореме Пейкото, существование такой последовательности представляется маловероятным. Как было указано в конце § 29.10, нельзя утверждать, что при возникновении инвариантного двумерного тора в бифуркации от периодической траектории на нем найдутся такие траектории, каждая из которых плотно покрывает этот тор. Вместо этого типичным будет возникновение конечного числа периодических траекторий и неподвижных точек. Другие траектории асимптотически стремятся к этим периодическим траекториям и неподвижным точкам. Возникновение инвариантного трехмерного тора в следующей бифуркации, по-видимому, зависит от существования траектории, плотной на двумерном торе. Следовательно, бифуркация к инвариантному трехмерному тору представляется маловероятной.

Если периодическая траектория на двумерном торе обойдет его до замыкания  $n$  раз, то бифуркация называется *субгармонической* и характеризуется внезапным  $n$ -кратным увеличением периода в момент бифуркации (см. § 29.11). Недавно Фейгенбаум разработал модель, основанную на последовательности субгармонических бифуркаций с удвоением периода (см. работу Фейгенбаума [1980] и цитируемые в ней источники). Оказывается, что такие удвоения встречаются во многих примерах итерированных отображений и

простых динамических систем. Более того, с ростом числа  $n$  удвоенный поведению системы начинает подчиняться определенным асимптотическим законам, в формулировку которых входят универсальные постоянные и функции, не зависящие от изучаемой системы. К тому же эти асимптотические законы начинают выполняться совершенно точно при сравнительно небольших значениях  $n$ . В частности, значения  $\mu_n$  безразмерного параметра  $\mu$ , при которых происходят бифуркации (удвоения), сходятся к значению  $\mu_\infty$  как геометрическая прогрессия, причем для больших  $n$

$$(\mu_{n+1} - \mu_n) / (\mu_n - \mu_{n-1}) \approx 0.21416938.$$

При  $n \rightarrow \infty$ , по крайней мере в изученных случаях, энергетический спектр движения аппроксимирует непрерывный спектр с определенными универсальными свойствами. При  $\mu = \mu_\infty$  движение, по-видимому, становится аperiodическим и происходит на странном аттракторе.

Теперь уже известно (см. работу Лоренца [1981]), что примером такого поведения служит система Лоренца при значительно больших значениях безразмерного параметра  $r$ , чем те значения, которые вначале рассматривал Лоренц. А именно, странный аттрактор, который возникает при  $r = 24.74$ , сохраняется вплоть до значения  $r = r^*$  ( $\approx 250$ ). При  $r$ , значительно превосходящих  $r^*$ , существует периодическая траектория, и при *уменьшении*  $r$  в сторону  $r^*$  существует последовательность удвоений при значениях  $r = r_n$ . Последовательность  $\{r_n\}$  сходится сверху к значению  $r^*$ , причем

$$(r_{n+1} - r_n) / (r_n - r_{n-1}) \approx 0.214.$$

#### Приложение к главе 31 (разделы А — З).

##### ТИПИЧНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ

В настоящем приложении объясняются и используются понятия типичных и нетипичных свойств систем. Можно подумать, что в ряде разделов физики эти понятия в некотором смысле заменяют вероятность. Мы придем к выводу, что это не так, но что они могут оказаться важным путеводителем в дальнейшем развитии наших представлений о роли вероятности в физике.

##### 31.А. ПРОСТРАНСТВА СИСТЕМ

По той причине, что физическая система не может быть задана точно, и по ряду других причин часто желательно рассматривать не конкретную систему, а большое семейство систем. Если каждая система характеризуется значениями  $n$  параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , то тем самым ей ставится в соответствие некоторая точка пространства  $\mathbb{R}^n$ . И обратно, каждая точка в  $\mathbb{R}^n$  или в некоторой области  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$  может соответствовать единственной системе семейства.

В более общем случае системы семейства могут быть представлены точками в банаховом или гильбертовом пространстве, или в некотором более общем метрическом пространстве, или же в некотором еще более общем топологическом пространстве, которое мы будем называть *пространством систем*.

Например, каждая система семейства может быть динамической системой на плоскости:

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y),$$

где  $X$  и  $Y$  — компоненты заданного гладкого векторного поля  $X(x, y)$ . Тогда каждое такое векторное поле определяет систему и может быть представлено точкой в банаховом пространстве  $B$  с выбранной надлежащим образом нормой  $\|X(\cdot)\|$ . Ясно, что  $B$  бесконечномерно, так как никаким конечным набором параметров невозможно полностью задать векторное поле.

Вообще говоря, мы будем предполагать, что пространство систем является по меньшей мере метрическим. Тогда если расстояние  $d(X_1, X_2)$  между двумя системами мало, то можно считать, что одна из них получается из другой при помощи малого возмущения. Мы даже будем обычно предполагать, что пространство систем является нормированным, так что  $d(X_1, X_2) = \|X_1 - X_2\|$ .

### 31.В. ОТСУТСТВИЕ МЕРЫ ЛЕБЕГА В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Если система описывается конечным набором параметров  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , распределенных в  $\mathbb{R}^n$  согласно некоторому непрерывному вероятностному закону, и если некоторое свойство системы имеет место во всем  $\mathbb{R}^n$ , за исключением множества лебеговой меры нуль, то мы говорим, что оно выполняется для почти всех систем или что вероятность того, что оно не проявится, равна нулю.

Если  $n \rightarrow \infty$ , так что при этом  $\mathbb{R}^n$  заменяется бесконечномерным гильбертовым пространством, то, как было показано в § 13.11 тома 1, нельзя определить меру Лебега для предельного пространства; следовательно, вероятностные утверждения приведенного выше типа теряют силу. (Нелебеговы вероятностные меры обсуждаются в разд. 31.3 в конце этого приложения.)

### 31.В. ТИПИЧНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ

В любом пространстве систем независимо от того, определена в нем лебегова мера или нет, но в предположении, что оно является по крайней мере топологическим, можно определить, что означают типичные и нетипичные свойства систем. Это часто делается с таким расчетом, чтобы нетипичными свойствами можно было пренебречь в некоторых отношениях.

Подмножество пространства называется *бэровским множеством*, если оно является пересечением счетного числа плотных открытых подмножеств. Дополнение бэровского множества называется *тощим множеством*; оно представляет собой объединение счетного числа нигде не плотных подмножеств.

Свойство системы называется *типичным*, если оно выполняется на бэровском множестве пространства систем. Свойство называется *нетипичным*, если оно выполняется на тощем множестве. Заметим, что «нетипичность» не означает простое отрицание «типичности», так как множество может оказаться ни бэровским, ни тощим, например полупространство  $x_1 > 0$  в  $\mathbb{R}^n$ .

Теорема Бэра о категориях утверждает, что бэровское множество плотно в полном метрическом пространстве, но и тощее множество также может быть плотным; следовательно, различие не основывается на плотности. Более того, в случае конечномерного пространства бэровское множество может иметь лебегову меру нуль; следовательно, различие не основывается также и на мере (см. ниже разд. 31.Ж).

Если свойство  $a$  типично, то отрицание  $a$  — нетипичное свойство; если свойства  $a$  и  $b$  типичны, то типично и свойство « $a$  и  $b$ ». Два противоположных свойства не могут одновременно быть типичными.

### 31.Г. СИЛЬНАЯ ТИПИЧНОСТЬ. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Мы не будем приводить физической интерпретации типичности, за исключением следующего специального случая. Свойство называется *сильно типичным*, если оно имеет место на плотном открытом множестве пространства систем, т. е. не только на счетном пересечении таких множеств. (Заметим, между прочим, что пересечение конечного числа плотных открытых множеств снова будет плотным открытым множеством.) Если свойство сильно типично, если  $X$  — любая система и если  $\varepsilon_1$  — любое положительное число, то при помощи возмущения системы  $X$ , по норме не превосходящего  $\varepsilon_1$ , можно получить систему  $Y$  ( $\|Y - X\| \leq \varepsilon_1$ ), которая обладает этим свойством. Более того, тогда найдется такое другое положительное число  $\varepsilon_2$  ( $< \varepsilon_1$ ), что система сохранит это свойство при любом произвольном дополнительном возмущении, не превосходящем по норме  $\varepsilon_2$ . Ничего нельзя сказать о том, насколько трудным может оказаться поиск первого возмущения. (Могут также существовать возмущения системы  $X$ , по норме не превосходящие  $\varepsilon_1$ , которые *не приводят* к системе с нужным свойством.) Однако все достаточно тщательно подобранные системы обладают этим свойством; следовательно, такое свойство не может быть отнесено к числу тех, которые не могут проявиться на практике.

Если свойство сильно нетипично, т. е. если оно имеет место на нигде не плотном множестве пространства систем, то для любого  $\varepsilon_1 \geq 0$  найдется возмущение, по норме не превосходящее  $\varepsilon_1$ , при наложении которого это свойство исчезает. Более того, тогда найдется такое  $\varepsilon_2 \geq 0$ , что никакое дополнительное возмущение, по норме не превосходящее  $\varepsilon_2$ , не может восстановить это свойство.

### 31.Д. ТЕОРЕМА ПЕЙКСОТО

Теорема Пейксото [1962] гласит, что для динамических систем на компактном двумерном многообразии сильно типичное свойство заключается в том, что каждое движение асимптотически стремится к одной из конечного числа неподвижных точек и периодических траекторий. Следовательно, в частности, квазипериодические движения нетипичны.

Сформулируем эту теорему для двумерного тора, т. е. для случая, когда  $M = T^2$ . Пусть  $\theta$  и  $\varphi$  — угловые переменные на  $T^2$ , так что динамическая система примет вид

$$\dot{\theta} = F(\theta, \varphi), \quad \dot{\varphi} = G(\theta, \varphi),$$

где функции  $F$  и  $G$  периодичны по  $\theta$  и  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ . Пусть  $B$  — банахово пространство всех пар периодических функций  $F$  и  $G$  класса  $C^1$  с нормой

$$\max_{\theta} \max_{\varphi} \{ |F|, |G|, |\partial_{\theta} F|, |\partial_{\theta} G|, |\partial_{\varphi} F|, |\partial_{\varphi} G| \},$$

так что топология в  $B$  соответствует равномерной сходимости в  $C^1$ . Каждая точка пространства  $B$  представляет динамическую систему. Тогда в  $B$  найдется плотное открытое множество, представляющее динамические системы, для каждой из которых выполняются следующие условия.

- 1) Существует лишь конечное число неподвижных точек и замкнутых траекторий на  $T^2$ .
- 2) Каждое движение асимптотически стремится к одной из этих неподвижных точек или замкнутых траекторий. (Здесь преднамеренно исключены стационарные движения в неподвижных точках и периодические движения по замкнутым траекториям.)

В действительности теорема утверждает несколько больше того, что здесь сказано: см. Пейксото [1962] и разд. 31.Е ниже.

Это утверждение является резким контрастом по отношению к теореме Колмогорова — Арнольда — Мозера (см. книгу Мозера [1973, теорема 2.8]), со-

гласно которой для гамильтоновых систем при определенных предположениях квазипериодические движения устойчивы относительно почти всех малых возмущений. Здесь нет противоречия, так как гамильтоновы системы как целое являются весьма частным случаем (например, стационарные гамильтоновы системы консервативны) и в некотором смысле нетипичны среди динамических систем, так что для них малые возмущения, о которых идет речь, отнюдь не произвольны, а таковы, что система остается гамильтоновой.

### 31.Е. ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ ТИПИЧНЫХ И НЕТИПИЧНЫХ СВОЙСТВ

Рассмотрим пространство непрерывных функций  $C(0, 1)$ , определенных при  $0 \leq x \leq 1$ , с обычной нормой  $\|f\| = \sup |f(x)|$ . Для таких функций дифференцируемость — нетипичное свойство и нетипичны даже дифференцируемость в отдельной точке и непрерывность по Липшицу в отдельной точке (см. книгу Боаса [1960] и упражнение 1 ниже).

Следующие два примера являются частью более полного варианта теоремы Пейксото, чем приведенный выше. Как утверждалось, для векторного поля на компактном двумерном многообразии типично существование конечного числа неподвижных точек и периодических траекторий. В системе координат с началом отсчета в неподвижной точке векторное поле запишется как

$$F(x) = Ax + \dots,$$

где  $A$  — матрица размера  $2 \times 2$ . В теореме утверждается, что для каждой такой неподвижной точки типично быть *гиперболической*, т. е. что для матрицы  $A$  типично отсутствие чисто мнимых собственных значений; следовательно, есть три возможности: если оба собственных значения имеют отрицательные вещественные части, то неподвижная точка будет *притягивающей*; если оба они имеют положительные вещественные части, то она будет *отталкивающей*; если одно из них имеет положительную вещественную часть, а другое — отрицательную, то неподвижная точка будет *седловой*.

Другое утверждение теоремы Пейксото состоит в том, что существование траектории, идущей от одной седловой точки к другой, нетипично: если такая траектория существует для некоторого векторного поля, то малейшее возмущение может сделать ее проходящей мимо второй седловой точки.

В § 29.6 было сделано предположение, которое не доказано и даже полностью не сформулировано. Там говорилось, что в существующих теоремах о полноте систем собственных функций для гидродинамических задач предполагается, что обобщенные собственные функции (если они и существуют) исключены [см. уравнение (29.6.5)]. Это обосновывается тем, что в некотором подходящем пространстве гидродинамических систем существование обобщенных собственных функций нетипично. Говорят, что собственное значение  $\lambda$  имеет *индекс 1*, если не существует соответствующих ему обобщенных собственных функций. Представляется вероятным, что для любого собственного значения  $\lambda_k$  иметь индекс 1 сильно типично, тогда как для всех них иметь индекс 1 только типично, так как счетный набор плотных открытых множеств не обязательно будет открытым множеством, но в любом случае будет бэровским множеством.

#### УПРАЖНЕНИЕ

1. Для каждого целого положительного  $n$  определим подмножество  $E_n$  из  $C(0, 1)$  следующим образом: функция  $f$  принадлежит  $E_n$ , если найдется такое  $x_0$  из  $[0, 1 - 1/n]$ , что

$$|[f(x_0 + h) - f(x_0)]/h| \leq n \quad \text{при } 0 < h < 1/n. \quad (31.Е.1)$$

Покажите сначала, что  $E_n$  — замкнутое подмножество пространства  $C(0, 1)$ , проверив, что если  $f_k(x)$  равномерно сходятся к  $f(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  и каждая

функция  $f_k$  удовлетворяет условию (31.Е.1), то ему удовлетворяет и  $f$ . Покажите далее, что дополнение подмножества  $E_n$  плотно: покажите на самом деле, что любую функцию  $f$  из  $C(0, 1)$  можно сделать дифференцируемой при помощи малого возмущения (используйте для этого введенные в томе I операторы сглаживания); затем получившуюся функцию можно сделать нарушающей условие (31.Е.1), добавив к ней в случае необходимости дополнительное малое возмущение, имеющее достаточно большую производную в точке  $x=x_0$ . Следовательно, каждое  $E_n$ —нигде не плотное множество, и поэтому  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ —тощее множество, а отсюда следует, что для функции из  $C(0, 1)$  нетипично быть непрерывной по Липшицу справа от любой точки.

### 31.Ж. ОТСУТВИЕ СООТВЕТСТВИЯ МЕЖДУ ТИПИЧНОСТЬЮ И СУЩЕСТВОВАНИЕМ МЕРЫ ЛЕБЕГА

#### УПРАЖНЕНИЯ

1. Пусть  $X$ —единичный интервал на вещественной оси, рассматриваемый как метрическое пространство с расстоянием  $(x, y)=|x-y|$ , и пусть  $n$ —целое положительное число. Каждому рациональному числу  $p/q$ , где  $0 < p < q$ , поставим в соответствие интервал

$$p/q - 1/(nq2^q) < x < p/q + 1/(nq2^q)$$

и обозначим через  $S_n$  объединение всех таких интервалов. Покажите, что множество  $S_n$  открыто и плотно в  $X$  и имеет меру Лебега, не превосходящую  $4/n$ . Убедитесь далее, что бэровское множество в  $X$  может иметь лебегову меру нуль, а тощее множество—меру 1.

2. Пусть  $S$ —пересечение множеств  $S_n$ . Согласно упражнению 1,  $S$ —бэровское множество. Покажите, что оно несчетно рассмотрев числа  $x$  из  $[0, 1]$ , имеющие двоичное представление вида

$$x = 0.a_10a_200\dots0a_300\dots0a_l00\dots,$$

где каждое  $a_l$  равно 0 или 1. Покажите, что если число нулей  $v_l$  между  $a_l$  и  $a_{l+1}$  достаточно быстро возрастает с ростом  $l$ , то  $x$  будет принадлежать всем множествам  $S_n$ . Покажите, что множество всех таких  $x$  несчетно.

### 31.З. ВЕРОЯТНОСТЬ И ФИЗИКА

Предположим, что топологическое пространство  $X$  представляет собой пространство физических систем. Когда физик говорит, что проявление определенного свойства такой системы весьма маловероятно, он скорее всего имеет в виду следующее: если из  $X$  каким-либо образом выбрано большое число  $N$  систем, то очень немногие из них обладают рассматриваемым свойством и с ростом  $N$  относительная доля обладающих этим свойством систем стремится к нулю. Такое утверждение, если оно верно, неизбежно носит вероятностный характер. В этом описании недостает только объяснения того, как эти  $N$  систем выбираются из  $X$ . Так как  $X$  в общем случае бесконечномерно и, следовательно, в нем нельзя определить лебегову меру, не существует возможности выбирать  $N$  систем случайным образом на основании равномерного распределения в  $X$ , потому что такого распределения не существует.

Метод выбора должен определяться с учетом физических соображений и не может исходить лишь из концепции типичности.

Конечно, есть много способов определения вероятностных мер в бесконечномерных пространствах (примерами служат гауссовы меры в гильбертовом пространстве, описанные в § 13.11 тома I). Такая мера может быть исполь-

зована для выбора  $N$  систем из  $X$ . Представляющиеся здесь возможности, по-видимому, весьма разнообразны, и может оказаться необходимым использовать ряд физических соображений. Например, должно представляться разумным требование о том, чтобы вероятностная мера была положительной на открытых множествах в  $X$ , так как в противном случае сам выбор пространства  $X$  выглядел бы ошибочным и некоторые его части следовало бы исключить. Затем предположим, что в  $X$  существуют преобразования, приводящие к таким модификациям систем, при которых основные их свойства изменяются и в то же время свойства, представляющиеся маловероятными, остаются таковыми; тогда после такого преобразования в  $X$  множества меры нуль должны переходить в множества меры нуль. С точки зрения физической интерпретации, приведенной в разд. 31.Г, необходимо лишь, чтобы сильно нетипичное свойство имело место только на множестве меры нуль.

Все это пока что не более чем общие рассуждения, однако они могут указывать на то, что в физике типичность вряд ли заменит вероятность, но она, возможно, будет указывать правильный путь для надлежащего выбора вероятностных мер.

### УПРАЖНЕНИЯ

1. Покажите, что дифференцируемость нетипична также и для гильбертова пространства  $H=L^2(0, 1)$ . Схема доказательства состоит из следующих шагов. Сначала определите в  $H$  линейное многообразие

$$D = \{\psi \in L^2: \psi' \in L^2\}, \tag{31.3.1}$$

где производная понимается в смысле теории распределений (см. гл. 5 тома 1). Для любого  $\psi$  из  $H$  имеет место представление

$$\psi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} \xi_k e^{2\pi i k x}. \tag{31.3.2}$$

Тогда многообразие  $D$  можно охарактеризовать как

$$D = \{\psi \in L^2: \sum |k \xi_k|^2 < \infty\}. \tag{31.3.3}$$

Для каждого  $M=1, 2, \dots$  определите также меньшее многообразие

$$D_M = \{\psi \in L^2: \psi' \in L^2, \|\psi'\| \leq M\} = \{\psi \in L^2: 4\pi^2 \sum |k \xi_k|^2 \leq M^2\}. \tag{31.3.4}$$

Если бы удалось показать, что каждое  $D_M$  нигде не плотно, т. е. что дополнение  $CD_M$  плотно и открыто, то отсюда следовало бы, что  $D = \bigcup_{M=1}^{\infty} D_M$  —

тощее множество в  $H$ . Покажите сначала, что  $CD_M$  плотно, убедившись, что любое  $\psi \in L^2$ , не нарушающее условие  $\|\psi'\| \leq M$ , может быть сделано нарушающим его (путем добавления к  $\psi$  произвольно малой функции с большой производной). Затем покажите, что  $CD_M$  открыто. Для этого рассмотрите любое  $\psi$  из  $CD_M$ , т. е. такое  $\psi$ , для которого либо  $\|\psi'\| = \infty$ , либо  $\|\psi'\| = M + \delta$  при некотором  $\delta > 0$ . Нужно показать, что найдется окрестность этого  $\psi$ , которая содержится в  $CD_M$ . Выберите  $K$  так, чтобы

$$\left( \sum_{k=-K}^K 4\pi^2 |k \xi_k|^2 \right)^{1/2} > M + \delta/2,$$

и покажите, что если  $\chi$  — любая такая функция из  $L^2$ , для которой  $\|\chi\| < \delta/(4K)$ , то  $\|\psi' + \chi'\| > M + \delta/4$ , так что  $CD_M$  открыто.

2. Используя аналогичные проведенным выше рассуждения, но полагая везде  $\xi_{-k} = \bar{\xi}_k$ , покажите, что то же самое верно и для вещественного гильбертова пространства  $L^2(0, 1)$ .



Чтобы ввести вещественные координаты и вещественные базисные функции, положим

$$\xi_0 = x_0, \quad \xi_k = (x_k + ix_{-k})/\sqrt{2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (31.3.5)$$

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \quad \varphi_k(x) = \sqrt{2} \cos 2\pi kx, \quad (31.3.6)$$

$$\varphi_{-k}(x) = \sqrt{2} \sin 2\pi kx.$$

Тогда, подставляя в (31.3.2)  $\bar{\xi}_k$  вместо  $\xi_{-k}$ , найдем, что

$$\psi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_k \varphi_k(x), \quad (31.3.7)$$

$$\psi'(x) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} kx_{-k} \varphi_k(x). \quad (31.3.8)$$

Гауссовы меры в вещественном гильбертовом пространстве  $H$  были описаны в § 13.11 тома 1. Там отмечались следующие основные моменты. Если  $M$  — любое конечномерное подпространство из  $H$  и  $S$  — любое борелево множество из  $M$ , то множество

$$Z = S + M^\perp,$$

т. е. множество всех точек  $x + y$ , у которых  $x \in S$  и  $y \in M^\perp$ , называется *цилиндрическим множеством*. Чтобы определить так называемую гауссову меру в  $H$ , обозначим через  $B$  положительный ядерный оператор и положим  $A = B^{-1}$ . Затем взяв любое цилиндрическое множество  $Z = S + M^\perp$ ,  $\dim M = m$ , обозначим через  $\{\varphi_j\}_1^m$  некоторый ортонормированный базис в  $M$  и определим матрицу  $A(M)$  размера  $m \times m$ , положив  $A(M)_{jk} = (\varphi_j, A\varphi_k)$ ,  $1 \leq j, k \leq m$ . Тогда вероятность  $P(Z)$  полагается равной

$$P(Z) = [(\det A(M))^{1/2}/(2\pi)^{m/2}] \int_S \exp \left\{ -(1/2) \sum_{j,k} x_j A(M)_{jk} x_k \right\} dV. \quad (31.3.9)$$

Как было указано в § 13.11, эту функцию множества  $P(\cdot)$  можно единственным образом расширить до вероятностной меры, определенной на  $\sigma$ -алгебре  $\mathbf{A}$ , образованной цилиндрическими множествами.

Теперь применим эти соображения к вещественному гильбертову пространству  $H = L^2(0, 1)$ , используя координаты  $x_k$  и базисные функции  $\varphi_k$ , заданные в виде (31.3.5) и (31.3.6). Определим оператор  $A$  простой формулой

$$A\psi(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k x_k \varphi_k,$$

где функция  $\psi(x)$  задана в виде (31.3.7), а  $a_k$  положительны и  $\sum (1/a_k) < \infty$ , так что оператор  $B = A^{-1}$  компактен. Рассмотрим цилиндрические множества

$$Z_{M, \kappa} = \left\{ \psi \in L^2: 4\pi^2 \sum_{-K}^K |kx_k|^2 \leq M^2 \right\},$$

такие, что

$$Z_{M, 1} \supset Z_{M, 2} \supset \dots \supset Z_{M, K} \supset \dots \supset D_M, \quad (31.3.10)$$

где множество  $D_M$  определено в (31.3.4). Тогда (31.3.9) принимает вид

$$P(Z_{M, \kappa}) = \prod_{-K}^K \sqrt{a_k/(2\pi)} \int \dots \int \exp \left\{ -(1/2) \sum_{-K}^K a_k x_k^2 \right\} dx_{-K} \dots dx_K, \quad (31.3.11)$$

где  $S$  — эллипсоидальная область:

$$S: \sum_{-K}^K k^2 x_k^2 \leq M^2 / (4\pi^2). \quad (31.3.12)$$

### УПРАЖНЕНИЯ

3. Полагая, что в (31.3.11) все переменные интегрирования, кроме последнего, изменяются от  $-\infty$  до  $\infty$ , тогда как изменение последнего,  $x_K$ , ограничено условием  $|x_K| \leq M / (2\pi K)$ , покажите, что

$$P(Z_{M,K}) < M (a_K)^{1/2} / [(2\pi^3)^{1/2} K].$$

4. Теперь положим  $a_k = |k|^r$ , где  $r > 1$  (чтобы сделать ряд  $\sum (1/a_k)$  сходящимся). Покажите, что если  $1 < r < 2$ , то  $P(Z_{M,K}) \rightarrow 0$  при  $K \rightarrow \infty$ , так что, согласно (31.3.10),  $P(D_M) = 0$ , и поэтому благодаря счетной аддитивности

$$P(D) = P\left(\bigcup_{M=1}^{\infty} D_M\right) = 0.$$

Это упражнение показывает, что тощее множество  $D$  дифференцируемых функций в  $L^2(0, 1)$  имеет гауссову меру нуль, если  $1 < r < 2$ . При  $r > 2$   $P(D) = 1$ . Грубо говоря, с возрастанием  $r$  гауссова мера все больше и больше концентрируется в окрестности нуля в  $H$ . В силу (31.3.3) дифференцируемые функции лежат вблизи нуля, так что при большой концентрации вероятностной меры в окрестности нуля дифференцируемые функции приобретают положительную вероятность, но при  $r < 2$  они имеют нулевую вероятность.

Поэтому в данном случае вероятностная мера может быть выбрана так, чтобы нетипичное свойство (дифференцируемость) не было вероятным,