ИЗДАТЕЛЬСТВО
• МИР •

ROBERT D. RICHTMYER

# PRINCIPLES OF ADVANCED MATHEMATICAL PHYSICS

*Volume 1*

Springer-Verlag
New York Heidelberg Berlin
1978

Р. РИХТМАЙЕР

# ПРИНЦИПЫ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

*Перевод с английского*

В. Е. Кондрашова, В. Ф. Курякина, В. Г. Подвального

*под редакцией*

И. Д. Софронова

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1982

ББК 22.162
Р 56
УДК 517.43:519.53+519.2

**Рихтмайер Р.**

**Р 56** Принципы современной математической физики: Пер. с англ.— М.: Мир, 1982.
488 с., ил.

В книге известного американского ученого, знакомого советскому читателю по переводу его трудов, излагается математический аппарат современной теоретической физики (некоторые разделы функционального анализа, теория вероятностей, эволюционные задачи и т. д.) и показываются его применения к квантовой механике и гидродинамике. В отличие от многотомника М. Рида и Б. Саймона книга рассчитана на первоначальное изучение предмета.

Для физиков и математиков-прикладников.

Р $\frac{20203\text{-}012}{041(01)\text{-}82}$ 12-82, ч. 1 1702050000

ББК 22.162
517.2 530.1

*Редакция литературы по математическим наукам*

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Автор этой книги — видный американский ученый, один из ближайших сотрудников Дж. фон Неймана, посвятивший много лет разработке численных методов решения сложных физических задач и внесший существенный вклад в эту отрасль науки. Он известен советским специалистам как по его многочисленным работам на английском языке, так и по переводам двух изданий книги «Разностные методы решения краевых задач» (второе издание совместно с К. В. Мортоном), выпущенных издательством «Мир» в 1960 и 1972 гг., а также ряда статей. В течение многих лет он уделял большое внимание и педагогической деятельности, обучая будущих физиков основам современной математики. Одним из результатов этой многолетней педагогической работы является предлагаемая вниманию читателей книга — первый том задуманного автором двухтомного курса.

В данном томе излагаются (прежде всего для физиков) некоторые разделы функционального анализа, теория дифференциальных операторов, теория вероятностей, эволюционные задачи и т. д. (изложение многих вопросов в значительной степени основывается на теории распределений) и показывается их применение к таким разделам физики, как квантовая механика и гидродинамика. При этом основное внимание уделяется разъяснению сущности сравнительно новых для физики математических идей и понятий и демонстрации их полезности в физике. Простота и ясность изложения удачно сочетаются с высоким научным уровнем, широтой охвата материала и большой продуманностью курса в целом. Многочисленные упражнения различной степени трудности удачно дополняют основной текст.

В своем предисловии автор подробно останавливается на мотивах, определивших стиль и содержание книги, и поэтому здесь нет необходимости затрагивать эти вопросы. В целом же книга отражает постепенную переоценку ведущими специалистами того математического аппарата, которым в настоящее время должны владеть выпускники физических факультетов. Необходимость такой переоценки диктуется уровнем современных теоретических и прикладных исследований, результаты которых подчас просто нельзя понять без знания основных положений современной математики. Включение этих положений в курсы математической физики приводит к сокращению или даже полному отказу от традиционных разделов математики в этих курсах. Помимо необходимости по существу, такая перестройка оправдывается еще и тем, что самостоятельно усвоить традиционные разделы гораздо проще, чем новые. Книга Рихтмайера представляет собой яркий и оригинальный пример обновления и развития методов преподавания математической физики и явится ценным руководством по данному предмету.

*И. Д. Софронов*

# ПРЕДИСЛОВИЕ

## О ПРИРОДЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Математические построения и рассуждения весьма отличны от физических. Математика зиждется на близкодействующих силах, которые связывают каждый шаг дедукции непосредственно с предшествующими шагами, тогда как в физике властвуют более дальнодействующие силы интуиции и аналогии, опирающиеся на разного рода вспомогательные данные. Сравнение физической науки с анализом криптограмм («разгадка тайн природы» и т. п.) несколько преувеличено, но в общем справедливо. Когда найден шифр и выяснился смысл загадочного манускрипта, не обращаются к математику за доказательством единственности, даже если мыслимо существование другого решения, т. е. другого варианта прочтения. В физике доказательства существования и единственности на многие десятилетия отстают от проводимых исследований (из-за сложности изучаемых явлений). К тому же зачастую представляется, что эти доказательства не так уж нужны, ибо они не более убедительны, чем гипотезы, на которых они основаны и которые в свою очередь являются предметом физики; в то же время обилие косвенных данных часто оказывается вполне убедительным. Напротив, в математике интуиция и аналогия не совсем правомерны: хотя они довольно часто и приводят к полезным догадкам, эти догадки никогда не становятся частью теории, пока не будут доказаны. При доказательстве теоремы в математике не разрешается использовать никаких условий, кроме тех, которые входят в ее формулировку.

Первым следствием такого различия должно быть наше отношение к некоторым исследованиям в так называемой прикладной математике (а возможно, к большинству таких исследований), по крайней мере в тех разделах математики, которые применимы в физике. Мы имеем в виду, что эти исследования нужно рассматривать как чисто математические и оценивать их как таковые. Например, некоторые из моих коллег-математиков работали в последние годы над приближенным методом Хартри—Фока для определения структур многоэлектронных атомов и ионов. Этот метод появился почти пятьдесят лет назад, и физики делали все возможное для его обоснования, используя вариационные принципы, интуицию и другие средства в рамках физического подхода. В настоящее время данный метод занял прочное место в физике.

Те теоремы, которые здесь можно доказать (большей частью относящиеся к двух- и трехэлектронным системам и поэтому не представляющие особого интереса для физики), следует рассматривать как чисто математические теоремы. Если они отвечают уровню математических требований (а я полагаю, что это так), то они в достаточной мере обосновывают метод. Если же они не выдерживают критики с математической точки зрения, то следует признать, что в этом направлении нужная для физики работа не выполнена. В этом смысле прикладная математика не играет роли в современной физике. При существующем разделении труда задача математика заключается в том, чтобы создавать различные математические теории без особых размышлений о том, где эти теории будут применяться, —это покажут будущие физические исследования.

Специализация, конечно, зашла чересчур далеко, но даже и при меньшей ее степени не могло бы быть и речи о том, чтобы непосредственное перенесение методов современной математики в современную физику сразу позволило бы получить существенные результаты—слишком велико различие между этими областями науки. Современные физики знают, как использовать математику,—они умеют формулировать задачи, отыскивать методы решения, проводить пространные выкладки и вычисления, но не могут создавать математические теории. Опыт показывает, что формулировка и кристаллизация абстрактных понятий и принципов в большей степени принадлежат сфере математики. Такое разделение труда весьма важно и должно восприниматься всерьез.

Разумеется, нет возражений против работы математика в тех областях, которые можно отнести к прикладной математике. Очень хорошо, если он как математик вдохновляется миром физических явлений, но ценность таких результатов для физики определяется их чисто математическим качеством.

Нет также возражений против работы математика в физике, если он, конечно, обладает нужной квалификацией. Замечательный пример этого дал нам фон Нейман. Когда он работал над физическими вопросами, он говорил, думал и вычислял подобно физикам (только быстрее). Он разбирался во всех разделах физики (включая тогдашний уровень теории элементарных частиц), знал химию и астрономию, а кроме того, обладал талантом порождать те и только те математические идеи, которые были необходимы для изучаемых им физических явлений. Нужно всячески поощрять любого, кто независимо от своей профессиональной принадлежности может сделать хотя бы немного для физики, но следует помнить, что цели и методы последней сильно отличаются от целей и методов прикладной математики, основное назначение которой состоит в создании математических теорий.

Здесь, по-видимому, уместно привести несколько цитат из книги Харди «Апология математика»[1]:

1. Я утверждал, что математик — творец идей, а красота и глубина — вот критерий, при помощи которого эти идеи оцениваются (с. 98).

2. Жизнь любого истинно профессионального математика нельзя оценивать только на основании «полезности» его работы (с. 119).

3. Возникает довольно любопытный вывод: чистая математика в целом ощутимо полезнее прикладной (с. 134).

4. Надеюсь, нет нужды говорить о том, что я не пытался принизить значение математической физики, этого великолепного предмета с громадными задачами, где можно дать полную волю самому изощренному воображению (с. 135).

Второе следствие отличия математических построений от физических касается слова «строгость», которое неправильно трактуют как математики, так и физики и которое, наверное, нужно изгнать из нашего лексикона. Физики уверены, что математики тратят уйму времени на то, чтобы расставить все точки над i, а математики, покачивая головами, поражаются, как эти небрежные физики все-таки получают правильные результаты. И то, и другое отношение возникает из-за недостаточного понимания методологических различий между этими двумя дисциплинами. Ситуация немного проясняется, когда начинаешь обучать физиков математике, поскольку оказывается, что физики, не боясь привычных и успешных путей исследования физического мира, от математики, тем не менее, требуют строгости. Физики хотят точно знать, что верно, а что неверно и почему именно (хотя стремятся обсуждать дополнительные факты без доказательств); они желают иметь множество примеров и контрпримеров, чтобы очертить область применения предлагаемых им теорем.

В одной из областей физики, а именно в квантовой теории поля, методологическое различие, о котором мы говорили, почти исчезло из-за несостоятельности традиционных методов. В 1900 г. Макс Планк предложил: «Давайте проквантуем электромагнитное поле», и показал, что в таком случае получаются замечательные вещи; еще большее показал Эйнштейн. До некоторой степени вся современная физика базируется на этом предложении, но задача оказалась гораздо труднее, чем первоначально представлялось. В течение первой половины нашего века во многих попытках, основанных на использовании интуитивных методов, столь плодотворных в других областях квантовой механики, успешно вычислялись интенсивность испускания и поглощения,

[1] Hardy G. H. A mathematician's apology.

а также ширина спектральных линий. Однако это оказалось возможным лишь благодаря произвольному устранению бесконечностей и несоответствий и большей частью относилось к случаям, в которых искомые результаты уже были известны из экспериментов или из более грубых теорий. В пятидесятые годы группа физиков более серьезно занялась устранением бесконечностей, использовав совершенно новые аксиомы («техника перенормировок»), и хлынул целый поток новых захватывающих результатов (сдвиг Лэмба, точные магнитные моменты и т. д.). Однако мы еще не имеем вполне обоснованной теории, и каждая новая попытка преодолеть возникающие трудности сопровождается введением все более точных и более мощных математических средств. Теперь создается впечатление, что в квантовой теории поля интуитивные методы так же ненадежны, как и в чистой математике, и современной теории поля присущи многие черты чистой математики: здесь так и чувствуется — определение, лемма, доказательство, теорема, доказательство и т. д., даже если эти слова и не упоминаются. По-видимому, окончательный успех в этой области будет достигнут в результате взаимодействия физической интуиции и вновь обретенной математической строгости.

В результате в математической физике все возрастает потребность глубокого изучения операторов, распределений, банаховых алгебр, функций нескольких комплексных переменных, представлений некомпактных групп и т. д.

Неспециалисты обычно плохо представляют себе, насколько широко используется в физике математика. Им кажется, что физики интересуются лишь математическим анализом и в особенности той его частью, которая соответствует физике девятнадцатого века и изложена в книге Куранта и Гильберта. Большинство книг (включая и вышедшие сравнительно недавно), посвященных «математическим методам для физиков» и т. п., не содержит теорию групп, которая играет существенную роль в физике с середины двадцатых годов, и их авторы даже не упоминают, что когда-либо слышали о математических принципах и концептуальной основе современной квантовой механики, теории относительности, космологии, теории рассеяния, квантовой теории поля, статистической механики, теории топологических динамических систем и т. д. Не говорится там ничего и о тех концепциях и принципах, которые еще не вошли в обиход физики, но, вероятно, войдут в ближайшем будущем и, по всей видимости, будут заимствованы из таких областей, как алгебра, логика, теория множеств и топология. Нет, пожалуй, такого раздела математики, который не представлял бы потенциального интереса для физики.

Для наших целей математические концепции и принципы более важны, чем методы, поскольку основным назначением курсов по математической физике, по моему мнению, является такое объяснение этих концепций и принципов, чтобы была видна их приемлемость для физики. Приведем конкретный пример.

*Многообразия в релятивистской теории поля*. В 1916 г. Карл Шварцшильд получил статическое сферическое решение уравнений Эйнштейна для поля в виде, который носит теперь его имя. Сначала казалось, что эта формула дает некоторую особенность при радиусе, получившем название «радиуса Шварцшильда». Прошло сорок четыре года замешательства по поводу этой «особенности Шварцшильда», и стало постепенно выясняться, что формула Шварцшильда описывает только часть соответствующей физической пространственно-временной области. В 1960 г. Мартин Крускал дал описание геодезически полного многообразия, часть которого определяет формула Шварцшильда, и было установлено, что хотя некоторые интересные явления связаны с радиусом Шварцшильда, никакой особенности там нет. Те, кто занимается релятивистской теорией поля, знают теперь, что под решением уравнений Эйнштейна следует понимать не формулу для элемента дуги $ds^2 = \ldots$, а полное многообразие и что глобальная топология этого многообразия может иметь космологическую значимость. Введение в релятивистскую теорию поля геометрического понятия *многообразия* дает превосходный пример математической физики. Теория многообразий будет изложена во втором томе.

Другой, более ранний пример — введение в квантовую механику теории абстрактных гильбертовых пространств, что было сделано главным образом фон Нейманом и дало возможность построить серьезную теорию на основе мощных интуитивных идей Дирака и других физиков. Не менее важным событием было применение групп и представлений групп (это заслуга в основном Вигнера и Вейля).

Наконец, свежий пример—Рюэль и Такенс использовали топологическую теорию дифференцируемых динамических систем в исследовании возникновения турбулентности. Эти идеи, вероятно, должны играть определенную роль и в других разделах физики, где появляются нелинейные дифференциальные уравнения.

Основные математические вопросы физики входят в курсы физики. Надлежащая формулировка граничных задач, асимптотические разложения, следствия симметрии и т. п. — все это дело физики. Хотя эти представления шлифуются и анализируются в курсах математической физики, первоначально они должны появляться как часть физики. Преподаватель физики никогда не должен говорить студентам, что они научатся применять эти представления, когда прослушают математические курсы. Физику и математику так разделять нельзя, и курсы математической физики не снимают с преподавателей физики ответственности за объяснение своего предмета. Однако практически даже в лучших курсах физики не удается изложить на высоком уровне все затронутые там вопросы. Например, в большинстве книг по квантовой механике много неясностей, связанных с гильбертовыми пространствами и операторами, и студентам нужно изучать эти понятия лишь после изучения квантовой механики на интуитивном уровне. И это не только вопрос «строгости». Имеет ли данный симметрический оператор самосопряженные расширения, а если имеет, то сколько,—это вопрос физики, ибо самосопряженные операторы соответствуют наблюдаемым. Вероятностная интерпретация спектрального семейства самосопряженных операторов дает физическую интерпретацию наблюдаемой даже для состояний, не принадлежащих области определения оператора, и т. д. На мой взгляд, математическая физика должна содержать объяснение подобных вопросов.

Многие хорошие идеи оказываются простыми, и я полагаю, что их так и надо представлять—без излишних отступлений. По моему мнению, теорию распределений, например, следует основывать (вполне строго, конечно) на понятии интеграла Римана и современном анализе, а теория пространств $L^2$ и теория дифференциальных операторов должны базироваться на теории распределений. О теории меры и топологических векторных пространствах студенты смогут узнать позднее. В своей книге я стремился представить фундаментальные идеи на максимально возможном «заземленном» уровне. Но в то же время я решился изложить и некоторые идеи и представления, имеющие самостоятельный интерес, например понятие кардинального числа в главе о гильбертовом пространстве.

*Роберт Д. Рихтмайер*

*Боулдер*
*Декабрь 1978г.*