ГЛАВА ПЕРВАЯ

Векторы и аффинные операции над ними

§ 1. Геометрия и числа

1.1.1. Пространство Евклида. Наше обычное пространство, представление о котором является непосредственной абстракцией нашего повседневного пространственного опыта, называют *пространством Евклида*, по имени автора первого дошедшего до нас систематического изложения геометрии нашего пространства. «Начала» Евклида посвящены изложению как геометрии, так и арифметики. Однако, в отличие от пифагорейцев, которые соединяли геометрию с арифметикой (остатки их терминологии сохранились в выражениях «квадрат» и «куб» для чисел вида n^2 и n^3), у Евклида арифметика и геометрия излагаются в разных книгах: геометрия — в I—VI и X—XIII книгах, а арифметика — в VII—IX книгах. Под числами Евклид понимает только натуральные числа и излагает совершенно независимо друг от друга теорию отношений геометрических величин в V книге и теорию числовых отношений в VII книге [1*].

1.1.2. Вещественные числа. Решение практических задач и, прежде всего, задач астрономии требовало, однако, приближенных выражений отношений несоизмеримых величин и, в частности, приближенных выражений квадратных и кубических корней, а затем и решений более сложных алгебраических уравнений при помощи отношений целых чисел. Эти задачи привели к идее расширения понятия числа до того, что мы в настоящее время называем *вещественным (действительным) числом*. Эта

* Цифры относятся к примечаниям в конце книги.

идея получила широкое распространение только в XVII веке, после того как Декарт ввел в математику переменные величины и стал оперировать с геометрическими величинами как с числами. Понятие вещественного числа лежало в основе дифференциального и интегрального исчислений, творцы которого рассматривали вещественные числа как отношения отрезков. Строгая теория вещественных чисел была построена только в в XIX веке [2].

В настоящее время применение вещественных чисел к геометрии основано на взаимно однозначном соответствии между вещественными числами и точками прямой линии. Для установления этого соответствия следует задать на прямой начальную точку O и положительную ориентацию: тогда каждой точке M прямой ставится в соответствие вещественное число, обозначаемое $\overline{OM}$; тем же символом обозначается ориентированный отрезок с началом в точке O и концом в точке M. Абсолютная величина числа $\overline{OM}$, обозначаемая OM, называется *расстоянием* между точками O и M или *длиной* отрезка $\overline{OM}$, знак числа $\overline{OM}$ положителен в случае, когда ориентация отрезка $\overline{OM}$ совпадает с положительной ориентацией прямой и отрицателен, когда эти ориентации противоположны; число $\overline{OM}$ называется *относительной длиной* отрезка $\overline{OM}$. Всякому ориентированному отрезку с началом в точке A и концом в точке B также ставится в соответствие число, называемое *относительной длиной* этого ориентированного отрезка; ориентированный отрезок и его относительная длина обозначаются символом $\overline{AB}$; число $\overline{AB}$ связано с числами $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ соотношением

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}.$$

Абсолютная величина числа $\overline{AB}$, обозначаемая AB, называется *расстоянием* между точками A и B или *длиной* отрезка $\overline{AB}$, знак числа $\overline{AB}$ также положителен, когда ориентация отрезка $\overline{AB}$ совпадает с положительной ориентацией прямой, и отрицателен, когда эти ориентации противоположны.

Ориентированные отрезки, имеющие равные длины и совпадающие ориентации, т. е. имеющие равные относительные длины, называются *эквивалентными* ориентированными отрезками.

Помимо геометрической интерпретации вещественных чисел при помощи точек прямой, требующей выделения некоторой точки прямой в качестве начальной точки, вещественные числа можно геометрически интерпретировать и без такого выделения начальной точки, ставя во взаимно однозначное соответствие каждому вещественному числу класс эквивалентных ориентированных отрезков, относительные длины которых равны этому числу. При этом соответствии сумме двух чисел, соответствующих классам эквивалентных ориентированных отрезков, содержащим отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, соответствует класс эквивалентных ориентированных отрезков, содержащий отрезок $\overline{AC}$. Двум противоположным числам соответствуют два класса эквивалентных ориентированных отрезков, содержащих отрезки с равными длинами и противоположными ориентациями, как отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$. Нулю соответствует класс эквивалентных ориентированных отрезков, состоящий из отрезков, концы которых совпадают с началами, — примером такого отрезка является отрезок $\overline{AA}$.

1.1.3. Векторы. Ориентированные отрезки можно рассматривать не только на прямой, но и в пространстве. Будем называть *эквивалентными* ориентированными отрезками в пространстве, так же как в случае прямой, ориентированные отрезки, имеющие равные длины и совпадающие ориентации; очевидно, что всякие два эквивалентных ориентированных отрезка расположены на одной прямой или на двух параллельных прямых.

Если вещественные числа можно геометрически интерпретировать, ставя каждому числу в соответствие класс эквивалентных ориентированных отрезков на прямой, то и классы эквивалентных ориентированных отрезков в пространстве также можно рассматривать как геометрическую интерпретацию некоторых новых величин, являющихся обобщением вещественных чисел. Если

вещественные числа характеризуются неотрицательным числом — абсолютной величиной и знаком, указывающим ориентацию на прямой, то эти новые величины характеризуются неотрицательным вещественным числом — длиной отрезков и ориентацией в пространстве. Эти новые величины называются *векторами*.

Ориентированный отрезок в пространстве с началом в точке A и концом в точке B, так же как в случае прямой, обозначается $\overline{AB}$; подобно тому, как на прямой тем же символом мы обозначали определяемое этим отрезком вещественное число — относительную длину этого отрезка, здесь тем же символом мы будем обозначать вектор, соответствующий классу эквивалентных ориентированных отрезков, содержащему отрезок $\overline{AB}$. Длина ориентированных отрезков этого класса называется *модулем* этого вектора и обозначается AB или $|\overline{AB}|$. Векторы обозначаются также малыми латинскими буквами жирного шрифта $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, ...; модуль[3] вектора $\mathbf{a}$ обозначается $|\mathbf{a}|$ или a.

Аналогами сложения и умножения вещественных чисел являются сложение векторов и умножение вектора на вещественное число. *Суммой* векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ называется вектор $\overline{AC}$; сумма векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обозначается $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ называются *противоположными*, вектор, противоположный вектору $\mathbf{a}$, обозначается $-\mathbf{a}$. Вектор $\overline{AA}$ называется *нулевым* вектором и обозначается $\mathbf{o}$.

Произведением вектора $\mathbf{a}$ *на вещественное число* k называется вектор $\mathbf{b}=k\mathbf{a}$, длина которого равна $|k|\,|\mathbf{a}|$, а ориентация совпадает с ориентацией вектора $\mathbf{a}$, если $k>0$, и противоположна ориентации вектора $\mathbf{a}$, если $k<0$.

1.1.4. Обобщение понятия пространства. Важнейшим событием в геометрии после открытия Декарта было открытие неевклидовой геометрии Лобачевского в начале XIX века[4]. Это открытие показало, что геометрия Евклида не является единственной непротиворечивой геометрической системой, как считали до того времени, а, напротив, возможны различные непротиворечивые геометрические системы.

Открытие неевклидовой геометрии поставило по-новому вопрос о независимости аксиом геометрии и привело в конце XIX века к созданию совершенно строгих систем аксиом геометрии Евклида. В случае, если одна из аксиом такой системы не зависит от остальных аксиом, замена такой аксиомы на другую приводит к новой непротиворечивой геометрической системе.

Из таких непротиворечивых геометрических систем отметим прежде всего многомерную евклидову геометрию, т. е. геометрию, система аксиом которой отличается от системы аксиом геометрии Евклида заменой аксиомы, в силу которой пространство обладает тремя измерениями, на аксиому, в силу которой пространство обладает n измерениями, где n — произвольное натуральное число. Изучение n-мерного евклидова пространства весьма полезно как для уяснения многих закономерностей геометрии обычного пространства, являющегося частным случаем n-мерного пространства при $n = 3$, так и для более наглядного представления многих закономерностей алгебры и анализа, связанных уравнениями с n неизвестными и с функциями n переменных [5]. Большая часть этой книги есть изложение геометрии евклидова пространства произвольного числа измерений.

Значение открытия неевклидовой геометрии вышло далеко за пределы геометрии: вслед за геометрией аксиоматический метод стал успешно применяться и в других разделах математики, приведя к появлению целого ряда математических систем, определяющихся при помощи аксиом. В частности, то определение n-мерного евклидова пространства, которое будет положено в основу нашего изложения, опирается на аксиоматическое определение алгебраической системы векторов.

§ 2. Векторы

1.2.1. Линейное пространство. Понятие вектора, которое в **1.1.3** мы определили геометрически наглядным образом, пригодным только для векторов обычного пространства, может быть определено аксиоматическим способом, применимым для векторов пространства любого числа измерений.