Открытие неевклидовой геометрии поставило по-новому вопрос о независимости аксиом геометрии и привело в конце XIX века к созданию совершенно строгих систем аксиом геометрии Евклида. В случае, если одна из аксиом такой системы не зависит от остальных аксиом, замена такой аксиомы на другую приводит к новой непротиворечивой геометрической системе.

Из таких непротиворечивых геометрических систем отметим прежде всего многомерную евклидову геометрию, т. е. геометрию, система аксиом которой отличается от системы аксиом геометрии Евклида заменой аксиомы, в силу которой пространство обладает тремя измерениями, на аксиому, в силу которой пространство обладает $n$ измерениями, где $n$ — произвольное натуральное число. Изучение $n$-мерного евклидова пространства весьма полезно как для уяснения многих закономерностей геометрии обычного пространства, являющегося частным случаем $n$-мерного пространства при $n = 3$, так и для более наглядного представления многих закономерностей алгебры и анализа, связанных уравнениями с $n$ неизвестными и с функциями $n$ переменных [5]. Большая часть этой книги есть изложение геометрии евклидова пространства произвольного числа измерений.

Значение открытия неевклидовой геометрии вышло далеко за пределы геометрии: вслед за геометрией аксиоматический метод стал успешно применяться и в других разделах математики, приведя к появлению целого ряда математических систем, определяющихся при помощи аксиом. В частности, то определение $n$-мерного евклидова пространства, которое будет положено в основу нашего изложения, опирается на аксиоматическое определение алгебраической системы векторов.

## § 2. Векторы

**1.2.1. Линейное пространство.** Понятие вектора, которое в **1.1.3** мы определили геометрически наглядным образом, пригодным только для векторов обычного пространства, может быть определено аксиоматическим способом, применимым для векторов пространства любого числа измерений.

Будем называть *линейным пространством* множество элементов произвольной природы, называемых *векторами*, в котором определены две операции — *сложение* и *умножение на вещественное число*, удовлетворяющие трем группам аксиом — аксиомам сложения, аксиомам умножения на число и аксиоме размерности. Будем обозначать векторы, как в **1.1.3**, малыми латинскими буквами жирного шрифта.

**1.2.2. Аксиомы сложения.** I,1°. Каждым двум векторам **a** и **b** поставлен в соответствие определенный вектор, обозначаемый

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \tag{1.1}$$

и называемый *суммой* векторов **a** и **b**.

I,2°. Сложение векторов *коммутативно*, т. е.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \tag{1.2}$$

I,3°. Сложение векторов *ассоциативно*, т. е.

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \tag{1.3}$$

I,4°. Существует *нулевой* вектор **o**, такой, что для всякого вектора **a**

$$\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a}. \tag{1.4}$$

I,5°. Для всякого вектора **a** имеется *противоположный* вектор $-\mathbf{a}$, для которого

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{o}. \tag{1.5}$$

Из аксиомы I,4° следует, что *вектор* **o** *единственный*, так как если бы имелся другой такой вектор $\mathbf{o}'$, то для всякого вектора **a**

$$\mathbf{a} + \mathbf{o}' = \mathbf{a},$$

но, с одной стороны, $\mathbf{o} + \mathbf{o}' = \mathbf{o}$, а, с другой стороны, $\mathbf{o}' + \mathbf{o} = \mathbf{o}'$, откуда вытекает, что $\mathbf{o} = \mathbf{o}'$.

Из аксиомы I,5° следует, что *для всякого вектора* **a** *вектор* $-\mathbf{a}$, *удовлетворяющий условию* (1.5), *единствен-*

*ный*, так как если бы имелся другой такой вектор $-\mathbf{a}'$, для которого $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}') = \mathbf{o}$, то, прибавляя к обеим частям этого равенства вектор $-\mathbf{a}$, мы получим, что $(-\mathbf{a}) + \mathbf{a} + (-\mathbf{a}') = -\mathbf{a}$, но в силу (1.4) $(-\mathbf{a}) + \mathbf{a} + (-\mathbf{a}') = -\mathbf{a}'$, откуда вытекает, что $-\mathbf{a} = -\mathbf{a}'$.

Аксиомы I,1°—I,5° показывают, что векторы образуют по сложению *коммутативную группу* [6].

Сумма $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ называется *разностью* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и обозначается $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

**1.2.3. Аксиомы умножения на число.** II,1°. Каждому вектору $\mathbf{a}$ и каждому вещественному числу («скаляру» [7]) $k$ поставлен в соответствие определенный вектор, обозначаемый

$$\mathbf{b} = k\mathbf{a} \tag{1.6}$$

и называемый *произведением вектора* $\mathbf{a}$ *на число* $k$.

II,2°. Умножение вектора на число 1 не изменяет вектора, т. е.

$$1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}. \tag{1.7}$$

II,3°. Умножение вектора на число *дистрибутивно относительно сложения чисел*, т. е.

$$(k + l)\,\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}. \tag{1.8}$$

II,4°. Умножение вектора на число *дистрибутивно относительно сложения векторов*, т. е.

$$k\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}. \tag{1.9}$$

II,5°. Умножение вектора на число *ассоциативно*, т. е.

$$k\,(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}. \tag{1.10}$$

Из аксиомы II,3° следует, что произведение любого вектора на число 0 является вектором $\mathbf{o}$, так как

$$k\mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{a} = (k + 0)\,\mathbf{a} = k\mathbf{a}.$$

Из аксиомы II,4° следует, что произведение вектора $\mathbf{o}$ на любое число также является вектором $\mathbf{o}$, так как

$$k\mathbf{a} + k\mathbf{o} = k\,(\mathbf{a} + \mathbf{o}) = k\mathbf{a}.$$

**1.2.4. Линейная зависимость и независимость векторов.** При помощи определенных нами операций сложения и умножения на число можно определить *линейные комбинации векторов*, т. е. суммы произведений векторов на числа. Векторы **a**, **b**, . . . , **c** называются *линейно зависимыми*, если существует их линейная комбинация

$$\mathbf{r} = k\mathbf{a} + l\mathbf{b} + \ldots + m\mathbf{c}, \tag{1.11}$$

равная **o**, причем не все числовые коэффициенты $k, l, \ldots$ . . . , $m$ равны 0. В этом случае каждый вектор с ненулевым коэффициентом может быть представлен в виде линейной комбинации остальных векторов, например, если $k \neq 0$,

$$\mathbf{a} = -\frac{l}{k}\mathbf{b} - \ldots - \frac{m}{k}\mathbf{c}.$$

Если линейная комбинация (1.11) равна **o** только в том случае, когда все коэффициенты $k, l, \ldots, m$ равны 0, то векторы **a**, **b**, ..., **c** называются *линейно независимыми*.

Понятие линейной независимости имеет смысл и для одного вектора: очевидно, что вектор $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ следует считать линейно независимым, так как $k\mathbf{a} = \mathbf{o}$ только при $k = 0$; напротив, вектор **o** линейно зависим, так как $k\mathbf{o} = \mathbf{o}$ при любых $k \neq 0$. Очевидно также, что любая совокупность векторов, содержащая вектор **o**, линейно зависима, так как, умножая вектор **o** на $k \neq 0$, а остальные векторы на 0, мы получим линейную комбинацию, равную **o**.

Если два вектора линейно зависимы, один из них может быть представлен в виде линейной комбинации, образованной при помощи другого вектора, т. е. в виде произведения этого вектора на число. Такие векторы называют *коллинеарными* [8].

**1.2.5. Аксиома размерности.** Понятие линейной зависимости и независимости векторов позволяет сформулировать третью группу аксиом.

III,1°. Существуют $n$ линейно независимых векторов.

III,2°. Всякая совокупность $n + 1$ векторов линейно зависима.

Система векторов, удовлетворяющая этим аксиомам, называется *n-мерным линейным пространством* или, короче, *линейным n-пространством*, а число $n$ называется *размерностью* этого пространства [9].

**1.2.6. Модели линейного пространства.** Если абстрактная математическая система определена при помощи некоторой системы аксиом, то система объектов, удовлетворяющих этим аксиомам, называется *моделью* абстрактной системы.

Аксиомам линейного $n$-пространства при $n = 3$ удовлетворяют векторы, определенные нами в **1.1.3**. Поэтому линейное 3-пространство обладает моделью, в которой векторы изображаются классами эквивалентных ориентированных отрезков обычного пространства. При этом суммой двух классов, содержащих отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, является класс, содержащий отрезок $\overline{AC}$, а произведением класса, содержащего отрезок $\overline{AB}$, на число $k$, является класс, содержащий отрезок $\overline{AC}$, причем точка $C$ находится на прямой отрезка $AB$ по ту же сторону от точки $A$, что и $B$, если $k > 0$, и по противоположную сторону, если $k < 0$, а $AC = |k| \cdot AB$.

Другую геометрическую модель линейного 3-пространства образуют ориентированные отрезки обычного пространства с общим началом. При этом суммой отрезков $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ является отрезок $\overline{OC}$, являющийся диагональю параллелограмма, построенного на отрезках $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, а произведением отрезка $\overline{OA}$ на число $k$ является отрезок $\overline{OB}$, направленный по прямой отрезка $\overline{OA}$ в ту же сторону, что $\overline{OA}$, если $k > 0$, и в противоположную, если $k < 0$, и имеющий длину $OB = |k| \cdot OA$.

Аксиомам линейного $n$-пространства удовлетворяют системы $n$ вещественных чисел, если определить сложение систем чисел и их умножение на число по формулам

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\ = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n),$$

$$k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n).$$

За $n$ линейно независимых систем чисел можно принять системы

$$(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1).$$

Аксиомам линейного $n$-пространства удовлетворяют также *многочлены* $f(t)$ степени $\leqslant n-1$, заданные на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, если определить сложение многочленов и умножение многочлена на число обычным способом [10]. За $n$ линейно независимых многочленов можно принять $n$ многочленов $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$.

**1.2.7. Координаты векторов.** Если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ — $n$ линейно независимых векторов линейного $n$-пространства, то всякий вектор этого пространства можно представить и притом единственным образом в виде линейной комбинации

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n. \tag{1.12}$$

В самом деле, между $n+1$ векторами $\mathbf{x}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ в силу аксиомы III,2° имеется линейная зависимость

$$k_0\mathbf{x} + k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + \ldots + k_n\mathbf{e}_n = \mathbf{o}.$$

Коэффициент $k_0 \neq 0$, так как в противном случае векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ были бы линейно зависимы. Поэтому $\mathbf{x} = -\frac{k_1}{k_0}\mathbf{e}_1 - \ldots - \frac{k_n}{k_0}\mathbf{e}_n$, т. е. если обозначить $-\frac{k_i}{k_0} = x^i$, мы получим зависимость (1.12).

Если наряду с разложением (1.12) имеет место другое разложение

$$\mathbf{x} = x^{1\prime}\mathbf{e}_1 + x^{2\prime}\mathbf{e}_2 + \ldots + x^{n\prime}\mathbf{e}_n,$$

то, вычитая, получим

$$\mathbf{o} = (x^1 - x^{1\prime})\mathbf{e}_1 + \ldots + (x^n - x^{n\prime})\mathbf{e}_n.$$

Так как векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ линейно независимы, то это возможно лишь в случае, когда все разности $x^i - x^{i\prime} = 0$, т. е. если

$$x^1 = x^{1\prime}, \; x^2 = x^{2\prime}, \; \ldots, \; x^n = x^{n\prime}.$$

Поэтому предположение о другом разложении приводит к противоречию.

Числа $x^1$, $x^2$, . . . , $x^n$ называются *координатами* вектора $\mathbf{x}$ по отношению к векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, . . ., $\mathbf{e}_n$, называемым *базисными векторами*, совокупность базисных векторов называется *базисом* линейного $n$-пространства [11].

Складывая вектор (1.12) с вектором

$$\mathbf{y} = y^1\mathbf{e}_1 + y^2\mathbf{e}_2 + \ldots + y^n\mathbf{e}_n,$$

мы получим вектор

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x^1 + y^1)\mathbf{e}_1 + (x^2 + y^2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (x^n + y^n)\mathbf{e}_n,$$

а умножая вектор (1.12) на число $k$, мы получим вектор

$$k\mathbf{x} = (kx^1)\mathbf{e}_1 + (kx^2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (kx^n)\mathbf{e}_n.$$

Таким образом, при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Отсюда вытекает, что линейная зависимость векторов равносильна одной и той же линейной зависимости их соответственных координат.

Нетрудно проверить, что системы чисел, образующие арифметическую модель линейного $n$-пространства, состоят из координат этих систем чисел по отношению к базису, состоящему из систем (1, 0, . . ., 0), . . . . . , (0, . . . , 0,1), а коэффициенты многочленов степени $\leqslant n - 1$ являются координатами этих многочленов по отношению к базису, состоящему из многочленов 1, $t$, $t^2$, . . . , $t^{n-1}$.

**1.2.8. Сокращенное обозначение суммирования.** Условимся, что в дальнейшем индексы $i$, $j$, . . . будут изменяться от 1 до $n$. Условимся также, что во всех выражениях, в которых одинаковые индексы будут встречаться и внизу и наверху, по этим индексам будет предполагаться *суммирование* по всей области изменения этих индексов, т. е., в частности, в случае индексов $i$, $j$, . . . — от 1 до $n$. Это чрезвычайно удобное правило было предложено Эйнштейном [12]. Применяя это правило,

мы можем переписать соотношение (1.12) в виде

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i. \tag{1.13}$$

Вектор (1.13) мы будем также обозначать $\mathbf{x} = (x^i)$.

**1.2.9. Преобразование координат.** Если в линейном $n$-пространстве помимо базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ задан другой базис $\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \ldots, \mathbf{e}_{n'}$, то, применяя формулу (1.13) к векторам $\mathbf{e}_{i'}$, мы получим формулы

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i, \tag{1.14}$$

где $A^i_{i'}$ — координаты векторов $\mathbf{e}_{i'}$ по отношению к векторам $\mathbf{e}_i$.

С другой стороны, для всякого вектора $\mathbf{x}$ имеет место аналогичная формуле (1.13) формула

$$\mathbf{x} = x^{i'} \mathbf{e}_{i'} \tag{1.15}$$

и, в частности,

$$\mathbf{e}_i = A^{i'}_i \mathbf{e}_{i'}, \tag{1.16}$$

где $A^{i'}_i$ — координаты векторов $\mathbf{e}_i$ по отношению к векторам $\mathbf{e}_{i'}$.

Числа $A^i_{i'}$ и $A^{i'}_i$ образуют матрицы

$$\begin{pmatrix} A^1_{1'} & A^1_{2'} & \ldots & A^1_{n'} \\ A^2_{1'} & A^2_{2'} & \ldots & A^2_{n'} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A^n_{1'} & A^n_{2'} & \ldots & A^n_{n'} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} A^{1'}_1 & A^{1'}_2 & \ldots & A^{1'}_n \\ A^{2'}_1 & A^{2'}_2 & \ldots & A^{2'}_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A^{n'}_1 & A^{n'}_2 & \ldots & A^{n'}_n \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

Матрицы (1.17), как видно из соотношений (1.14) и (1.16), являются взаимно обратными матрицами, откуда следует, что определитель каждой из этих матриц обязательно отличен от 0.

Подставляя в формулу (1.13) значение $\mathbf{e}_i$ из (1.16), мы получим

$$\mathbf{x} = x^i A^{i'}_i \mathbf{e}_{i'}.$$

Сравнивая эту формулу с формулой (1.15), мы находим, что, в силу единственности разложения вектора по

линейно независимым векторам,

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i. \tag{1.18}$$

Совершенно аналогично, подставляя в формулу (1.15) значение $\mathbf{e}_{i'}$ из (1.14) и сравнивая полученную формулу с формулой (1.13), мы получим формулу

$$x^i = A_{i'}^i x^{i'}. \tag{1.19}$$

Формулы (1.18) и (1.19) выражают закон преобразования координат вектора при переходе от одного базиса к другому.

**1.2.10. Подпространства линейного пространства.** Рассмотрим $m < n$ линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, . . . , $\mathbf{a}_m$. Условимся обозначать индексы, изменяющиеся от 1 до $m$, через $a$, $b$, . . ., и рассмотрим всевозможные линейные комбинации этих векторов

$$\mathbf{x} = t^a \mathbf{a}_a. \tag{1.20}$$

Так как всякая линейная комбинация двух векторов вида (1.20) снова является вектором того же вида, векторы вида (1.20) образуют линейное $m$-пространство. Будем называть такие $m$-пространства *подпространствами* линейного пространства.

Простейшими подпространствами являются 1-пространства

$$\mathbf{x} = t\mathbf{a}, \tag{1.21}$$

где $\mathbf{a}$ — произвольный ненулевой вектор, а $t$ — произвольные числа. Два или более векторов, принадлежащих к одному 1-пространству, называются *коллинеарными* векторами, $p > m$ векторов, принадлежащих к одному $m$-пространству, называются *компланарными* векторами [13].

## § 3. Тензоры

**1.3.1. Ковариантные векторы.** Скалярная функция векторного аргумента $f(\mathbf{x})$, определенная на всем линейном пространстве, называется *линейной функцией*, если для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и любого числа $k$ имеют