линейно независимым векторам,

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i. \tag{1.18}$$

Совершенно аналогично, подставляя в формулу (1.15) значение $\mathbf{e}_{i'}$ из (1.14) и сравнивая полученную формулу с формулой (1.13), мы получим формулу

$$x^i = A_{i'}^i x^{i'}. \tag{1.19}$$

Формулы (1.18) и (1.19) выражают закон преобразования координат вектора при переходе от одного базиса к другому.

1.2.10. Подпространства линейного пространства. Рассмотрим $m < n$ линейно независимых векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, . . . , $\mathbf{a}_m$. Условимся обозначать индексы, изменяющиеся от 1 до m, через a, b, . . ., и рассмотрим всевозможные линейные комбинации этих векторов

$$\mathbf{x} = t^a \mathbf{a}_a. \tag{1.20}$$

Так как всякая линейная комбинация двух векторов вида (1.20) снова является вектором того же вида, векторы вида (1.20) образуют линейное m-пространство. Будем называть такие m-пространства *подпространствами* линейного пространства.

Простейшими подпространствами являются 1-пространства

$$\mathbf{x} = t\mathbf{a}, \tag{1.21}$$

где $\mathbf{a}$ — произвольный ненулевой вектор, а t — произвольные числа. Два или более векторов, принадлежащих к одному 1-пространству, называются *коллинеарными* векторами, $p > m$ векторов, принадлежащих к одному m-пространству, называются *компланарными* векторами [13].

§ 3. Тензоры

1.3.1. Ковариантные векторы. Скалярная функция векторного аргумента $f(\mathbf{x})$, определенная на всем линейном пространстве, называется *линейной функцией*, если для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и любого числа k имеют

место соотношения

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \tag{1.22}$$

и

$$f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x}). \tag{1.23}$$

Очевидно, что сумма двух линейных функций $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ и произведение линейной функции на число снова являются линейными функциями. Поэтому линейные функции также можно рассматривать как векторы некоторого линейного пространства. Если мы поставим в соответствие каждому вектору его i-ю координату по отношению к некоторому базису, мы получим скалярную функцию векторного аргумента. Так как при сложении векторов их i-е координаты складываются, а при умножении вектора на число его i-я координата умножается на это число, эта скалярная функция векторного аргумента является линейной.

В силу свойств (1.22) и (1.23)

$$f(\mathbf{x}) = f(x^i\mathbf{e}_i) = x^i f(\mathbf{e}_i),$$

т. е., обозначая $f(\mathbf{e}_i)$ через u_i,

$$f(\mathbf{x}) = u_i x^i. \tag{1.24}$$

Формула (1.24) показывает, что всякая линейная скалярная функция векторного аргумента является линейной комбинацией функций, ставящих в соответствие каждому вектору его i-ю координату. Так как n таких функций при $i = 1, 2, \ldots, n$ линейно независимы, эти линейные функции можно рассматривать как базис системы линейных функций. Отсюда видно, что размерность пространства линейных функций совпадает с размерностью основного линейного пространства.

Числа u_i можно рассматривать как координаты линейной функции по отношению к базису, определяемому базисными векторами $\mathbf{e}_i$ в основном n-пространстве. При переходе к другому базису n-пространства, состоящему из векторов $\mathbf{e}_{i'}$, функция $f(\mathbf{x})$ может быть записана в виде

$$f(\mathbf{x}) = f(x^{i'}\mathbf{e}_{i'}) = x^{i'} f(\mathbf{e}_{i'})$$

или, если обозначить $f(\mathbf{e}_{i'})$ через $u_{i'}$, в виде

$$f(\mathbf{x}) = u_{i'}x^{i'}.$$

Выражая в формуле (1.24) x^i через $x^{i'}$ по формуле (1.19), мы получим, что

$$u_i x^i = u_i A^i_{i'} x^{i'} = u_{i'} x^{i'}.$$

Так как это соотношение имеет место при любых $x^{i'}$, получаем формулу

$$u_{i'} = A^i_{i'} u_i. \tag{1.25}$$

Аналогично получается формула

$$u_i = A^{i'}_i u_{i'}. \tag{1.26}$$

Формулы (1.25) и (1.26) отличаются от формул (1.18) и (1.19) тем, что переход от u_i к $u_{i'}$ происходит не при помощи матрицы $A^{i'}_i$, как переход от x^i к $x^{i'}$, а при помощи обратной матрицы $A^i_{i'}$, как переход от $x^{i'}$ к x^i. Так как закон преобразования базисных векторов $\mathbf{e}_i$ совпадает с законом преобразования u_i и противоположен закону преобразования x^i, векторы $\mathbf{x} = (x^i)$ называются *контравариантными* («противопреобразующимися») векторами, а линейные функции $f(\mathbf{x})$ с координатами u_i называются *ковариантными* («сопреобразующимися») векторами; ковариантные векторы с координатами u_i обозначают также $\mathbf{u} = (u_i)$.

1.3.2. Тензоры. Контравариантные и ковариантные векторы являются частными случаями более общего понятия — *тензоров* [14]. Для определения тензора надо исходить из полилинейной скалярной функции нескольких векторных аргументов, часть из которых являются контравариантными, а часть — ковариантными векторами, т. е. такой функции этих аргументов, которая является линейной по отношению к каждому из этих аргументов. Из симметричности формулы (1.24) относительно координат u_i и x^i видно, что линейная функция ковариантного вектора определяет контравариантный вектор. Применяя прием, при помощи которого мы

получили формулу (1.24), в общем случае, мы получим выражение полилинейной функции контравариантных векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{z}$ и ковариантных векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{w}$ в виде

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{w}) = \\ = T_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\cdot\cdot\cdot\ j_1 j_2 \ldots j_s} x^{i_1} y^{i_2} \ldots z^{i_r} u_{j_1} v_{j_2} \ldots w_{j_s}. \quad (1.27)$$

Числа $T_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\cdot\cdot\cdot\ j_1 j_2 \ldots j_s}$ называются *координатами тензора r-й ковариантной валентности и s-й контравариантной валентности*. Записывая функцию $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{w})$ при базисе $\mathbf{e}_{i'}$ и выражая $x^i, y^i, \ldots, z^i$ через $x^{i'}, y^{i'}, \ldots, z^{i'}$ по формулам вида (1.19) и $u_{i'}, v_{i'}, \ldots, w_{i'}$ через $u_i, v_i, \ldots, w_i$ по формулам вида (1.26) мы получим, что при переходе от базиса $\mathbf{e}_i$ к базису $\mathbf{e}_{i'}$, координаты $T_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\cdot\cdot\cdot\ j_1 j_2 \ldots j_s}$ преобразуются по закону

$$T_{i'_1 i'_2 \ldots i'_r}^{\cdot\cdot\cdot\ j'_1 j'_2 \ldots j'_s} = A_{i'_1}^{i_1} A_{i'_2}^{i_2} \ldots A_{i'_r}^{i_r} A_{j_1}^{j'_1} A_{j_2}^{j'_2} \ldots A_{j_s}^{j'_s} T_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\cdot\cdot\cdot\ j_1 j_2 \ldots j_s}. \quad (1.28)$$

При $r = s = 0$ тензор является скаляром, при $r = 0$ $s = 1$ — контравариантным вектором, при $r = 1$, $s = 0$ — ковариантным вектором. Из тензоров высшей валентности наибольшее значение имеют тензоры второй валентности, координаты которых имеют вид T_{ij}, $T_i^{\cdot j}$ и T^{ij}.

Сложение и умножение функций $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{w})$ определяет сложение и умножение тензоров

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\cdot\cdot\cdot\ j_1 j_2 \ldots j_s} + U_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\cdot\cdot\cdot\ j_1 j_2 \ldots j_s} = V_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\cdot\cdot\cdot\ j_1 j_2 \ldots j_s} \quad (1.29)$$

и

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\cdot\cdot\cdot\ j_1 j_2 \ldots j_s} U_{k_1 k_2 \ldots k_p}^{\cdot\cdot\cdot\ l_1 l_2 \ldots l_q} = V_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\cdot\cdot\cdot\ j_1 j_2 \ldots j_s}{}_{k_1 k_2 \ldots k_p}^{\cdot\cdot\cdot\ l_1 l_2 \ldots l_q}. \quad (1.30)$$

Частным случаем умножения тензоров является *умножение тензора на скаляр*. Поэтому тензоры $T_{i_1 i_2 \ldots i_r}^{\cdot\cdot\cdot\ j_1 j_2 \ldots j_s}$, определенные при помощи линейного n-пространства,

также можно рассматривать как векторы некоторого линейного пространства; размерность этого пространства, очевидно, равна n^{r+s}.

Если у тензора имеются и контравариантные и ковариантные индексы и мы просуммируем координаты этого тензора по одному из контравариантных и по одному из ковариантных индексов, мы получим новый тензор, имеющий на одну контравариантную и на одну ковариантную валентность меньше, чем данный тензор. Эта операция называется *свертыванием* тензора.

Если произведение двух тензоров свертывается по двум индексам, принадлежащим обоим сомножителям, это произведение после свертывания называется *сверткой* данных тензоров. Например, скаляр (1.24) является сверткой ковариантного вектора $\mathbf{u} = (u_i)$ с контравариантным вектором $\mathbf{x} = (x^i)$. Эту свертку иногда называют *скалярным произведением* векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{x}$.

1.3.3. Симметрические и кососимметрические тензоры. Тензоры $T_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ или $T^{i_1 i_2 \ldots i_r}$, все индексы которых ковариантны или контравариантны, называются *симметрическими*, если их координаты не изменяются при любой перестановке индексов, и *кососимметрическими*, если их координаты не изменяются при любой четной перестановке индексов и меняют знак при любой нечетной перестановке индексов. Например, симметрические тензоры 2-й валентности T_{ij} и T^{ij} характеризуются тем, что

$$T_{ij} = T_{ji}, \quad T^{ij} = T^{ji}, \tag{1.31}$$

кососимметрические тензоры 2-й валентности T_{ij} и T^{ij} характеризуются тем, что

$$T_{ij} = -T_{ji}, \quad T^{ij} = -T^{ji}, \tag{1.32}$$

симметрический тензор 3-й валентности T_{ijk} характеризуется тем, что

$$T_{ijk} = T_{ikj} = T_{jik} = T_{jki} = T_{kij} = {}_{kji}, \tag{1.33}$$

а кососимметрический тензор 3-й валентности T_{ijk} характеризуется тем, что

$$T_{ijk} = T_{jki} = T_{kij} = -T_{ikj} = -T_{jik} = -T_{kji}. \quad (1.34)$$

Особую роль в геометрии играют кососимметрический тензор n-й валентности $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, все координаты которого равны числу $\varepsilon = \varepsilon_{12 \ldots n}$ или $-\varepsilon$.

Из свойств определителей n-го порядка следует, что свертка

$$k = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n}$$

равна произведению числа ε на определитель матрицы (a_j^i), а свертка

$$k = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} a^{i_1 j_1} a^{i_2 j_2} \ldots a^{i_n j_n}$$

равна произведению числа ε^2 на определитель матрицы (a^{ij}), что мы будем записывать в виде

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n} = \varepsilon \operatorname{Det} (a_j^i), \quad (1.35)$$

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} a^{i_1 j_1} a^{i_2 j_2} \ldots a^{i_n j_n} = \varepsilon^2 \operatorname{Det} (a^{ij}). \quad (1.36)$$

§ 4. Линейные операторы

1.4.1. Векторные линейные функции. Наряду со скалярными линейными функциями векторного аргумента рассматривают также векторные линейные функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, т. е. функции, определенные на всем линейном пространстве и имеющие областью своих значений векторы той же системы, причем для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и любого числа k имеют место аналогичные формулам (1.22) и (1.23) соотношения

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (1.37)$$

и

$$\mathbf{f}(k\mathbf{x}) = k\mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1.38)$$

Если функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ определяет взаимно однозначное отображение линейного пространства на себя, то, так