а кососимметрический тензор 3-й валентности T_{ijk} характеризуется тем, что

$$T_{ijk} = T_{jki} = T_{kij} = -T_{ikj} = -T_{jik} = -T_{kji}. \quad (1.34)$$

Особую роль в геометрии играют кососимметрический тензор n-й валентности $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, все координаты которого равны числу $\varepsilon = \varepsilon_{12 \ldots n}$ или $-\varepsilon$.

Из свойств определителей n-го порядка следует, что свертка

$$k = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n}$$

равна произведению числа ε на определитель матрицы (a_j^i), а свертка

$$k = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} a^{i_1 j_1} a^{i_2 j_2} \ldots a^{i_n j_n}$$

равна произведению числа ε^2 на определитель матрицы (a^{ij}), что мы будем записывать в виде

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n} = \varepsilon \operatorname{Det} (a_j^i), \quad (1.35)$$

$$\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} a^{i_1 j_1} a^{i_2 j_2} \ldots a^{i_n j_n} = \varepsilon^2 \operatorname{Det} (a^{ij}). \quad (1.36)$$

§ 4. Линейные операторы

1.4.1. Векторные линейные функции. Наряду со скалярными линейными функциями векторного аргумента рассматривают также векторные линейные функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, т. е. функции, определенные на всем линейном пространстве и имеющие областью своих значений векторы той же системы, причем для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и любого числа k имеют место аналогичные формулам (1.22) и (1.23) соотношения

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (1.37)$$

и

$$\mathbf{f}(k\mathbf{x}) = k\mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1.38)$$

Если функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ определяет взаимно однозначное отображение линейного пространства на себя, то, так

как эта функция в силу формул (1.37) и (1.38) переводит сумму векторов в сумму соответственных векторов, а произведение вектора на число — в произведение соответственного вектора на то же число, отображение линейного пространства на себя, определяемое такой функцией, называется *автоморфизмом* этого пространства.

1.4.2. Матрицы. *Векторная линейная функция векторного аргумента* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *в координатах имеет вид*

$$y^i = a^i_j x^j. \tag{1.39}$$

В самом деле, в силу свойств (1.37) и (1.38)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x^j \mathbf{e}_j) = x^j \mathbf{f}(\mathbf{e}_i),$$

т. е., обозначая

$$\mathbf{f}(\mathbf{e}_j) = \mathbf{a}_j = a^i_j \mathbf{e}_i,$$

мы можем записать функцию $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = a^i_j x^j \mathbf{e}_i,$$

откуда вытекает формула (1.39).

Числа a^i_j образуют *матрицу*

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \dots a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 \dots a^2_n \\ \dots & \dots \\ a^n_1 & a^n_2 \dots a^n_n \end{pmatrix}. \tag{1.40}$$

Таким образом, всякой векторной линейной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ при всяком выборе базиса в n-пространстве соответствует матрица (1.40). Очевидно, что и обратно, всякое преобразование (1.39) является векторной линейной функцией.

При преобразованиях координат числа a^i_j преобразуются как координаты тензора 1-й ковариантной и 1-й контравариантной валентности.

1.4.3. Линейные операторы. Условимся записывать формулу (1.39) в векторной форме в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{1.41}$$

Здесь **A** — оператор линейной функции **f** (**x**) или *линейный оператор*[15]. Будем записывать оператор **A**, определяемый матрицей (1.34) в виде $\mathbf{A} = (a^i_j)$.

Так как числа a^i_j являются координатами тензора, то вектор (1.41) можно называть сверткой оператора **A** с вектором **x**; часто говорят, что вектор **y** является произведением оператора **A** на вектор **x**.

1.4.4. Сложение операторов. Всяким двум линейным функциям $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x}$ можно поставить в соответствие линейную функцию

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

Тем самым:

1°. Каждым двум операторам **A** и **B** поставлен в соответствие определенный оператор **C**. Будем обозначать этот оператор

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \tag{1.42}$$

и называть его *суммой* операторов **A** и **B**.

2°. Сложение операторов *коммутативно*, т. е.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \tag{1.43}$$

что вытекает из коммутативности сложения векторов **f** (**x**) и **g** (**x**) при всяком значении **x**.

3°. Сложение операторов *ассоциативно*, т. е.

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}), \tag{1.44}$$

что вытекает из ассоциативности сложения векторов **Ax**, **Bx** и **Cx** при всяком значении **x**.

4°. Существует единственный *нулевой оператор* **O**, такой, что для всякого оператора **A**

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}, \tag{1.45}$$

что вытекает из существования единственного нулевого вектора **o**: таким оператором является оператор линейной функции, ставящей в соответствие всем векторам **x** вектор **o**, т. е. $\mathbf{O}\mathbf{x} = \mathbf{o}$ для всех **x**.

5°. Для всякого оператора **A** имеется единственный *противоположный оператор* — **A**, для которого

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}, \tag{1.46}$$

что вытекает из существования для всякого вектора единственного противоположного вектора: если $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, то $(-\mathbf{A})\mathbf{x} = -\mathbf{y}$.

Эти свойства показывают, что по сложению операторы, так же как векторы, образуют *коммутативную группу*.

Сложение операторов в координатах имеет вид

$$c_j^i = a_j^i + b_j^i, \tag{1.47}$$

т. е. является частным случаем сложения тензоров (1.29).

1.4.5. Умножение операторов. Всяким двум линейным функциям $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ и $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x}$ можно поставить в соответствие линейную функцию

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})).$$

Тем самым:

1°. Каждым двум операторам **A** и **B** поставлен в соответствие определенный оператор **D**. Так как преобразование линейного n-пространства, определяемое функцией $\mathbf{k}(\mathbf{x})$, является произведением преобразований этого n-пространства, определяемых функциями $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, будем называть оператор **D** *произведением* операторов **A** и **B** и обозначать его

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}\mathbf{B}. \tag{1.48}$$

2°. Умножение операторов *ассоциативно*, т. е.

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}), \tag{1.49}$$

что вытекает из ассоциативности умножения любых преобразований.

3°. Существует единственный *единичный оператор* **I** такой, что для всякого оператора **A**

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{A}, \tag{1.50}$$

таким оператором является оператор линейной функции, ставящей в соответствие каждому вектору **x** сам этот вектор, т. е. $\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ для всех **x**.

Эти свойства показывают, что *обратимые операторы*, т. е. операторы, обладающие *обратными операторами* $\mathbf{A}^{-1}$, связанные с ними соотношением

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}, \tag{1.51}$$

образуют по умножению *группу*. Эта группа некоммутативна, так как в общем случае $\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) \neq \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ и, следовательно, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

4°. Умножение операторов *дистрибутивно* относительно их сложения, т. е.

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}, \tag{1.52}$$

так как для любого вектора $\mathbf{x}$ в силу свойства (1.37) линейных функций

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{Bx} + \mathbf{Cx}) = \mathbf{A}(\mathbf{Bx}) + \mathbf{A}(\mathbf{Cx})$$

и в силу определения сложения операторов

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{Cx} = \mathbf{A}(\mathbf{Cx}) + \mathbf{B}(\mathbf{Cx}).$$

Свойства 1°—4° показывают, что по сложению и умножению операторы образуют некоммутативное *кольцо* [16].

Умножение операторов в координатах имеет вид

$$d^i_j = a^i_k b^k_j, \tag{1.53}$$

т. е. является частным случаем свертывания тензоров. Матрица единичного оператора $\mathbf{I}$ обозначается (δ^i_j), где δ^i_j — «символ Кронекера» [17] (так же, как аналогичные символы δ_{ij} и δ^{ij}), равный 1 при $i = j$ и равный 0 при $i \neq j$.

1.4.6. Действие операторов на ковариантные векторы. Векторные линейные функции можно определить и над ковариантными векторами. Так же как для контравариантных векторов, показывается, что такая функция $\mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ в координатах имеет вид

$$v_i = u_j a^j_i, \tag{1.54}$$

где числа a^i_j образуют матрицу (1.40). Формулу (1.54) в векторной форме мы будем записывать в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{uA}. \tag{1.55}$$

Такой порядок записи объясняется тем, что если в формуле (1.39) тензор a^i_j свертывается по нижнему индексу, как в произведении **AB**, в формуле (1.54) этот тензор свертывается по верхнему индексу, как в произведении **BA**.

1.4.7. Операторное произведение векторов. Всякому контравариантному вектору **a** и ковариантному вектору **b** можно поставить в соответствие линейный оператор: так как функция

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{bx}, \tag{1.56}$$

где **bx** — свертка ковариантного вектора **b** и контравариантного вектора **x**, удовлетворяет условиям (1.37) и (1.38) и, следовательно, является векторной функцией векторного аргумента. Поэтому функцию (1.56) можно записать в виде $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$. Сравнивая две записи этой функции, мы видим, что оператор **A** в этом случае естественно записывать в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}. \tag{1.57}$$

Будем называть оператор **A** *операторным произведением* контравариантного вектора **a** и ковариантного вектора **b**.

Если **u** — ковариантный вектор, то произведение (1.55) оператора (1.57) на ковариантный вектор **u** имеет вид $\mathbf{ua}\cdot\mathbf{b}$. Таким образом, оператор (1.57) переводит всякий контравариантный вектор в вектор, коллинеарный с вектором **a**, а всякий ковариантный вектор — в ковариантный вектор, коллинеарный с ковариантным вектором **b**.

Если мы обозначим ковариантные векторы, соответствующие линейным функциям, ставящим в соответствие каждому вектору **x** его i-ю координату x^i, через $\mathbf{e}^i$, то мы можем записать координаты x^i в виде сверток

$$x^i = \mathbf{e}^i\mathbf{x}. \tag{1.58}$$

Поэтому всякую линейную функцию (1.41) с произвольным оператором **A** в силу свойств (1.31) и (1.32) можно записать в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\,(x^i\mathbf{e}_i) = (\mathbf{A}\mathbf{e}_i)x^i = \mathbf{A}\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}^i\mathbf{x}.$$

Поэтому *всякий оператор* **A** *в n-пространстве можно представить в виде суммы n операторных произведений*

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_i\cdot\mathbf{e}^i, \tag{1.59}$$

где $\mathbf{a}_i = \mathbf{A}\mathbf{e}_i$.

1.4.8. Собственные векторы. Если оператор **A** переводит вектор **x** в коллинеарный с ним вектор $\lambda\mathbf{x}$,

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \tag{1.60}$$

то вектор **x** называется *собственным вектором* оператора **A**, а число λ — *собственным числом* этого оператора, соответствующим собственному вектору **x**. Очевидно, что если вектор **x** — собственный вектор оператора **A**, то всякий вектор, коллинеарный с вектором **x**, также является собственным вектором оператора **A**. Соотношение (1.60) в координатах имеет вид

$$a^i_j x^j = \lambda x^i$$

или

$$(a^i_j - \lambda\delta^i_j)\,x^j = 0. \tag{1.61}$$

Соотношения (1.61) — система n однородных линейных уравнений с n неизвестными. В случае существования ненулевого собственного вектора **x** эта система уравнений имеет ненулевые решения и, значит, определитель этой системы равен нулю

$$\mathrm{Det}\,(a^i_j - \lambda\delta^i_j) = 0. \tag{1.62}$$

Это алгебраическое уравнение — n-й степени относительно λ. Собственным числом оператора **A** может быть только корень λ этого уравнения. Обратно, если λ — корень этого уравнения, то для получения координат соответственного собственного вектора **x** следует за-

даться одной из его ненулевых координат и определить остальные $n-1$ его координат из любых $n-1$ уравнений (1.61), так как в силу равенства (1.62) уравнения (1.61) линейно зависимы.

Так как уравнение (1.62) является уравнением n-й степени, максимальное число различных собственных чисел оператора равно n. Если оператор $\mathbf{A}$ обладает n различными вещественными собственными числами λ_i и за базисные векторы принять соответствующие им собственные векторы $\mathbf{e}_i$, то матрица оператора $\mathbf{A}$ примет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{1.63}$$

Приведение матрицы оператора $\mathbf{A}$ к виду (1.63) называется приведением к *диагональному виду* [18].

1.4.9. Прямоугольные операторы. Наряду с векторными линейными функциями, определенными на некотором линейном n-пространстве и имеющими областью своих значений векторы того же пространства, иногда рассматривают векторные линейные функции, определенные на некотором линейном n-пространстве и имеющие областью своих значений векторы некоторого линейного m-пространства, где m может быть как равно n, так и больше или меньше n. Такая векторная линейная функция $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ в координатах имеет вид

$$y^a = a^a_i x^i, \tag{1.64}$$

где индекс a пробегает значения от 1 до m, а i — от 1 до n.

Вывод формулы (1.64) отличается от вывода формулы (1.39) только заменой индексов i, j соответственно на индексы a, i. Числа a^a_i образуют матрицу

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \dots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \dots & a^2_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^m_1 & a^m_2 & \dots & a^m_n \end{pmatrix}. \tag{1.65}$$

В отличие от квадратной матрицы (1.40) матрица (1.65) при $m \neq n$ является прямоугольной матрицей с m строками и n столбцами. Формулу (1.64) также записывают в векторной форме в виде (1.39). В этом случае мы будем называть линейные операторы *прямоугольными операторами*, а обычные операторы в отличие от них будем называть *квадратными операторами*.

В случае, когда $n = 1$, а $m > 1$, прямоугольный оператор отображает векторы 1-пространства, которые можно рассматривать как числа, на векторы m-пространства, поэтому в этом случае действие прямоугольного оператора равносильно умножению числа на вектор, поэтому *прямоугольные операторы* с $n = 1$, $m > 1$ *можно отождествлять с векторами*. В случае, когда $n > 1$, а $m = 1$, прямоугольный оператор отображает векторы n-пространства на векторы 1-пространства, т. е. на числа, и действие прямоугольного оператора равносильно свертыванию вектора с ковариантным вектором, поэтому *прямоугольные операторы* $n > 1$, $m = 1$, *можно отождествлять с ковариантными векторами*. Прямоугольные операторы общего вида можно поэтому рассматривать как *обобщения векторов*.

Над прямоугольными операторами можно определить сложение (1.42) и умножение (1.48). При сложении прямоугольных операторов слагаемые **A** и **B** и их сумма **C** отображают векторы n-пространства на векторы m-пространства, при умножении же оператор **A** отображает векторы n-пространства на векторы m-пространства, оператор **B** отображает векторы некоторого p-пространства на векторы n-пространства, а их произведение **D** отображает векторы p-пространства на векторы m-пространства. Сложение прямоугольных операторов, как видно из его определения, коммутативно. Поэтому *прямоугольные операторы, отображающие векторы n-пространства на векторы m-пространства, образуют коммутативную группу по сложению*. Эта группа переводится в себя умножением на квадратные операторы n-пространства *слева* и на квадратные операторы m-пространства *справа*. Умножение на эти операторы является аналогом умножения контравариантных и ковариантных векторов n-пространства на числа и на квадратные операторы этого

пространства соответственно слева и справа, по формулам (1.41) и (1.55).

В координатах сложение и умножение прямоугольных операторов имеет, соответственно, вид

$$c_i^a = a_i^a + b_i^a. \tag{1.66}$$

и

$$d_u^a = a_i^a b_u^i, \tag{1.67}$$

где индекс u пробегает значения от 1 до p.

§ 5. Аффинное пространство

1.5.1. Аксиомы аффинного пространства. Изложенное обобщение понятия вектора позволяет произвести аналогичное обобщение понятия евклидова пространства.

Будем называть *аффинным пространством* множество элементов любой природы, называемых *точками*, которые вместе с *векторами*, удовлетворяющими аксиомам I — III линейного пространства, удовлетворяют также аксиомам:

IV,1°. Каждым двум точкам A и B в определенном порядке поставлен в соответствие определенный вектор $\mathbf{a}$, обозначаемый

$$\mathbf{a} = \overline{AB}. \tag{1.68}$$

IV,2°. Каждой точке A и каждому вектору $\mathbf{a}$ поставлена в соответствие определенная точка B, для которой

$$\overline{AB} = \mathbf{a}.$$

IV,3°. Для любых трех точек A, B, C

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}. \tag{1.69}$$

На рис. 1.1 изображены ориентированные отрезки, представляющие векторы

$$\mathbf{a} = \overline{AB}, \quad \mathbf{b} = \overline{BC} \quad \text{и} \quad \mathbf{c} = \overline{AC}.$$