пространства соответственно слева и справа, по формулам (1.41) и (1.55).

В координатах сложение и умножение прямоугольных операторов имеет, соответственно, вид

$$c_i^a = a_i^a + b_i^a. \tag{1.66}$$

и

$$d_u^a = a_i^a b_u^i, \tag{1.67}$$

где индекс u пробегает значения от 1 до p.

§ 5. Аффинное пространство

1.5.1. Аксиомы аффинного пространства. Изложенное обобщение понятия вектора позволяет произвести аналогичное обобщение понятия евклидова пространства.

Будем называть *аффинным пространством* множество элементов любой природы, называемых *точками*, которые вместе с *векторами*, удовлетворяющими аксиомам I — III линейного пространства, удовлетворяют также аксиомам:

IV,1°. Каждым двум точкам A и B в определенном порядке поставлен в соответствие определенный вектор $\mathbf{a}$, обозначаемый

$$\mathbf{a} = \overline{AB}. \tag{1.68}$$

IV,2°. Каждой точке A и каждому вектору $\mathbf{a}$ поставлена в соответствие определенная точка B, для которой

$$\overline{AB} = \mathbf{a}.$$

IV,3°. Для любых трех точек A, B, C

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}. \tag{1.69}$$

На рис. 1.1 изображены ориентированные отрезки, представляющие векторы

$$\mathbf{a} = \overline{AB}, \quad \mathbf{b} = \overline{BC} \quad \text{и} \quad \mathbf{c} = \overline{AC}.$$

Из формулы (1.69) вытекает, что

$$\overline{AA} + \overline{AB} = \overline{AB},$$

т. е. вектор $\overline{AA}$ обладает свойством $\overline{AA} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$ и, следовательно, совпадает с нулевым вектором $\mathbf{o}$. Из формулы (1.69) вытекает также, что

$$\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA},$$

т. е. если $\overline{AB} = \mathbf{a}$, то $\overline{BA} = -\mathbf{a}$.

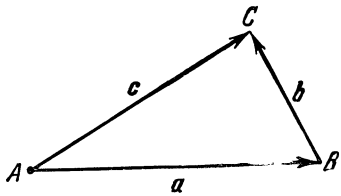

Рис. 1.1.

Если векторы, участвующие в определении аффинного пространства, образуют линейное n-пространство, аффинное пространство называется *n-мерным аффинным пространством* или, короче, *аффинным n-пространством*. Приведенная нами система аксиом аффинного пространства была предложена Г. Вейлем [19].

Если в аффинном пространстве выбрана некоторая точка O, которую мы будем называть *началом*, то всякая точка M этого пространства определяет вектор

$$\mathbf{x} = \overline{OM}, \qquad (1.70)$$

называемый *радиус-вектором* этой точки [20]. Будем обозначать точку M с радиус-вектором $\mathbf{x}$ через $M(\mathbf{x})$.

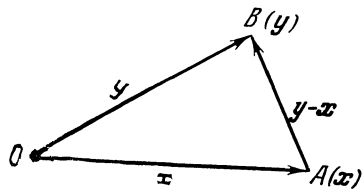

Рис. 1.2.

Если даны точки $A(\mathbf{x})$ и $B(\mathbf{y})$, то вектор $\overline{AB}$ совпадает с вектором $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ (рис. 1.2).

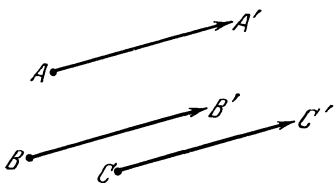

Рис. 1.3.

1.5.2. Переносы. Если каждой точке A аффинного пространства поставлена в соответствие такая точка A', что вектор $\overline{AA'}$ совпадает с некоторым постоянным вектором $\mathbf{a}$, то переход от точек A к точкам A' называется *переносом* на вектор $\mathbf{a}$ (рис. 1.3).

В силу аксиомы IV.2° переносы являются взаимно однозначными отображениями аффинного пространства на себя.

В силу аксиомы IV.3° перенос на вектор **a** определяет преобразование радиус-векторов

$$'\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{a}. \tag{1.71}$$

1.5.3. Аффинные координаты. Если в аффинном пространстве выбрано начало O и базисные векторы $\mathbf{e}_i$, то радиус-вектор $\mathbf{x} = \overline{OM}$ всякой точки M ($\mathbf{x}$) можно записать в виде

$$\overline{OM} = x^i \mathbf{e}_i. \tag{1.72}$$

Числа x^i называются *аффинными координатами* [21] точки M (рис. 1.4).

Перенос (1.72) может быть записан в аффинных координатах в виде

$$'x^i = x_i + a^i. \tag{1.73}$$

При переходе от начала O к другому началу O' радиусы-векторы точек аффинного пространства преобразуются по закону

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}. \tag{1.74}$$

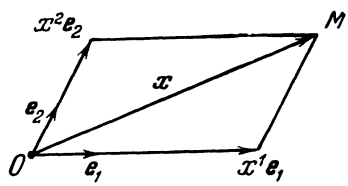

Рис. 1.4.

Рассмотрим теперь преобразование аффинных координат, состоящее в одновременном переходе от начала O к началу O' и от базисных векторов $\mathbf{e}_i$ к базисным векторам $\mathbf{e}_{i'}$. Обозначим вектор $\overline{OO'}$ через

$$\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i.$$

Вектор

$$\overline{O'M} = x^{i'} \mathbf{e}_{i'}$$

в силу (1.14) может быть записан в виде

$$\overline{O'M} = x^{i'} \mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} x^{i'} \mathbf{e}_i.$$

Поэтому соотношение (1.74) можно переписать в виде

$$x^i \mathbf{e}_i = a^i \mathbf{e}_i + A^i_{i'} x^{i'} \mathbf{e}_i,$$

т. е.

$$x^i = A^i_{i'} x^{i'} + a^i. \tag{1.75}$$

Формула (1.75) выражает закон преобразования аффинных координат.

Термины «аффинные операции над векторами», «аффинное пространство» и «аффинные координаты» объясняются связью этих операций пространства и координат с аффинными преобразованиями (см. **4.1.2** и **4.1.3**).