ГЛАВА ВТОРАЯ

Метрические операции над векторами

§ 1. Евклидово пространство

2.1.1. Аксиомы евклидова пространства. Будем называть *евклидовым пространством* множество элементов любой природы, называемых *точками*, удовлетворяющих аксиомам I—IV аффинного пространства и, сверх того, удовлетворяющих метрическим аксиомам:

V,1°. Каждым двум векторам **a** и **b** поставлено в соответствие определенное число, обозначаемое

$$k = \mathbf{ab} \tag{2.1}$$

и называемое *скалярным произведением* векторов.

V,2°. Скалярное произведение векторов *коммутативно*, т. е.

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}. \tag{2.2}$$

V,3°. Скалярное произведение векторов *дистрибутивно* относительно сложения векторов, т. е.

$$\mathbf{a}\,(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}. \tag{2.3}$$

V,4°. Вещественный множитель можно вынести за знак скалярного произведения, т. е.

$$(k\mathbf{a})\mathbf{b} = k\cdot\mathbf{ab}. \tag{2.4}$$

V,5°. Скалярный квадрат вектора неотрицателен, т. е.

$$\mathbf{a}^2 \geqslant 0, \tag{2.5}$$

причем знак равенства имеет место только для нулевого вектора.

Если векторы, участвующие в определении евклидова пространства, образуют линейное n-пространство, евклидово пространство называется *n-мерным евклидовым пространством* или, короче, *евклидовым n-пространством*. Приведенная нами аксиоматика евклидова пространства была предложена И. фон. Нейманом [1].

2.1.2. Модели евклидова пространства. Так как моделями аффинного n-пространства могут служить модели линейного n-пространства, мы можем получить модели евклидова n-пространства, определив в рассмотренных в **1.2.6** моделях линейного n-пространства скалярное произведение векторов.

В модели линейного 3-пространства, в которой векторы изображаются *классами эквивалентных ориентированных отрезков обычного пространства*, скалярное произведение классов, содержащих отрезки $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, равно произведению длин OA и OB этих отрезков на косинус угла между ними:

$$k = OA \cdot OB \cos AOB.$$

Аналогично определяется скалярное произведение в модели линейного 3-пространства, в которой векторы изображаются *ориентированными отрезками обычного пространства с общим началом*.

В модели линейного n-пространства, в которой векторы изображаются *системами n вещественных чисел*, скалярное произведение систем чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ равно

$$k = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

В модели линейного n-пространства, в которой векторы изображаются *многочленами $f(t)$ степени $\leqslant n-1$*, заданными на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$, за скалярное произведение многочленов $f(t)$ и $g(t)$ можно принять определенный интеграл

$$k = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt.$$

2.1.3. Расстояния между точками. Метрические аксиомы позволяют установить *метрику* евклидова пространства, т. е. расстояния между его точками. Определим сначала *модуль* $|\mathbf{a}|$ вектора $\mathbf{a}$ как неотрицательный корень из его скалярного квадрата, т. е.

$$|\mathbf{a}| = +\sqrt{\mathbf{a}^2}. \tag{2.6}$$

Векторы, модуль которых равен 1, будем называть *единичными векторами*; единичный вектор $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ будем обозначать $\mathbf{a}^0$.

Будем считать *расстоянием* между точками A и B модуль вектора $\overline{AB}$; будем обозначать это расстояние AB.

Таким образом, расстояние AB между точками A ($\mathbf{x}$) и B ($\mathbf{y}$) определяется соотношением

$$AB^2 = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|^2 = (\mathbf{y} - \mathbf{x})^2. \tag{2.7}$$

Из определения расстояния непосредственно следует, что

1°. Расстояние *симметрично*, т. е.

$$AB = BA. \tag{2.8}$$

2°. Расстояние *позитивно*, т. е.

$$AB \geqslant 0, \tag{2.9}$$

причем знак равенства имеет место только при совпадении точек A и B.

2.1.4. Неравенство треугольника. Покажем, что для расстояний между точками евклидова пространства помимо свойств 1° и 2° выполняется также «неравенство треугольника»:

3°. Расстояние между всякими двумя точками не более суммы расстояний между этими точками и третьей точкой, т. е.

$$AC \leqslant AB + BC. \tag{2.10}$$

Множество точек, для всяких двух точек A и B которого определено число AB, удовлетворяющее условиям 1° — 3°, называется *метрическим пространством* [2].

Для доказательства неравенства треугольника докажем так называемое *неравенство Коши* [3]

$$|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \geqslant |\mathbf{ab}|. \tag{2.11}$$

В самом деле, в силу аксиомы IV, 5° скалярный квадрат вектора $\mathbf{a} - t\mathbf{b}$ неотрицателен при любом вещественном t

$$(\mathbf{a} - t\mathbf{b})^2 \geqslant 0,$$

т. е.

$$\mathbf{a}^2 - 2t\mathbf{ab} + t^2\mathbf{b}^2 \geqslant 0.$$

В случае $\mathbf{b} = \mathbf{o}$ обе части неравенства (2.11) равны 0, т. е. неравенство (2.11) выполняется автоматически. Если же $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$, положим

$$t = \frac{\mathbf{ab}}{\mathbf{b}^2}.$$

Тогда наше неравенство примет вид

$$\mathbf{a}^2 - 2\frac{(\mathbf{ab})^2}{\mathbf{b}^2} + \frac{(\mathbf{ab})^2}{\mathbf{b}^2} \geqslant 0,$$

т. е.

$$\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 \geqslant (\mathbf{ab})^2,$$

что равносильно неравенству (2.11). Рассмотрим теперь три точки A ($\mathbf{x}$), B ($\mathbf{y}$) и C ($\mathbf{z}$) (рис. 2.1). Тогда

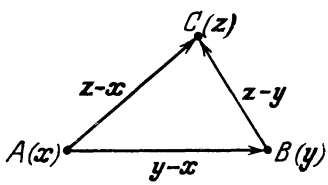

Рис. 2.1.

$$AC^2 = (\mathbf{z} - \mathbf{x})^2 = (\mathbf{z} - \mathbf{y} + \mathbf{y} - \mathbf{x})^2 = (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2 + 2(\mathbf{z} - \mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x})^2 = BC^2 + 2(\mathbf{z} - \mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + AB^2.$$

Но в силу неравенства Коши

$$(\mathbf{z} - \mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leqslant |\mathbf{y} - \mathbf{x}|\,|\mathbf{z} - \mathbf{y}| = AB \cdot BC.$$

Поэтому

$$AC^2 \leqslant BC^2 + 2AB \cdot BC + AB^2 = (AB + BC)^2,$$

откуда получаем неравенство (2.10).

2.1.5. Углы между векторами. В силу неравенства Коши

$$-1 \leqslant \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} \leqslant 1,$$

поэтому это отношение можно рассматривать как косинус некоторого аргумента φ. Число φ, для которого

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi, \tag{2.12}$$

будем называть *углом* между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, для которых $\mathbf{ab} = 0$, т. е. угол φ является прямым углом $\frac{\pi}{2}$, будем называть *перпендикулярными* или *ортогональными*.

В случае знака равенства в неравенстве Коши, т. е. если $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| = |\mathbf{ab}|$ формула (2.12) дает нам $\cos\varphi = \pm 1$, т. е. $\varphi = 0$ или π. В этом случае векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, т. е. $\mathbf{b} = \mathbf{a}t$, причем случаю $\cos\varphi = 1$ соответствует $t > 0$, а случаю $\cos\varphi = -1$ соответствует $t < 0$.

2.1.6. Скалярное произведение в координатах. Если в пространстве выбран векторный базис $\mathbf{e}_i$, то скалярное произведение векторов $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{y} = y^j\mathbf{e}_i$ можно записать в виде

$$\mathbf{xy} = x^i\mathbf{e}_i y^j\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j x^i y^j = e_{ij}x^i y^j. \tag{2.13}$$

Правая часть формулы (2.13) представляет собой *симметричную билинейную форму* с коэффициентами e_{ij}.

Скалярный квадрат вектора $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$ имеет вид

$$\mathbf{x}^2 = e_{ij}x^i x^j. \tag{2.14}$$

Правая часть формулы (2.14) является *квадратичной формой* с коэффициентами e_{ij}.

Поэтому формулу (2.7) для расстояния AB между точками A ($\mathbf{x}$) и B ($\mathbf{y}$) можно переписать в виде

$$AB^2 = e_{ij}(y^i - x^i)(y^j - x^j). \tag{2.15}$$

2.1.7. Ортогонализация. Покажем, что *в евклидовом n-пространстве всегда можно выбрать базис, состоящий*

из единичных и взаимно перпендикулярных векторов $\mathbf{e}_i$, т. е. из векторов $\mathbf{e}_i$, удовлетворяющих условиям

$$|\mathbf{e}_i| = 1$$

и

$$\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j = 0 \text{ при } i \neq j,$$

которые можно переписать при любых i, j в виде

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = e_{ij} = \delta_{ij}. \tag{2.16}$$

В силу аксиомы III,1° в n-пространстве существуют n линейно независимых векторов, которые мы обозначим $\mathbf{f}_i$. Векторы $\mathbf{e}_i$, удовлетворяющие условиям (2.16), можно получить из векторов $\mathbf{f}_i$ с помощью процесса, называемого *ортогонализацией*: за вектор $\mathbf{e}_1$ примем единичный вектор, коллинеарный с вектором $\mathbf{f}_1$; за вектор $\mathbf{e}_2$ примем линейную комбинацию векторов $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$, удовлетворяющую условиям (2.16) при $i = 2$, $j = 1, 2$; за вектор $\mathbf{e}_3$ — линейную комбинацию векторов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ и $\mathbf{f}_3$, удовлетворяющую условиям (2.16) при $i = 3$, $j = 1, 2, 3$; . . .; за вектор $\mathbf{e}_k$ — линейную комбинацию векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$, удовлетворяющую условиям (2.16) при $i = k, j = 1, 2, \ldots, k$. Выполнимость первого шага этого процесса очевидна: за вектор $\mathbf{e}_1$ можно принять любой из двух векторов $\frac{\mathbf{f}_1}{|\mathbf{f}_1|}$ и $-\frac{\mathbf{f}_1}{|\mathbf{f}_1|}$. Для решения вопроса о выполнимости k-го шага этого процесса запишем вектор $\mathbf{e}_k$ в виде

$$\mathbf{e}_k = \lambda_k^1\mathbf{f}_1 + \lambda_k^2\mathbf{f}_2 + \cdots + \lambda_k^k\mathbf{f}_k.$$

Так как векторы $\mathbf{e}_j$ при $j = 1, 2, \ldots, k-1$ являются линейными комбинациями векторов $\mathbf{f}_j$, условия $\mathbf{e}_k\mathbf{e}_j = 0$ равносильны условиям $\mathbf{e}_k\mathbf{f}_j = 0$ при тех же значениях j. Эти последние условия можно записать в виде

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda_k^1\mathbf{f}_1^2 + \lambda_k^2\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 + \cdots + \lambda_k^k\mathbf{f}_1\mathbf{f}_k = 0,\\
\lambda_k^1\mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 + \lambda_k^2\mathbf{f}_2^2 + \cdots + \lambda_k^k\mathbf{f}_2\mathbf{f}_k = 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\lambda_k^1\mathbf{f}_1\mathbf{f}_{k-1} + \lambda_k^2\mathbf{f}_2\mathbf{f}_{k-1} + \cdots + \lambda_k^k\mathbf{f}_{k-1}\mathbf{f}_k = 0.
\end{array}\right\} \tag{2.17}$$

Ниже, в 2.4.6, мы покажем, что определитель

$$\begin{vmatrix} \mathbf{f}_1^2 & \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 & \dots & \mathbf{f}_1\mathbf{f}_{k-1} \\ \mathbf{f}_1\mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_2^2 & \dots & \mathbf{f}_2\mathbf{f}_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{f}_1\mathbf{f}_{k-1} & \mathbf{f}_2\mathbf{f}_{k-1} & \dots & \mathbf{f}_{k-1}^2 \end{vmatrix}$$

в случае линейной независимости векторов $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{k-1}$ отличен от нуля (в 5.2.5 мы покажем, что этот определитель равен квадрату объема параллелепипеда, построенного на этих векторах). Поэтому система линейных уравнений (2.17) обладает решениями $\lambda_k^1, \lambda_k^2, \dots, \lambda_k^k$, не обращающимися одновременно в нуль. Эти решения определены с точностью до общего множителя, который всегда можно подобрать таким образом, чтобы скалярный квадрат $\mathbf{e}_k^2$ был бы равен 1. Поэтому k-й шаг нашего процесса выполним при всех значениях k от 1 до n, и, следовательно, векторный базис $\mathbf{e}_i$, удовлетворяющий условию (2.16), всегда существует.

2.1.8. Прямоугольные координаты. Систему аффинных координат, все базисные векторы которой единичны и взаимно перпендикулярны, т. е. удовлетворяют условиям (2.16), называют *системой прямоугольных координат*.

Скалярное произведение $\mathbf{xy}$ и скалярный квадрат $\mathbf{x}^2$ в прямоугольных координатах имеют вид

$$\mathbf{xy} = \delta_{ij}x^iy^j = x^1y^1 + \dots + x^ny^n \tag{2.18}$$

и

$$\mathbf{x}^2 = \delta_{ij}x^iy^j = (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2, \tag{2.19}$$

а расстояние AB в этих координатах определяется формулой

$$AB^2 = \delta_{ij}(y^i - x^i)(y^j - x^j) = (y^1 - x^1)^2 + \dots + (y^n - x^n)^2. \tag{2.20}$$

2.1.9. Преобразование прямоугольных координат. Закон преобразования прямоугольных координат является

частным случаем закона (1.75) преобразования аффинных координат, т. е. имеет вид

$$x^i = A^i_{i'} x^{i'} + a^i, \tag{2.21}$$

где коэффициенты $A^i_{i'}$ определяются соотношениями (1.14), т. е.

$$\mathbf{e}_{i'} = A^i_{i'} \mathbf{e}_i. \tag{2.22}$$

Так как в случае преобразования прямоугольных координат имеют место и соотношение (2.17) и аналогичное соотношение

$$\mathbf{e}_{i'} \mathbf{e}_{j'} = \delta_{i'j'},$$

мы находим, что

$$\mathbf{e}_{i'} \mathbf{e}_{j'} = \delta_{i'j'} = A^i_{i'} A^j_{j'} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij} A^i_{i'} A^j_{j'},$$

т. е. элементы матрицы $A^i_{i'}$ связаны соотношениями

$$\delta_{ij} A^i_{i'} A^j_{j'} = \delta_{i'j'}. \tag{2.23}$$

Соотношения (2.23) можно переписать в виде

$$A^1_{i'} A^1_{j'} + \cdots + A^n_{i'} A^n_{j'} = \delta_{i'j'}, \tag{2.24}$$

т. е. векторы $\mathbf{e}_{i'} = (A^i_{i'})$, координаты которых равны элементам столбцов матрицы $(A^i_{i'})$ единичны и взаимно перпендикулярны. Так как оба базиса $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_{i'}$ равноправны, элементы матрицы $(A^{i'}_i)$, обратной матрице $(A^i_{i'})$, связаны соотношениями, аналогичными соотношениям (2.23),

$$\delta_{i'j'} A^{i'}_i A^{j'}_j = \delta_{ij}, \tag{2.25}$$

которые можно переписать в виде

$$A^{1'}_i A^{1'}_j + \cdots + A^{n'}_i A^{n'}_j = \delta_{ij}, \tag{2.26}$$

т. е. векторы $\mathbf{e}_i = (A^{i'}_i)$, координаты которых равны элементам столбцов матрицы $(A^{i'}_i)$, также единичны и взаимно перпендикулярны.

Матрицы $(A^i_{i'})$, элементы которых связаны соотношениями (2.23) и (2.24), называются *ортогональными матрицами*. Поэтому *закон преобразования прямоугольных координат имеет вид* (2.21), *где* $(A^i_{j'})$ — *ортогональная матрица*.

Сравнивая соотношения (2.23) и (2.25) с соотношениями

$$A^{i'}_i A^i_{j'} = \delta^{i'}_{j'}, \quad A^i_{i'} A^{i'}_j = \delta^i_j,$$

которыми связаны взаимно обратные матрицы $(A^i_{i'})$ и $(A^{i'}_i)$, мы находим, что для ортогональных матриц

$$A^i_{i'} = A^{i'}_i, \tag{2.27}$$

т. е. *матрица, получаемая транспонированием ортогональной матрицы* (заменой ее строк столбцами, а столбцов — строками), *совпадает с матрицей, обратной этой матрице*.

Отсюда, так как при транспонировании матриц их определители не изменяются, а при переходе к обратной матрице определитель заменяется обратным числом, мы получаем, что определитель ортогональной матрицы совпадает с обратным ему числом, т. е. *определитель ортогональной матрицы равен* $+1$ *или* -1.

§ 2. Евклидовы тензоры

2.2.1. Метрический тензор. Коэффициенты билинейной и квадратной форм (2.14)

$$e_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \tag{2.28}$$

при преобразовании (2.22) векторного базиса преобразуются по закону

$$e_{i'j'} = \mathbf{e}_{i'} \mathbf{e}_{j'} = A^i_{i'} A^j_{j'} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = A^i_{i'} A^j_{j'} e_{ij},$$

т. е. являются координатами тензора 2-й ковариантной валентности.