Матрицы $(A^i_{i'})$, элементы которых связаны соотношениями (2.23) и (2.24), называются *ортогональными матрицами*. Поэтому *закон преобразования прямоугольных координат имеет вид* (2.21), *где* $(A^i_{j'})$ — *ортогональная матрица*.

Сравнивая соотношения (2.23) и (2.25) с соотношениями

$$A^{i'}_i A^i_{j'} = \delta^{i'}_{j'}, \quad A^i_{i'} A^{i'}_j = \delta^i_j,$$

которыми связаны взаимно обратные матрицы $(A^i_{i'})$ и $(A^{i'}_i)$, мы находим, что для ортогональных матриц

$$A^i_{i'} = A^{i'}_i, \tag{2.27}$$

т. е. *матрица, получаемая транспонированием ортогональной матрицы* (заменой ее строк столбцами, а столбцов — строками), *совпадает с матрицей, обратной этой матрице*.

Отсюда, так как при транспонировании матриц их определители не изменяются, а при переходе к обратной матрице определитель заменяется обратным числом, мы получаем, что определитель ортогональной матрицы совпадает с обратным ему числом, т. е. *определитель ортогональной матрицы равен* $+1$ *или* -1.

§ 2. Евклидовы тензоры

2.2.1. Метрический тензор. Коэффициенты билинейной и квадратной форм (2.14)

$$e_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \tag{2.28}$$

при преобразовании (2.22) векторного базиса преобразуются по закону

$$e_{i'j'} = \mathbf{e}_{i'} \mathbf{e}_{j'} = A^i_{i'} A^j_{j'} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = A^i_{i'} A^j_{j'} e_{ij},$$

т. е. являются координатами тензора 2-й ковариантной валентности.

В силу коммутативности скалярного произведения

$$e_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = e_{ji}. \tag{2.29}$$

Наряду с тензором e_{ij} в евклидовом пространстве рассматривают тензор 2-й контравариантной валентности e^{ij}, матрица которого обратна матрице тензора e_{ij}, т. е.

$$e_{jk}e^{ki} = \delta^i_j. \tag{2.30}$$

Тензоры e_{ij} и e^{ij} называют, соответственно, ковариантным и контравариантным *метрическими тензорами.*

Тензор e^{ij} обладает свойством, аналогичным свойству (2.29) тензора e_{ij},

$$e^{ij} = e^{ji}. \tag{2.31}$$

2.2.2. Поднятие и опускание индексов. Если мы свернем тензор, обладающий контравариантными и ковариантными индексами по одному из его контравариантных индексов с метрическим тензором e_{ij}, мы получим тензор, имеющий на одну контравариантную валентность меньше и на одну ковариантную валентность больше, чем данный тензор. Если же мы свернем тот же тензор по одному из его ковариантных индексов с метрическим тензором e^{ij}, мы получим тензор, имеющий на одну ковариантную валентность меньше и на одну контравариантную валентность больше, чем данный тензор. Первая из этих операций называется *опусканием индекса*, вторая — *поднятием индекса*. Например, применяя опускание индекса к тензору v^i, мы получим тензор $v_i = e_{ij}v^j$, применяя поднятие индекса к тензору u_i, мы получим тензор $u^i = e^{ij}v_j$, применяя поднятие индекса к тензору a_{ij}, мы получим тензоры

$$a^i_{\cdot j} = e^{ik}a_{kj}, \quad a_j^{\cdot i} = e^{ik}a_{jk}, \quad a^{ij} = e^{ik}e^{jl}a_{kl}$$

и т. д.

2.2.3. Взаимный базис. Применив поднятие индекса к базисным векторам, которые преобразуются как координаты тензора 1-й ковариантной валентности, мы получим векторы

$$\mathbf{e}^i = e^{ij}\mathbf{e}_j. \tag{2.32}$$

Составляя скалярные произведения векторов $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}^i$, мы находим, что

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}^j = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_k e^{kj} = e_{ik}e^{kj} = \delta_i^j, \tag{2.33}$$

т. е. *каждый вектор* $\mathbf{e}^j$ *перпендикулярен всем векторам* $\mathbf{e}_i$, *кроме* $\mathbf{e}_j$, *а скалярное произведение каждой пары векторов* $\mathbf{e}^j$ *и* $\mathbf{e}_j$ *равно* 1. Так как

$$\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j = e^{ik}e^{jl}\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l = e^{ik}e^{jl}e_{kl} = e^{ik}\delta_k^j = e^{ij},$$

скалярные произведения векторов $\mathbf{e}^i$ *совпадают с координатами метрического тензора* e^{ij}.

Ниже, в **2.4.6**, мы покажем, что определитель Det (e_{ij}) матрицы (e_{ij}), состоящей из скалярных произведений $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, отличен от нуля тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{e}_i$ линейно независимы (в **5.2.5** мы покажем, что этот определитель равен квадрату объема параллелепипеда, построенного на этих векторах). Так как векторы $\mathbf{e}_i$ образуют базис n-пространства, определитель Det (e_{ij}) отличен от нуля, откуда следует, что отличен от нуля и определитель Det (e^{ij}) матрицы $(e^{ij}) = (e_{ij})^{-1}$, равный обратной величине Det (e_{ij}). Поэтому векторы $\mathbf{e}^i$ также линейно независимы и образуют базис, называемый *взаимным базисом* по отношению к базису $\mathbf{e}_i$.

Заметим, что так как в случае прямоугольных координат базисные векторы $\mathbf{e}_i$ связаны условием (2.17), в случае прямоугольных координат векторы $\mathbf{e}^i$ взаимного базиса совпадают с соответственными базисными векторами $\mathbf{e}_i$.

2.2.4. Вычисление координат векторов. Знание векторов $\mathbf{e}^i$ взаимного базиса позволяет весьма просто вычислять координаты x^i всякого вектора $\mathbf{x}$ по отношению к базису $\mathbf{e}_i$. В самом деле, составляя скалярные произведения

$$\mathbf{x}\mathbf{e}^i = x^j\mathbf{e}_j\mathbf{e}^i = x^j\delta_j^i = x^i, \tag{2.34}$$

мы находим, что *координаты* x^i *вектора* $\mathbf{x}$ *равны скалярным произведениям этого вектора на соответственные векторы взаимного базиса.*

В частности, в случае прямоугольных координат, когда векторы $\mathbf{e}^i$ совпадают с векторами $\mathbf{e}_i$, координаты x^i равны скалярным произведениям $\mathbf{x}\mathbf{e}_i$.

2.2.5. Ковариантные координаты векторов. Так как векторы $\mathbf{e}^i$ образуют базис, всякий вектор $\mathbf{x}$ можно представить также в виде

$$\mathbf{x} = x_i\mathbf{e}^i, \tag{2.35}$$

причем

$$\mathbf{x}\mathbf{e}_i = x_j\mathbf{e}^j\mathbf{e}_i = x_j\delta_i^j = x_i. \tag{2.36}$$

Координаты x_i, составляющие тензор 1-й ковариантной валентности, называются *ковариантными координатами* вектора.

Поэтому в евклидовом пространстве контравариантные и ковариантные векторы отождествляются и можно говорить только о контравариантных координатах x^i и ковариантных координатах x_i одного и того же вектора, переводимых друг в друга с помощью метрического тензора, с помощью которого производится опускание и поднятие индексов любых тензоров.

§ 3. Евклидовы операторы

2.3.1. Вычисление элементов матриц операторов. Знание векторов $\mathbf{e}^i$ взаимного базиса евклидова пространства позволяет также весьма просто вычислить элементы a_j^i матрицы всякого линейного оператора в евклидовом пространстве по отношению к базису $\mathbf{e}_i$. В самом деле, в силу определения матрицы (a_j^i)

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_j = a_j^i\mathbf{e}_i,$$

т. е. элементы матрицы (a_j^i) являются координатами векторов $\mathbf{a}_j = \mathbf{A}\mathbf{e}_j$, и, следовательно, применяя формулу (2.34), мы получим, что

$$a_j^i = \mathbf{a}_j\mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i\mathbf{A}\mathbf{e}_j. \tag{2.37}$$

2.3.2. Операторное произведение векторов. В евклидовом пространстве можно определить операцию, ста-