Совершенно так же, как для квадратных операторов в евклидовом пространстве, доказывается, что всякий прямоугольный оператор, отображающий векторы евклидова $n$-пространства на векторы $m$-пространства, может быть представлен в виде суммы $n$ операторных произведений (2.40), где векторы $\mathbf{e}^i$ — векторы $n$-пространства, а векторы $\mathbf{a}_i = \mathbf{A}\mathbf{e}_i$ — векторы $m$-пространства.

Поэтому всякому прямоугольному оператору $\mathbf{A} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}^i$, отображающему векторы $n$-пространства на векторы $m$-пространства, можно поставить в соответствие транспонированный оператор (2.42), отображающий векторы $m$-пространства на векторы $n$-пространства.

Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — два прямоугольных оператора, отображающих векторы $n$-пространства на векторы $m$-пространства, то произведения $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ — квадратные операторы, первый из которых является оператором $n$-пространства, а второй — оператором $m$-пространства. В случае $n = 1$, когда операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ можно рассматривать как векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, произведение $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}$ является числом, совпадающим со скалярным произведением $\mathbf{ab}$, а оператор $\mathbf{A}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ является оператором $n$-пространства, совпадающим с операторным произведением $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

## § 4. Ориентированное пространство

**2.4.1. Ориентация пространства.** Будем считать аффинное или евклидово $n$-пространство *ориентированным*, если в нем задан кососимметрический тензор $n$-й валентности $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, который мы будем называть *ориентационным тензором*. Если свертка ориентационного тензора с $n$ векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$

$$k = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_n^{i_n} \tag{2.63}$$

является положительным числом, будем называть систему $n$ векторов *правой*, если эта свертка является отрицательным числом, будем называть систему $n$ векторов *левой* [6]. Как мы указывали, все координаты тензора $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ равны числу $\varepsilon = \varepsilon_{12 \ldots n}$ или $-\varepsilon$, а число (2.63) равно произведению числа $\varepsilon$ на определитель матрицы

$(a^i_j)$. Поэтому число (2.63) отлично от нуля только в случае линейной независимости векторов $\mathbf{a}_i$ и все векторы как правых, так и левых систем векторов линейно независимы.

Это определение ориентации пространства имеет смысл только при $n > 1$. При $n = 1$, когда все векторы пространства коллинеарны, ориентация пространства задается указанием одного ненулевого вектора $\mathbf{e}$ и всякий вектор $\mathbf{a} = a\mathbf{e}$ считается «направленным в правую сторону», если $a > 0$, и — «направленным в левую сторону», если $a < 0$. При $n = 2$ говорят о *правых и левых парах векторов* (на обычной плоскости пара векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ считается правой, если переход от ориентированного отрезка $\overline{OA}$, определяющего вектор $\mathbf{a}_1$, к ориентированному отрезку $\overline{OB}$, определяющему вектор $\mathbf{a}_2$, совершается против часовой стрелки). При $n = 3$ говорят о *правых* и *левых тройках векторов* (в обычном пространстве тройка векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ считается правой, если из конца ориентированного отрезка $\overline{OC}$, определяющего вектор $\mathbf{a}_3$, переход от ориентированного отрезка $\overline{OA}$, определяющего вектор $\mathbf{a}_1$, к ориентированному отрезку $\overline{OB}$, определяющему вектор $\mathbf{a}_2$, виден совершающимся против часовой стрелки или, что равносильно этому, правый винт, ввинчивающийся от отрезка $\overline{OA}$ к отрезку $\overline{OB}$, смещается в направлении отрезка $\overline{OC}$).

**2.4.2. Косое произведение.** Обычно за ориентационный тензор принимается тензор $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, у которого число $\varepsilon$ связано с метрическим тензором $e_{ij}$ соотношением

$$\varepsilon^2 = \operatorname{Det}(e_{ij}), \tag{2.64}$$

в частности, в случае прямоугольных координат $\varepsilon = 1$.

Таким образом:

1°. Каждым $n$ векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ поставлено в соответствие определенное число (2.63), которое мы будем обозначать

$$k = \{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n\} \tag{2.65}$$

и называть *косым произведением* [7].

Из определения косого произведения непосредственно следует, что:

2°. Косое произведение не изменяется при четной перестановке векторов и умножается на —1 при нечетной перестановке векторов.

3°. Косое произведение *дистрибутивно* относительно сложения векторов, т. е.

$$\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1} \ (\mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n)\} = \\ = \{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{a}_n\} + \{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{b}_n\}. \qquad (2.66)$$

4°. Вещественный множитель можно вынести за знак косого произведения, т. е.

$$\{(k\mathbf{a}_1)\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n\} = k\ \{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n\}. \qquad (2.67)$$

Из свойства 2° вытекает, что *косое произведение с двумя равными сомножителями равно* 0: такое произведение не изменяется при перестановке этих сомножителей, а в силу свойства 2° при такой перестановке оно должно изменять знак.

Из свойств косого произведения вытекает также, что *необходимым и достаточным условием линейной независимости $n$ векторов $n$-пространства является отличие косого произведения этих векторов от нуля.* В самом деле, если $n$ векторов линейно независимы, то они составляют правую или левую систему $n$ векторов и их косое произведение, соответственно, больше или меньше нуля. Если же $n$ векторов линейно зависимы, то, оставляя в стороне случай, когда все эти векторы равны $\mathbf{o}$, вследствие чего все их координаты и косое произведение равны 0, мы можем считать, что хотя бы один из этих векторов является линейной комбинацией остальных. Не нарушая общности, можно считать, что $\mathbf{a}_n = k^i\mathbf{a}_i \ (i < n)$. Тогда в силу свойств 3° и 4°

$$\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n\} = \{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1} \ (k^i\mathbf{a}_i)\} = \\ = k^i\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \ldots \mathbf{a}_{n-1}\ \mathbf{a}_i\},$$

но все косые произведения $\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{a}_i\}$ при $i < n$ равны 0.

Определение косого произведения имеет смысл при $n > 1$. Однако целесообразно и в ориентированном

1-пространстве ввести аналогичное обозначение для вектора $\mathbf{a} = a\mathbf{c}$, обозначая $\{\mathbf{a}\} = a$, т. е. $\{\mathbf{a}\} = |\mathbf{a}|$, если вектор $\mathbf{a}$ направлен в правую сторону, и $\{\mathbf{a}\} = -|\mathbf{a}|$, если вектор $\mathbf{a}$ направлен в левую сторону; в обычном пространстве число $\{\mathbf{a}\}$ совпадает с *относительной длиной отрезка*.

При $n = 2$ для косого произведения $\{\mathbf{ab}\}$ свойство 2° сводится к *антикоммутативности*

$$\{\mathbf{ab}\} = -\{\mathbf{ba}\}. \tag{2.68}$$

При $n = 3$ для косого произведения $\{\mathbf{abc}\}$, обычно называемого *смешанным произведением*, свойство 2° имеет вид

$$\{\mathbf{abc}\} = \{\mathbf{bca}\} = \{\mathbf{cab}\} = -\{\mathbf{acb}\} = \\ = -\{\mathbf{bac}\} = -\{\mathbf{cba}\}. \tag{2.69}$$

**2.4.3. Векторное произведение.** Свертывая ориентационный тензор с $n-1$ векторами, получим вектор; поднимая индекс этого вектора, мы можем записать его в виде

$$b^i = e^{ij}\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} j}\, a_1^{i_1} a_2^{i_2} \ldots a_{n-1}^{i_{n-1}}. \tag{2.70}$$

Таким образом:

1°. Каждым $n-1$ векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ поставлен в соответствие определенный вектор (2.70), который мы будем обозначать

$$\mathbf{b} = [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}] \tag{2.71}$$

и называть *векторным произведением* [8].

Из определения векторного произведения непосредственно следует, что:

2°. Векторное произведение не изменяется при четной перестановке векторов и умножается на $-1$ при нечетной перестановке.

3°. Векторное произведение *дистрибутивно* относительно сложения векторов, т. е.

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-2}\,(\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{b}_{n-1})] = \\ = [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-2}\ \mathbf{a}_{n-1}] + [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-2}\ \mathbf{b}_{n-1}]. \tag{2.72}$$

4°. Вещественный множитель можно вынести за знак векторного произведения, т. е.

$$[(k\mathbf{a}_1)\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}] = k[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}]. \qquad (2.73)$$

Покажем также, что:

5°. Смешанное произведение равно скалярному произведению векторного произведения $n-1$ векторов на $n$-й вектор

$$\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n\} = [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}]\mathbf{a}_n. \qquad (2.74)$$

В самом деле,

$$[\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_{n-1}]\,\mathbf{a}_n = e_{ii_n}(e^{ij}\varepsilon_{i_1i_2\ldots i_{n-1}j}a_1^{i_1}a_2^{i_2} \ldots a_{n-1}^{i_{n-1}})\,a_n^{i_n} =$$
$$= \varepsilon_{i_1i_2\ldots i_{n-1}i_n}a_1^{i_1}a_2^{i_2} \ldots a_{n-1}^{i_{n-1}}a_n^{i_n} = \{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{a}_n\}.$$

Отсюда вытекает, что *векторное произведение перпендикулярно каждому из сомножителей*: заменяя в (2.74) $\mathbf{a}_n$ на $\mathbf{a}_i$ $(i < n)$, мы получаем, что

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}]\mathbf{a}_i = \{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}\ \mathbf{a}_i\} = 0.$$

*Векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ *и* $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}]$ *в случае, когда* $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}] \neq 0$, *образуют правую систему*, так как в этом случае

$$\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}\ [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}]\} = [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}]^2 > 0.$$

Из свойства 2° вытекает, что *векторное произведение с двумя равными сомножителями равно* 0. Из свойств векторного произведения вытекает также, что *необходимым и достаточным условием линейной независимости* $n-1$ *векторов* $n$*-пространства является отличие векторного произведения этих векторов от нуля.* Доказательства этих свойств аналогичны доказательствам аналогичных свойств косого произведения.

Определение векторного произведения имеет смысл при $n > 2$. В ориентированном 2-пространстве определение векторного произведения приводит к вектору $b^i = e^{ij}\,\varepsilon_{kj}\,a^k$, который естественно обозначать $\mathbf{b} = [\mathbf{a}]$. Вектор $[\mathbf{a}]$ получен из вектора $\mathbf{a}$ *поворотом на прямой угол* в направлении ориентации плоскости. При $n = 3$ для векторного произведения $[\mathbf{ab}]$ свойство 2° имеет вид

$$[\mathbf{ab}] = -[\mathbf{ba}]. \qquad (2.75)$$

**2.4.4. Косое произведение в координатах.** Косое произведение (2.65) записывается в координатах в виде (2.63). Так как правая часть в силу (1.35) равна $\varepsilon \operatorname{Det}(a^i_j)$, формулу (2.63) можно переписать в виде

$$\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n\} = \varepsilon \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{vmatrix}, \tag{2.76}$$

где $\varepsilon^2 = \operatorname{Det}(e_{ij})$. В случае прямоугольных координат, когда $\varepsilon = 1$, формула (2.76) принимает вид

$$\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n\} = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{vmatrix}, \tag{2.77}$$

т. е. *в прямоугольных координатах косое произведение $n$ векторов совпадает с определителем, составленным из координат этих векторов.*

**2.4.5. Векторное произведение в координатах.** Векторное произведение (2.71) записывается в координатах в виде (2.70). Поэтому формулу (2.71) можно переписать в виде

$$\mathbf{b} = b^i\mathbf{e}_i = e^{ij}\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} j} a^{i_1}_1 a^{i_2}_2 \ldots a^{i_{n-1}}_{n-1}\mathbf{e}_i.$$

Поэтому *в случае прямоугольных координат, когда* $e^{ij} = \delta^{ij}$, *а* $\varepsilon = 1$, *векторное произведение $n-1$ векторов равно определителю, составленному из координат этих векторов и из базисных векторов*:

$$\mathbf{b} = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_{n-1} & \mathbf{e}_1 \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_{n-1} & \mathbf{e}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_{n-1} & \mathbf{e}_n \end{vmatrix}. \tag{2.78}$$

**2.4.6. Связь косого произведения со скалярным.** Перемножая косые произведения $\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n\}$ и $\{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_n\}$, записываемые в прямоугольных координатах в виде определителей по формуле (2.77) и транспонируя матрицу первого из этих определителей, мы получаем формулу

$$\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n\}\{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_n\} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n^1 & a_n^2 & & a_n^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \ldots & b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \ldots & b_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1^n & b_2^n & \ldots & b_n^n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{ij}a_1^ib_1^j & \delta_{ij}a_1^ib_2^j & \ldots & \delta_{ij}a_1^ib_n^j \\ \delta_{ij}a_2^ib_1^j & \delta_{ij}a_2^ib_2^j & \ldots & \delta_{ij}a_2^ib_n^j \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{ij}a_n^ib_1^j & \delta_{ij}a_n^ib_2^j & \ldots & \delta_{ij}a_n^ib_n^j \end{vmatrix}, \quad (2.79)$$

т. е.

$$\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n\}\{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_n\} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{a}_n\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_n\mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n\mathbf{b}_n \end{vmatrix}. \quad (2.80)$$

В частности, в случае, когда $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$,

$$\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n\}^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1^2 & \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_1\mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^2 & \ldots & \mathbf{a}_2\mathbf{a}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{a}_n\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_n\mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n^2 \end{vmatrix}. \quad (2.81)$$

Определитель (2.81) называют *определителем Грама* [9].

Формула (2.81) показывает, что определитель Грама положителен тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно независимы.

Заметим, что определитель $(k-1)$-го порядка, состоящий из коэффициентов системы линейных уравнений (2.17) при $\lambda_k^1, \lambda_k^2, \ldots, \lambda_k^{k-1}$, и определители $\operatorname{Det}(e_{ij})$ и $\operatorname{Det}(e^{ij})$ метрических тензоров $e_{ij}$ и $e^{ij}$ являются определителями Грама, построенными, соответственно, на векторах $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{k-1}$ и на базисных векторах $\mathbf{e}_i$ или $\mathbf{e}^i$.

**2.4.7. Связь векторного произведения со скалярным.** Полагая в формуле (2.80) $\mathbf{a}_n = [\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_{n-1}]$ и выбирая $\mathbf{b}_n$ так, чтобы произведение $\{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_n\}$ не обращалось в нуль, мы в силу того, что все произведения $[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_{n-1}]\,\mathbf{b}_i$ при $i < n$ равны нулю, получаем, что

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}]\,[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_{n-1}]\,\{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_n\} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_{n-1} & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_{n-1} & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{b}_{n-1} & \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{b}_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_n\} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_{n-1} \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{b}_{n-1} \end{vmatrix} \{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_n\},$$

и, сокращая на $\{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_n\} \neq 0$, мы получаем, что скалярное произведение двух векторных произведений имеет вид

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}]\,[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 \ldots \mathbf{b}_{n-1}] =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_{n-1} \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{b}_{n-1} \end{vmatrix}. \qquad (2.82)$$

Формулу (2.82) называют *формулой Лагранжа*[10]. В частности, при $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$ эта формула принимает вид

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}]^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1^2 & \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_1\mathbf{a}_{n-1} \\ \mathbf{a}_2\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^2 & \ldots & \mathbf{a}_2\mathbf{a}_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_{n-1}\mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_{n-1}^2 \end{vmatrix}, \qquad (2.83)$$

т. е. *модуль векторного произведения* $[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}]$ *равен абсолютной величине косого произведения тех же векторов в определяемом ими линейном подпространстве.*

При $n = 3$ формула (2.82) имеет вид

$$[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]\,[\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 \end{vmatrix},$$

что можно переписать в виде

$$\{[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\} = (\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_2\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_1)\mathbf{b}_2.$$

Так как вектор $\mathbf{b}_2$ — произвольный, его можно отбросить. Поэтому, обозначая вектор $\mathbf{b}_1$ через $\mathbf{a}_3$, мы получаем формулу *двойного векторного произведения*

$$[[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2]\mathbf{a}_3] = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2\mathbf{a}_3. \qquad (2.84)$$

Полагая в формуле (2.84) $\mathbf{a}_3 = [\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]$, из формулы (2.84) получаем формулу для *векторного произведения двух векторных произведений*

$$[[\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2][\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2]] = \{\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\} \cdot \mathbf{a}_2 - \{\mathbf{a}_2\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\} \cdot \mathbf{a}_1. \qquad (2.85)$$