Так как скалярные произведения $\overline{MN}\mathbf{a}$ и $\overline{MN}\mathbf{b}$ равны нулю, квадрат расстояния $\omega = MN$ можно записать в виде

$$\omega^2 = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{a}t - \mathbf{b}u)^2 = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{a}t - \mathbf{b}u)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2),$$

где t и u равны их значениям (3.18). Поэтому кратчайшее расстояние между прямыми l и m определяется соотношением

$$\omega^2 = \frac{\begin{vmatrix} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 & \mathbf{a}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) & \mathbf{b}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ \mathbf{a}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) & \mathbf{a}^2 & \mathbf{ab} \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) & \mathbf{ab} & \mathbf{b}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a}^2 & \mathbf{ab} \\ \mathbf{ab} & \mathbf{b}^2 \end{vmatrix}}. \qquad (3.20)$$

При $n = 3$ числитель и знаменатель выражения (3.20) являются, соответственно, квадратом косого произведения $\{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\mathbf{ab}\}$ и скалярным квадратом векторного произведения $[\mathbf{ab}]$, поэтому в этом случае формулу (3.20) можно переписать в виде

$$\omega = \frac{|\{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)\,\mathbf{ab}\}|}{|[\mathbf{ab}]|}.$$

3.1.11. Общий перпендикуляр двух прямых. Требуя, чтобы отрезок, соединяющий произвольные точки двух данных прямых (3.13), был перпендикулярен направляющим векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ обеих прямых, мы получим условия (3.17), откуда находим, что значения t и u, удовлетворяющие этому условию, совпадают со значениями (3.18). Это совпадение показывает, что *основания общего перпендикуляра двух прямых совпадают с теми точками этих прямых, расстояние между которыми минимально.*

§ 2. Геометрия плоскостей

3.2.1 Плоскости. Будем называть *m-мерной плоскостью* аффинного или евклидова n-пространства, или, короче, *m-плоскостью* этого пространства множество всех точек этого пространства, получаемых из одной его точки всеми переносами, векторы которых компланарны и принадлежат одному линейному m-пространству. Так как векторы этих переносов имеют вид $\mathbf{a}_a t^a$, где t_a принимают

все вещественные значения, радиус-векторы точек m-плоскости имеют вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_a t^a. \tag{3.21}$$

Уравнение (3.21) называется *векторным уравнением m-плоскости*. Это уравнение является частным случаем векторного уравнения произвольной *m-мерной поверхности* или, короче, *m-поверхности*

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(t^1, t^2, \ldots, t^m), \tag{3.22}$$

где t^a принимают все вещественные значения или значения из некоторых отрезков числовой прямой. Аргументы t^a функций (3.21) и (3.22) называются *параметрами* m-поверхности.

Векторы $\mathbf{a}_a$ называются *направляющими векторами* m-плоскости. Часто мы будем предполагать, что векторы $\mathbf{a}_a$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы, т. е.

$$\mathbf{a}_a \mathbf{a}_b = \delta_{ab}. \tag{3.23}$$

Нетрудно проверить, что *m-плоскости аффинного или евклидова пространства являются, соответственно, аффинным или евклидовым m-пространством*; при этом параметры t^a можно рассматривать как аффинные координаты точек этого m-пространства. Прямые линии можно рассматривать как 1-плоскости. Целесообразно рассматривать также *точки* как 0-плоскости.

Две различные плоскости, получающиеся из различных точек одними и теми же переносами, называются *параллельными плоскостями*. Так, например, две различные m-плоскости с векторными уравнениями

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_a t^a \text{ и } \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_a t^a,$$

проходящие через точки $M_1(\mathbf{x}_1)$ и $M_2(\mathbf{x})$, параллельны.

3.2.2. Координатные уравнения m-плоскости. Уравнение (3.21) равносильно n координатным уравнениям

$$x^i = x^i_0 + a^i_a t^a. \tag{3.24}$$

Уравнения (3.24) называют *параметрическими уравнениями m-плоскости в координатах*. Уравнения (3.24)

являются частными случаями координатных уравнений

$$x^i = f^i(t^1, \ldots, t^m) \tag{3.25}$$

произвольной m-поверхности, равносильных векторному уравнению (3.22).

3.2.3. Уравнения m-плоскости по $m+1$ точкам. Если заданы $m+1$ точек $M_0(\mathbf{x}_0), M_1(\mathbf{x}_1), \ldots, M_m(\mathbf{x}_m)$ и векторы $\overline{M_0M_a} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_0$ линейно независимы, то эти точки определяют единственную m-плоскость, проходящую через них: в этом случае за направляющие векторы этой плоскости можно принять векторы $\overline{M_0M_a}$ и векторное уравнение m-плоскости может быть записано в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_0)t^a. \tag{3.26}$$

Будем называть m-плоскость, определяемую точками $M_0, M_1, \ldots, M_m$, *m-плоскостью* $M_0 M_1 \ldots M_m$.

3.2.4. Случай $m = n - 1$. В дальнейшем мы будем часто иметь дело с m-поверхностями и m-плоскостями при $m = n - 1$. Поэтому в дальнейшем, говоря «поверхность n-пространства» и «плоскость n-пространства», мы будем иметь в виду $(n-1)$-поверхность и $(n-1)$-плоскость этого пространства. Часто поверхность и плоскость называют соответственно гиперповерхностью и гиперплоскостью. Векторные уравнения поверхности и плоскости имеют соответственно вид (3.22) и (3.21) при $m = n - 1$, их координатные уравнения имеют соответственно вид (3.25) и (3.24) при $m = n - 1$.

Поверхность можно задать одним координатным уравнением

$$F(x^1, \ldots, x^n) = 0, \tag{3.27}$$

если координаты x^i, удовлетворяющие этому уравнению, можно представить как функции $n-1$ параметров $t^1, t^2, \ldots, t^{n-1}$; в этом случае поверхность можно задать и равносильным уравнению (3.27) векторным уравнением

$$F(\mathbf{x}) = 0. \tag{3.28}$$

3.2.5. Векторное уравнение плоскости. Если мы умножим обе части уравнения (3.21) скалярно на вектор $\mathbf{u}$,

перпендикулярный всем векторам $\mathbf{a}_a$, то, так как $\mathbf{u}\mathbf{a}_a = 0$, для всех векторов $\mathbf{a}_a$ мы получим уравнение

$$\mathbf{u}\mathbf{x} = \mathbf{u}\mathbf{x}_0$$

или, если мы обозначим $\mathbf{u}\mathbf{x}_0 = -v$,

$$\mathbf{u}\mathbf{x} + v = 0. \tag{3.29}$$

Вектор $\mathbf{u}$, перпендикулярный ко всем векторам $\mathbf{a}_a$ и, следовательно, ко всем векторам, направленным по плоскости, называется *нормальным вектором* плоскости[2]. Часто за вектор $\mathbf{u}$ принимают единичный вектор.

Уравнение (3.29) называется *векторным уравнением плоскости*.

3.2.6. Координатное уравнение плоскости. Если в n-пространстве введены аффинные координаты с базисом $\mathbf{e}_i$ и взаимным базисом $\mathbf{e}^i$ и если $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{u} = u_i\mathbf{e}^i$, то уравнение (3.29) может быть переписано в аффинных координатах в виде

$$u_i x^i + v = 0. \tag{3.30}$$

В случае прямоугольных координат, когда $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$, координаты u_i совпадают с координатами вектора $\mathbf{u}$ по отношению к базису $\mathbf{e}_i$.

3.2.7. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору. Если задана точка M_0 $(\mathbf{x}_0)$ плоскости и ее нормальный вектор $\mathbf{u}$, то, так как вектор $\mathbf{x}_0$ удовлетворяет уравнению (3.29) плоскости, мы получаем, что

$$\mathbf{u}\mathbf{x}_0 + v = 0.$$

Вычитая обе части этого равенства из соответственных частей уравнения (3.29), мы получаем уравнение плоскости в виде

$$\mathbf{u}\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0. \tag{3.31}$$

Это уравнение равносильно координатному уравнению

$$u_i(x^i - x_0^i) = 0. \tag{3.32}$$

3.2.8. Основная теорема о плоскости. Уравнение (3.30) является линейным уравнением, т. е. уравнением первой

степени, и, таким образом, мы показали, что *уравнение всякой плоскости в аффинных координатах является линейным уравнением*. Это утверждение является первой частью *основной теоремы о плоскости: уравнение всякой плоскости в аффинных координатах является линейным уравнением и всякое линейное уравнение в аффинных координатах является уравнением плоскости*.

Для доказательства второй части этой теоремы заметим, что если нам дано уравнение (3.30) и если мы положим $\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{u} = u_i\mathbf{e}^i$, то уравнение (3.30) можно будет переписать в векторной форме в виде (3.29). Если теперь M_0 $(\mathbf{x}_0)$ — произвольная точка, удовлетворяющая уравнению (3.29), т. е. $\mathbf{u}\mathbf{x}_0 + v = 0$, то, вычитая обе части этого равенства из соответственных частей равенства (3.29), мы получим уравнение (3.31). Если мы обозначим $n - 1$ линейно независимых векторов, перпендикулярных вектору $\mathbf{u}$, через $\mathbf{a}_a$, то вектор $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_a$, т. е. вектор $\mathbf{x}$ удовлетворяет уравнению (3.21) при $m = n - 1$.

3.2.9. Уравнение плоскости по точке и направляющим векторам. Если задана точка M_0 $(\mathbf{x}_0)$ плоскости и ее направляющие векторы $\mathbf{a}_a$, то за нормальный вектор плоскости может быть принято векторное произведение всех векторов $\mathbf{a}_a$, т. е.

$$\mathbf{u} = [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}]. \tag{3.33}$$

Поэтому, подставляя это значение вектора $\mathbf{u}$ в уравнение (3.31), мы получим уравнение плоскости в виде равенства нулю косого произведения

$$\{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_{n-1}\} = 0. \tag{3.34}$$

Уравнение (3.34) можно переписать в виде равенства нулю определителя

$$\begin{vmatrix} x^1 - x_0^1 & a_1^1 \ldots a_{n-1}^1 \\ x^2 - x_0^2 & a_1^2 \ldots a_{n-1}^2 \\ \ldots & \ldots \\ x^n - x_0^n & a_1^n \ldots a_{n-1}^n \end{vmatrix} = 0. \tag{3.35}$$

3.2.10. Уравнение плоскости по n точкам. Плоскость определяется n точками $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$, для которых векторы $\overline{M_0M_a} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_0$ линейно независимы. Поэтому за нормальный вектор плоскости может быть принято векторное произведение всех векторов $\overline{M_0M_a}$, т. е.

$$\mathbf{u} = [(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) \ldots (\mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}_0)]. \qquad (3.36)$$

Поэтому, подставляя это значение вектора $\mathbf{u}$ в уравнение (3.31), мы получим уравнение плоскости в виде равенства нулю косого произведения

$$\{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) \ldots (\mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\} = 0. \qquad (3.37)$$

Уравнение (3.37) можно переписать в координатах в виде равенства нулю определителя

$$\begin{vmatrix} x_1^1 - x_0^1 & \ldots & x_{n-1}^1 - x_0^1 & x^1 - x_0^1 \\ x_1^2 - x_0^2 & \ldots & x_{n-1}^2 - x_0^2 & x^2 - x_0^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^n - x_0^n & \ldots & x_{n-1}^n - x_0^n & x^n - x_0^n \end{vmatrix} = 0. \qquad (3.38)$$

Условие (3.38) можно переписать также в виде

$$\begin{vmatrix} x_0^1 & x_1^1 & \ldots & x_{n-1}^1 & x^1 \\ x_0^2 & x_1^2 & \ldots & x_{n-1}^2 & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_0^n & x_1^n & \ldots & x_{n-1}^n & x^n \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (3.39)$$

так как, вычитая из элементов последних n столбцов этого определителя элементы первого столбца, а затем раскладывая полученный определитель по элементам

последней строки, мы получим

$$\begin{vmatrix} x_0^1 & x_1^1 - x_0^1 \ldots x_{n-1}^1 - x_0^1 & x^1 - x_0^1 \\ x_0^2 & x_1^2 - x_0^2 \ldots x_{n-1}^2 - x_n^2 & x^2 - x_0^2 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ x_0^n & x_1^n - x_0^n \ldots x_{n-1}^n - x_0^n & x^n - x_0^n \\ 1 & 0 \quad \ldots \quad 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n \begin{vmatrix} x_1^1 - x_0^1 \ldots x_{n-1}^1 - x_0^1 & x^1 - x_0^1 \\ x_1^2 - x_0^2 \ldots x_{n-1}^2 - x_0^2 & x^2 - x_0^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ x_1^n - x_0^n \ldots x_{n-1}^n - x_0^n & x^n - x_0^n \end{vmatrix}.$$

3.2.11. Условие принадлежности $n+1$ точек одной плоскости. Если заданы $n+1$ точек $M_0(\mathbf{x}_0)$, $M_1(\mathbf{x}_1)$,... ..., $M_n(\mathbf{x}_n)$, *то необходимым и достаточным условием того, что точки M_0, M_1, ..., M_n лежат на одной плоскости, является линейная зависимость векторов $\overline{M_0M_i}$.* В самом деле, если точки M_0, M_1, ..., M_n лежат на одной плоскости, то n векторов $\overline{M_0M_i}$ являются линейными комбинациями $n-1$ направляющих векторов $\mathbf{a}_a$ и поэтому линейно зависимы. Обратно, если эти векторы линейно зависимы, существует вектор $\mathbf{u}$, перпендикулярный всем этим векторам, и все точки M_0, M_1, ..., M_n лежат на плоскости (3.31), проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\mathbf{u}$.

Подставляя в уравнения (3.37), (3.38) и (3.39) вместо вектора $\mathbf{x}$ и координат x^i вектор $\mathbf{x}_n$ и координаты x_n^i, мы можем записать условие принадлежности $n+1$ точек одной плоскости в виде равенства нулю косого произведения

$$\{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0) \ldots (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0)\} = 0 \qquad (3.40)$$

и в виде равенства нулю определителей

$$\begin{vmatrix} x_1^1 - x_0^1 & x_2^1 - x_0^1 \ldots x_n^1 - x_0^1 \\ x_1^2 - x_0^2 & x_2^2 - x_0^2 \ldots x_n^2 - x_0^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ x_1^n - x_0^n & x_2^n - x_0^n \ldots x_n^n - x_0^n \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.41)$$

или

$$\begin{vmatrix} x_0^1 & x_1^1 \ldots x_n^1 \\ x_0^2 & x_1^2 \ldots x_n^2 \\ \ldots & \ldots \\ x_0^n & x_1^n \ldots x_n^n \\ 1 & 1 \ldots 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.42}$$

3.2.12. Угол между плоскостями. Будем называть *углом между* двумя *плоскостями* тот из углов между нормальными векторами этих плоскостей, который $\leqslant \frac{\pi}{2}$. Поэтому, если нормальные векторы двух плоскостей — векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, угол φ между этими плоскостями — тот из углов φ_1 и φ_2, определяющихся соотношением

$$\cos\varphi_1 = \frac{\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}, \quad \cos\varphi_2 = \frac{-\mathbf{uv}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|},$$

который $\leqslant \frac{\pi}{2}$. Поэтому угол φ между плоскостями с нормальными векторами $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ определяется соотношением

$$\cos\varphi = \frac{|\mathbf{uv}|}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}. \tag{3.43}$$

3.2.13. Расстояние от точки до плоскости. Будем называть *расстоянием от точки до m-плоскости* минимальное расстояние от данной точки до точек m-плоскости. Так как минимальное расстояние от данной точки до точек всякой прямой, лежащей на m-плоскости, является расстоянием от данной точки до основания перпендикуляра, опущенного из нее на эту прямую, *расстояние от точки до m-плоскости равно расстоянию от этой точки до основания перпендикуляра, опущенного из нее на m-плоскость.*

Найдем расстояние от точки $\widetilde{M}$ $(\widetilde{\mathbf{x}})$ до плоскости (3.29). Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $\widetilde{M}$ на плоскость, имеет вид

$$\mathbf{x} = \widetilde{\mathbf{x}} + \mathbf{u}t. \tag{3.44}$$

Основание этого перпендикуляра соответствует значению t, для которого вектор (3.44) удовлетворяет

уравнению (3.29), т. е. это значение t равно

$$t = -\frac{\mathbf{u}\tilde{\mathbf{x}} + v}{\mathbf{u}^2}. \tag{3.45}$$

Так как расстояние от точки $\tilde{M}$ $(\tilde{\mathbf{x}})$ до произвольной точки плоскости (3.44) равно $|\mathbf{u}t|$, расстояние от точки $\tilde{M}$ до основания перпендикуляра равно значению $|\mathbf{u}t|$, где t имеет значение (3.45), и, следовательно, *расстояние от точки $\tilde{M}$ до плоскости* (3.29) *равно*

$$\omega = \frac{|\mathbf{u}\tilde{\mathbf{x}} + v|}{|\mathbf{u}|}. \tag{3.46}$$

В частности, расстояние плоскости от начала $(\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{o})$ равно

$$\omega = \frac{|v|}{|\mathbf{u}|}. \tag{3.47}$$

В случае, когда нормальный вектор — единичный, формулу (3.46) можно переписать в виде

$$\omega = |\mathbf{u}\tilde{\mathbf{x}} + v|, \tag{3.48}$$

а формулу (3.47) — в виде $\omega = |v|$.

Таким образом, *в случае, когда нормальный вектор — единичный, абсолютная величина свободного члена v равна расстоянию плоскости от начала.*

3.2.14. Отражение от плоскости. *Отражением точки M от m-плоскости* называется переход от точки M $(\mathbf{x})$ к такой точке M' $('\mathbf{x})$, что прямая MM' пересекает m-плоскость под прямым углом, и точка пересечения прямой MM' и m-плоскости является серединой отрезка MM'. Поэтому в случае $m = n - 1$ точка пересечения N $(\mathbf{y})$ является основанием перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость, т. е.

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{u}\frac{\mathbf{u}\mathbf{x} + v}{\mathbf{u}^2}.$$

Так как в этом случае $'\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$, т. е. $'\mathbf{x} = 2\mathbf{y} - \mathbf{x}$, мы получаем, что

$$'\mathbf{x} = 2\mathbf{x} - 2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\mathbf{x}}{\mathbf{u}^2} - 2\frac{\mathbf{u}}{\mathbf{u}^2}\cdot v - \mathbf{x},$$

т. е.

$$'\mathbf{x} = \left(\mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}^2}\right)\mathbf{x} - \frac{2v}{\mathbf{u}^2}\cdot\mathbf{u}. \qquad (3.49)$$

Заметим, что оператор $\mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}^2}$, входящий в соотношение (3.49), при действии на вектор $\mathbf{v}$, перпендикулярный вектору $\mathbf{u}$ ($\mathbf{uv} = 0$), не изменяет его, а при действии на вектор $\mathbf{w}$, коллинеарный с вектором $\mathbf{u}$ ($\mathbf{w} = \mathbf{u}t$), умножает его на -1:

$$\left(\mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}^2}\right)\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{o} = \mathbf{v},$$

$$\left(\mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}^2}\right)\mathbf{u}t = \mathbf{u}t - 2\mathbf{u}t = -\mathbf{u}t.$$

3.2.15. Расстояние между параллельными плоскостями. Так как у двух параллельных плоскостей могут быть выбраны одни и те же направляющие векторы $\mathbf{a}_a$, *нормальные векторы параллельных плоскостей коллинеарны.*

Расстояния от всех точек одной из двух параллельных плоскостей до другой из этих плоскостей равны. В самом деле, расстояние от произвольной точки $M\,(\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{a}_a t^a)$ плоскости, проведенной через точку $\tilde{M}\,(\tilde{\mathbf{x}})$, параллельно данной плоскости (3.29) с направляющими векторами $\mathbf{a}_a$, в силу (3.46) равно

$$\frac{|\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{a}_a t^a) + v|}{|\mathbf{u}|} = \frac{|\mathbf{u}\tilde{\mathbf{x}} + v|}{|\mathbf{u}|},$$

т. е. равно расстоянию ω от точки $\tilde{M}$ до той же плоскости. Будем называть число, равное этим равным между собой расстояниям, *расстоянием между параллельными плоскостями.* Если уравнения двух параллельных плоскостей записаны в виде

$$\mathbf{ux} + v_1 = 0, \qquad \mathbf{ux} + v_2 = 0, \qquad (3.50)$$

то расстояние между ними равно расстоянию от точки $\tilde{M}\,(\tilde{\mathbf{x}})$, лежащей на второй плоскости, до первой плоскости.

В силу (3.46) это расстояние равно

$$\omega = \frac{|\mathbf{u}\tilde{\mathbf{x}} + v_1|}{|\mathbf{u}|}.$$

Но так как точка $\widetilde{M}$ лежит на второй плоскости, вектор $\widetilde{\mathbf{x}}$ удовлетворяет уравнению этой плоскости, т. е. $\mathbf{u}\widetilde{\mathbf{x}} + v_2 = 0$. Поэтому *расстояние между плоскостями* (3.50) *равно*

$$\omega = \frac{|v_1 - v_2|}{|\mathbf{u}|}. \tag{3.51}$$

§ 3. Геометрия m-плоскостей

3.3.1. Уравнения m-плоскости. Если поверхность можно задать одним координатным уравнением (3.27), то m-поверхность можно задать $n - m$ координатными уравнениями

$$F_{m+1}(x^1, \ldots, x^n) = 0, \ldots, F_n(x^1, \ldots, x^n) = 0, \tag{3.52}$$

если координаты x^i, удовлетворяющие этим уравнениям, можно представить как функции m параметров t^a; в этом случае m-поверхность можно задать и $n - m$ векторными уравнениями:

$$F_{m+1}(\mathbf{x}) = 0, \ldots, F_n(\mathbf{x}) = 0, \tag{3.53}$$

которые при $m = n - 1$ сводятся к одному уравнению (3.28).

Для того чтобы получить уравнения (3.52) или (3.53) для m-плоскости, дополним векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, входящие в векторное уравнение (3.21) m-плоскости, векторами $\mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_n$ до линейно независимого базиса n-пространства. Тогда для каждого вектора $\mathbf{b}_u$ (условимся обозначать индексы, изменяющиеся от $m + 1$ до n, через $u, v, \ldots$) через точку $M_0(\mathbf{x}_0)$ m-плоскости проходит плоскость с направляющими векторами $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \ldots, \mathbf{b}_{u-1}, \mathbf{b}_{u+1}, \ldots, \mathbf{b}_n$, имеющая уравнение

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_a t^a + \mathbf{b}_{m+1} t^{m+1} + \ldots + \mathbf{b}_{u-1} t^{u-1} + \mathbf{b}_{u+1} t^{u+1} + \ldots + \mathbf{b}_n t^n.$$

Таким образом, *m-плоскость можно рассматривать как пересечение $n - m$ плоскостей*[3]. Если мы введем обозначение

$$\mathbf{u}^u = [\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_m \mathbf{b}_{m+1} \ldots \mathbf{b}_{u-1} \mathbf{b}_{u+1} \ldots \mathbf{b}_n],$$