ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

Движения и аффинные преобразования

§ 1. Аффинные преобразования

4.1.1. Геометрические преобразования. *Геометрическим преобразованием* пространства называется взаимно однозначное отображение этого пространства на себя, т. е. переход от каждой точки M (x) этого пространства к точке M' ($'$x) этого пространства, причем каждая точка M переходит в одну и только одну точку M', а точка M' получается из одной и только одной точки M.

При геометрическом преобразовании вектор $'\mathbf{x}$ является однозначной векторной функцией векторного аргумента

$$'\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{4.1}$$

а вектор x также является однозначной векторной функцией векторного аргумента

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}('\mathbf{x}). \tag{4.2}$$

Функция (4.1) равносильна n однозначным числовым функциям n числовых аргументов

$$'x^i = f^i(x^1, \ldots, x^n). \tag{4.3}$$

Последовательно выполняя преобразования (4.1) и

$$'\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \tag{4.4}$$

мы получим новое преобразование

$$'\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})), \tag{4.5}$$

называемое *произведением* преобразований (4.1) и (4.4). Преобразование

$$'\mathbf{x} = \mathbf{x}, \tag{4.6}$$

при котором каждая точка пространства переходит в себя, называется *тождественным преобразованием*.

Преобразование

$$'\mathbf{x} = \mathbf{e}(\mathbf{x}), \tag{4.7}$$

определяемое функцией (4.2), произведение которого на преобразование (4.1) является тождественным преобразованием, называется преобразованием, *обратным* преобразованию (4.1).

Если в пространстве даны три преобразования (4.1), (4.4)

$$'\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{x}), \tag{4.8}$$

то преобразование

$$'\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))), \tag{4.9}$$

являющееся произведением этих трех преобразований, можно рассматривать как произведение преобразований (4.5) и (4.8) и как произведение преобразований (4.1) и

$$'\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{g}(\mathbf{x})),$$

откуда видно, что *умножение геометрических преобразований ассоциативно*.

С другой стороны, так как произведение простейших преобразований

$$'\mathbf{x} = -\mathbf{x} \quad \text{и} \quad '\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{a}$$

в одном порядке является преобразованием

$$'\mathbf{x} = -\mathbf{x} + \mathbf{a},$$

а в другом порядке — преобразованием

$$'\mathbf{x} = -\mathbf{x} - \mathbf{a},$$

мы видим, что *умножение геометрических преобразований не коммутативно*.

4.1.2. Аффинные преобразования. Будем называть *аффинным преобразованием* аффинного или евклидова n-пространства такое геометрическое преобразование этого пространства, при котором прямые переходят в прямые [1].

Покажем, что *аффинные преобразования могут быть записаны в виде*

$$'\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}, \tag{4.10}$$

где $\mathbf{A}$ — линейный оператор, обладающий обратным оператором $\mathbf{A}^{-1}$.

Прежде всего покажем, что *при аффинных преобразованиях m-плоскости переходят в m-плоскости.* В силу определения аффинных преобразований это утверждение справедливо для $m = 1$. Предположим, что оно справедливо для $(m-1)$-плоскостей. Рассмотрим две $(m-1)$-плоскости A и B, пересекающиеся по $(m-2)$-плоскости. В силу формулы (3.88) сумма этих $(m-1)$-плоскостей является m-плоскостью. При аффинном преобразовании $(m-1)$-плоскости A и B переходят в $(m-1)$-плоскости A' и B', также пересекающиеся по $(m-2)$-плоскости и, следовательно, имеющие своей суммой m-плоскость. Тогда сумма плоскостей A и B переходит в сумму плоскостей A' и B', так как, если M — точка суммы плоскостей A и B, через нее можно провести прямую, пересекающуюся с плоскостями A и B в точках L и N (рис. 4.1). Точки L и N перейдут в точки L' и N' плоскостей A' и B' и точка M, лежащая на прямой LN, перейдет в точку M', лежащую на прямой $L'N'$, находящейся в m-плоскости, являющейся суммой плоскостей A' и B', и, следовательно, первая m-плоскость при нашем аффинном преобразовании перейдет во вторую m-плоскость.

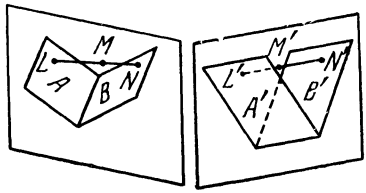

Рис. 4.1.

При аффинных преобразованиях параллельные прямые, переходят в параллельные прямые, так как две параллельные прямые лежат в одной 2-плоскости, а 2-плоскости при аффинных преобразованиях переходят в 2-плоскости и, следовательно, две параллельные прямые перейдут в две прямые в одной 2-плоскости. Эти две прямые не могут быть пересекающимися прямыми, так как точка пересечения этих прямых в этом случае не соответствовала

бы никакой точке, что противоречило бы взаимной однозначности аффинных преобразований.

Аффинное преобразование переводит эквивалентные ориентированные отрезки в эквивалентные ориентированные отрезки. Рассмотрим два эквивалентных ориентированных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$. Если эти точки не находятся на одной прямой, то прямая AB параллельна прямой CD, а прямая AC параллельна прямой BD (рис. 4.2, *а*). Но при аффинных преобразованиях параллельные прямые переходят в параллельные прямые, и если точки A, B, C, D переходят в точки A', B', C', D', то прямая $A'B'$ параллельна прямой $C'D'$, а прямая $A'C'$ параллельна прямой $B'D'$

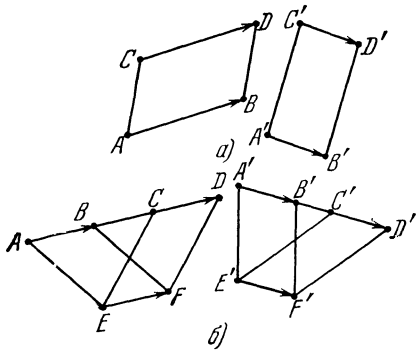

Рис. 4.2.

и, следовательно, ориентированные отрезки $\overline{A'B'}$ и $\overline{C'D'}$ также эквивалентны. Если отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ лежат на одной прямой, то существует отрезок $\overline{EF}$, не лежащий на этой прямой, эквивалентный обоим этим отрезкам (рис. 4.2, *б*). Поэтому наше утверждение справедливо для отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{EF}$ и для отрезков $\overline{CD}$ и $\overline{EF}$, откуда вытекает его справедливость для отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Из доказанного свойства вытекает, что аффинное преобразование ставит в соответствие всякому вектору $\mathbf{a} = \overline{AB}$ некоторый вектор $'\mathbf{a} = \overline{A'B'}$ или, как мы будем говорить, оно *переводит вектор* $\mathbf{a}$ *в вектор* $'\mathbf{a}$.

Аффинные преобразования переводят сумму векторов в сумму соответственных векторов. В самом деле, если аффинное преобразование переводит векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в векторы $'\mathbf{a}$ и $'\mathbf{b}$, то, если это преобразование переводит некоторую точку A в точку A', построим точки B и C, для которых $\overline{AB} = \mathbf{a}$, $\overline{BC} = \mathbf{b}$ и, следовательно, $\overline{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (рис. 4.3). Тогда, если точки B и C переходят

в точки B' и C', мы находим, что $'\mathbf{a} = \overline{A'B'}$, $'\mathbf{b} = \overline{B'C'}$ и $'\mathbf{a} + '\mathbf{b} = \overline{A'C'}$, откуда и вытекает наше утверждение.

Аффинные преобразования переводят произведение вектора на вещественное число в произведение соответственного вектора на то же число. В самом деле, из определения аффинного преобразования следует, что аффинное преобразование переводит коллинеарные векторы $\mathbf{a}$ и $k\mathbf{a}$ в коллинеарные векторы $'\mathbf{a}$ и $'k'\mathbf{a}$. Нам нужно доказать, что число $'k$ всегда равно k.

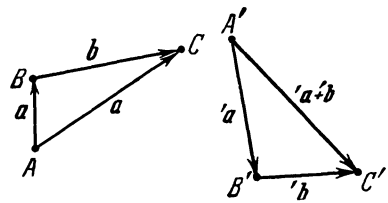

Рис. 4.3.

Сначала докажем, что число $'k$ не зависит от вектора $\mathbf{a}$. Рассмотрим такие точки O, A и B, что $\overline{OA} = \mathbf{a}$, $\overline{OB} = k\mathbf{a}$. Наше аффинное преобразование переведет эти точки в такие точки O', A' и B', что $\overline{O'A'} = '\mathbf{a}$, $\overline{O'B'} = 'k'\mathbf{a}$. Рассмотрим такие точки C и D, что вектор $\overline{OC} = \mathbf{b}$ не коллинеарен с вектором $\mathbf{a}$, а $\overline{OD} = k\mathbf{b}$. Наше аффинное преобразование переведет эти точки в точки C' и D', причем $\overline{O'C'} = '\mathbf{b}$ (рис. 4.4). Но прямые AC и BD параллельны, поэтому параллельны и прямые $A'C'$ и $B'D'$, в которые они переходят при аффинном преобразовании. Отсюда следует, что вектор $\overline{O'D'}$ можно записать в виде $'k'\mathbf{b}$ и, следовательно, число $'k$ зависит только от числа k. Обозначим зависимость $'k$ от k через $'k = f(k)$. Покажем, что *функция $f(x)$ обладает свойствами*

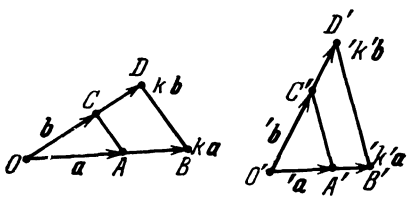

Рис. 4.4.

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \tag{4.11}$$

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y), \tag{4.12}$$

т. е. *является автоморфизмом поля вещественных чисел.* В самом деле, наше аффинное преобразование переводит вектор $(k+l)\mathbf{a}$ в вектор $'(k+l)'\mathbf{a} = f(k+l)\,'\mathbf{a}$, но, с другой стороны, $(k+l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$ и, так как сумма векторов переходит в сумму соответствующих векторов, вектор $(k+l)\mathbf{a}$ переходит в сумму векторов $'k'\mathbf{a} = f(k)\,'\mathbf{a}$ и $'l\mathbf{a} = f(l)\,'\mathbf{a}$, т. е.

$$f(k+l)\,'\mathbf{a} = f(k)\,'\mathbf{a} + f(l)\,'\mathbf{a},$$

откуда следует (4.11). В то же время наше аффинное преобразование переводит вектор $(kl)\mathbf{a}$ в вектор $'(kl)\,'\mathbf{a} = f(kl)\,'\mathbf{a}$. С другой стороны, так как $(kl)\mathbf{a} = k(l\mathbf{a})$, вектор $(kl)\mathbf{a}$ переходит в вектор $'k\,'(l\mathbf{a}) = f(k)\,'(l\mathbf{a})$, где $'(l\mathbf{a})$ — вектор, полученный из вектора $l\mathbf{a}$. Поэтому $'(l\mathbf{a}) = {}'l\,'\mathbf{a} = f(l)\,'\mathbf{a}$ и, следовательно,

$$f(kl)\,'\mathbf{a} = f(k)\,f(l)\,'\mathbf{a},$$

откуда следует (4.12).

Покажем, что *единственной функцией вещественного аргумента, удовлетворяющей условиям* (4.11) *и* (4.12), *является функция*

$$f(x) = x, \tag{4.13}$$

т. е. *единственным автоморфизмом поля вещественных чисел является тождественное преобразование.* В самом деле, если $x \neq 0$, то и $f(x) \neq 0$, так как иначе вектор $\overline{OB} = k\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ перешел бы при нашем преобразовании в вектор $\overline{O'B'} = 0\cdot\mathbf{a} = \mathbf{o}$ и точки O и B совпали бы, что противоречит взаимной однозначности аффинного преобразования. Пусть $x \neq 0$. Из того, что $1\cdot x = x$, в силу (4.12) следует, что $f(1)\,f(x) = f(x)$, т. е.

$$f(1) = 1. \tag{4.14}$$

Отсюда в силу (4.11) для любого натурального числа n

$$f(n) = f(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n\text{ раз}}) =$$

$$= \underbrace{f(1)+f(1)+\ldots+f(1)}_{n\text{ раз}} = nf(1) = n,$$

т. е.

$$f(n) = n. \tag{4.15}$$

С другой стороны, в силу (4.12) и (4.14) для $x \neq 0$

$$f(x)\, f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(1) = 1$$

и для любого натурального числа n

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{n}. \tag{4.16}$$

Отсюда в силу (4.12) для любых натуральных чисел m и n

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(m \cdot \frac{1}{n}\right) = f(m)\, f\left(\frac{1}{n}\right) = m \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n},$$

т. е.

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}. \tag{4.17}$$

Если теперь x — отрицательное рациональное число, то, так как $x + |x| = 0$, а в силу (4.17) $f(|x|) = |x|$, в силу (4.11) мы получаем, что $f(x + |x|) = f(x) + f(|x|) = f(x) + |x| = 0$, т. е. $f(x) = -|x| = x$, и, следовательно, формула (4.17) имеет место и для отрицательных рациональных чисел.

Из (4.12) мы получаем также, что если $x > 0$, то и

$$f(x) = f(\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}) = [f(\sqrt{x})]^2 > 0.$$

Поэтому функция $f(x)$ монотонно возрастает, так как если $x_2 > x_1$, то

$$f(x_2) = f(x_1) + f(x_2 - x_1) > f(x_1).$$

Но для любого вещественного числа x всегда можно найти такие целые числа m и n, что

$$\frac{m}{n} < x < \frac{m+1}{n}.$$

Поэтому в силу монотонного возрастания функции $f(x)$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) < f(x) < f\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

или в силу (4.17)

$$\frac{m}{n} < f(x) < \frac{m+1}{n}.$$

Но рациональные числа $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ могут быть сделаны сколь угодно близкими, откуда в силу непрерывности вещественных чисел мы находим, что число $f(x)$ всегда совпадает с числом x.

Поэтому всякое аффинное преобразование, переводящее вектор $\mathbf{a}$ в вектор $'\mathbf{a}$, переводит вектор $k\mathbf{a}$ в вектор $k\,'\mathbf{a}$.

Так как аффинное преобразование переводит сумму векторов в сумму соответственных векторов, а произведение вектора на число — в произведение соответственного вектора на то же число, *при аффинных преобразованиях векторы испытывают линейное преобразование*

$$'\mathbf{a} = \mathbf{A}\mathbf{a}, \tag{4.18}$$

где $\mathbf{A}$ — линейный оператор. Поэтому если аффинное преобразование переводит некоторую точку O в точку O', а произвольную точку M $(\mathbf{x})$ пространства — в точку M' $('\mathbf{x})$, то в силу (4.18)

$$\overline{O'M'} = \mathbf{A}\overline{OM}$$

и

$$'\mathbf{x} = \overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'} = \mathbf{A}\overline{OM} + \overline{OO'},$$

т. е., так как $\overline{OM} = \mathbf{x}$, обозначая вектор $\overline{OO'}$ через $\mathbf{a}$, мы можем переписать это соотношение в виде (4.10).

Так как аффинное преобразование взаимно однозначно, оператор $\mathbf{A}$ в формулах (4.18) и, следовательно, (4.10) является обратимым оператором, так как решение уравнения (4.10) относительно $\mathbf{x}$, имеющего вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,('\mathbf{x} - \mathbf{a}), \tag{4.19}$$

возможно только при существовании оператора $\mathbf{A}^{-1}$.

Название «аффинные операции над векторами» для сложения векторов и их умножения на число и объясняется тем, что эти операции сохраняются при аффинных преобразованиях.

Две фигуры, переводимые друг в друга аффинным преобразованием, называются *аффинными фигурами*

4.1.3. Аффинные преобразования в координатах. Формулу (4.10) можно переписать в координатах в виде

$$'x^i = A^i_j x^j + a^i. \tag{4.20}$$

Формула (4.20) отличается от формулы (1.75) закона преобразования аффинных координат тем, что здесь координаты x^i стоят в правой части, а координаты $'x^i$ — в левой части, а в формуле (1.75) — наоборот.

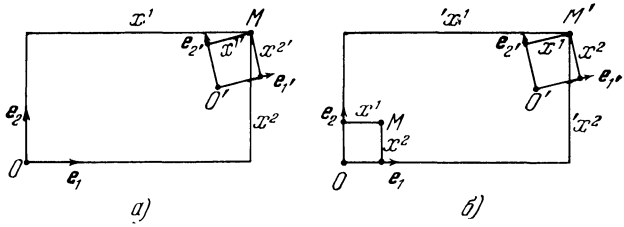

Рис. 4.5.

Отсюда следует, что *аффинные преобразования можно определить как такие преобразования аффинного или евклидова пространства, при которых всякая точка с координатами x^i в некоторой системе аффинных координат переходит в точку с численно равными координатами в некоторой, вообще говоря другой, системе аффинных координат.* На рис. 4.5 изображены частный случай преобразования аффинных координат и соответственное аффинное преобразование при $n = 2$.

В самом деле, пусть точка M с координатами x^i в системе аффинных координат с началом O и с базисными векторами $\mathbf{e}_i$ переходит в точку M' (рис. 4.5, *б*) с координатами $'x^i$ в той же системе и с координатами, равными x^i, в системе координат с началом O' и с базисными векторами $\mathbf{e}_{i'}$. Рассмотрим преобразование аффинных координат, состоящее в переходе от первой из этих систем ко второй. Тогда старые координаты точки M' равны $'x^i$, а новые координаты этой точки равны x^i, т. е. эти координаты связаны соотношением, которое мы получим из соотношения (1.75), если подставим в него вместо старых координат x^i координаты $'x^i$, а вместо новых координат $'x^i$ — координаты x^i. Соотношение (1.75) после этой замены и

соответственной замены коэффициентов $A^i_{i'}$ на A^i_j можно переписать в виде (4.20).

4.1.4. Центроаффинные преобразования и переносы. Частными случаями аффинных преобразований (4.10) являются преобразования

$$'\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{4.21}$$

переводящие в себя начало O ($\mathbf{o}$) и называемые *центроаффинными преобразованиями с центром* O, и преобразования

$$'\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{a}, \tag{4.22}$$

являющиеся *переносами* (см. **1.5.2**).

Всякому центроаффинному преобразованию (4.21) взаимно однозначно соответствует линейный оператор $\mathbf{A}$, называемый *оператором центроаффинного преобразования*, а всякому переносу (4.22) взаимно однозначно соответствует вектор $\mathbf{a}$, называемый *вектором переноса*.

Центроаффинные преобразования образуют группу по умножению, изоморфную группе обратимых операторов по умножению, так как произведение преобразований (4.21) и

$$'\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} \tag{4.23}$$

имеет вид

$$'\mathbf{x} = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x}, \tag{4.24}$$

т. е. является центроаффинным преобразованием с оператором $\mathbf{BA}$.

Переносы образуют группу по умножению, изоморфную группе векторов по сложению, так как произведение переносов (4.22) и

$$'\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{4.25}$$

имеет вид

$$'\mathbf{x} = \mathbf{x} + (\mathbf{a} + \mathbf{b}), \tag{4.26}$$

т. е. является переносом с вектором $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Тождественное преобразование является центроаффинным преобразованием с единичным оператором $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ и переносом с нулевым вектором $\mathbf{a} = \mathbf{o}$. Обратным преобразованием для центроаффинного преобразования (4.21)

является центроаффинное преобразование

$$'\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}, \tag{4.27}$$

а обратным преобразованием для переноса (4.22) является перенос

$$'\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{a}. \tag{4.28}$$

Так как центроаффинное преобразование (4.21) определяется элементами матрицы (A^i_j) оператора $\mathbf{A}$, а перенос (4.22) определяется координатами a^i вектора $\mathbf{a}$, *группы центроаффинных преобразований и переносов зависят, соответственно*, от n^2 и n вещественных параметров.

Центроаффинные преобразования дают нам геометрическую модель группы обратимых линейных операторов по умножению, а переносы — геометрическую модель группы векторов по сложению.

4.1.5. Группа аффинных преобразований. Произведение двух аффинных преобразований также является аффинным преобразованием, так как произведение двух преобразований, переводящих прямые в прямые, также переводит прямые в прямые. Произведение аффинных преобразований (4.10) и

$$'\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{4.29}$$

является аффинным преобразованием

$$'\mathbf{x} = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{a} + \mathbf{b}. \tag{4.30}$$

Умножение аффинных преобразований ассоциативно, как умножение любых геометрических преобразований Тождественное преобразование является аффинным преобразованием, так как при тождественном преобразовании каждая прямая переходит в себя. Обратным преобразованием для преобразования (4.10) является аффинное преобразование

$$'\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}, \tag{4.31}$$

которое мы получим из преобразования (4.29), если потребуем, чтобы произведение (4.30) преобразования (4.10)

и этого преобразования было бы тождественным преобразованием, т. е. чтобы выполнялись условия

$$\mathbf{BA} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{Ba} + \mathbf{b} = \mathbf{o}, \tag{4.32}$$

так как первое из условий (4.32) дает нам $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, а второе из этих условий дает нам $\mathbf{b} = -\mathbf{Ba} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}$.

Поэтому *аффинные преобразования образуют группу по умножению*; группы центроаффинных преобразований и переносов, очевидно, являются подгруппами этой группы. Так как аффинное преобразование (4.10) определяется n^2 элементами матрицы (A^i_j) оператора $\mathbf{A}$ и n координатами a^i вектора $\mathbf{a}$, то *группа аффинных преобразований зависит от* $n^2 + n = n(n+1)$ *вещественных параметров.*

Так как произведению (4.30) аффинных преобразований (4.10) и (4.29) однозначно соответствует произведение $\mathbf{BA}$ операторов $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ преобразований (4.29) и (4.10), то *группа аффинных преобразований гомоморфна группе обратимых операторов.* Так как при этом гомоморфизме единичному оператору $\mathbf{I}$ соответствуют все переносы (4.22), *ядром этого гомоморфизма является подгруппа переносов.* Поэтому, так как ядра гомоморфизма группы всегда являются нормальными делителями этой группы, *группа переносов является нормальным делителем группы аффинных преобразований.*

4.1.6. Задание аффинного преобразования. Покажем, что *для задания аффинного преобразования достаточно указать, в какие точки переходят* $n+1$ *точек, не лежащих на одной* $(n-1)$*-плоскости.* В самом деле, если при некотором аффинном преобразовании точки A_0, A_i, не лежащие на одной $(n-1)$-плоскости, переходят соответственно в точки A_0', A_i', свяжем с этими системами точек системы аффинных координат, приняв точки A_0 и A_0' за начала O и O', а векторы $\overline{A_0A_i}$ и $\overline{A_0'A_i'}$ — за базисные векторы $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_{i'}$. Эти две системы определят некоторое аффинное преобразование. Это преобразование переводит точки A_0, A_i соответственно в точки A_0', A_i'; точки A_0 и A_0' имеют в обеих системах одинаковые координаты $x^i = 0$, а точки A_j и A_j' имеют в обеих системах одинаковые коор-

динаты $x^i = \delta^i_j$. Это преобразование — единственное аффинное преобразование, переводящее точки A_0, A_i соответственно в точки A'_0, A'_i, так как построенные нами системы аффинных координат — единственные системы, в которых эти точки имеют указанные координаты, а аффинное преобразование, определяемое двумя системами аффинных координат,— также единственное. Поэтому построенное нами преобразование совпадает с исходным преобразованием, переводящим точки A_0, A_i соответственно в точки A'_0, A'_i.

На рис. 4.6 изображено аффинное преобразование 2-плоскости, определяемое заданием точек A_0, A_1, A_2 и A'_0, A'_1, A'_2.

Из доказанной нами теоремы видно, что *всякие две системы m точек, не лежащие в одной $(m-2)$-плоскости, аффинны*: при $m = n + 1$ эти системы точек определяют единственное аффинное преобразование, переводящее одну систему точек в другую, при $m \leqslant n$ имеется бесконечно много аффинных преобразований, переводящих одну систему точек в другую, каждая из которых однозначно определится, если мы дополним данные системы m точек до систем $n + 1$ точек, не лежащих в одной $(n-1)$-плоскости.

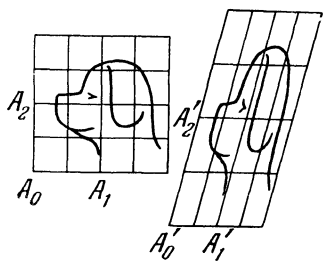

Рис. 4.6.

В то же время две системы m точек, лежащих в одной $(m-2)$-плоскости, например, две тройки точек, лежащих на одной прямой, уже не аффинны: точки A_0, A_1, A_2, лежащие на одной прямой, очевидно, можно перевести аффинным преобразованием только в такую тройку точек A'_0, A'_1, A'_2, что если $\overline{A_0A_2} = \lambda\overline{A_0,A_1}$, то и $\overline{A'_0A'_2} = \lambda\overline{A'_0A'_1}$.

4.1.7. Аффинные преобразования первого и второго рода. Пусть при аффинном преобразовании $n + 1$ точек A_0, A_1, . . ., A_n, заданных в определенном порядке, переходят в точки A'_0, A'_1, . . . , A'_n. При этом преобразова-

нии векторы $\mathbf{a}_i = \overline{A_0A_i}$ переходят в векторы $\mathbf{a}_i' = \overline{A_0'A_i'}$, связанные с ними соотношениями

$$\mathbf{a}_i' = \mathbf{A}\mathbf{a}_i. \tag{4.33}$$

Тогда косое произведение векторов $\mathbf{a}_i'$ равно

$$\{\mathbf{a}_1'\mathbf{a}_2' \ldots \mathbf{a}_n'\} = \{\mathbf{A}\mathbf{a}_1\mathbf{A}\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{A}\mathbf{a}_n\}.$$

Но, так как

$$\mathbf{A}\mathbf{a}_i = \mathbf{A}a_i^j\mathbf{e}_j = a_i^j\mathbf{A}\mathbf{e}_j$$

и если мы положим

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_j = A_j^k\mathbf{e}_k,$$

то

$$\mathbf{A}\mathbf{a}_i = a_i^jA_j^k\mathbf{e}_k.$$

Так как в силу формулы (2.78) косое произведение векторов $\mathbf{a}_i$ равно

$$\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n\} = \varepsilon\mathrm{Det}\,(a_i^j),$$

то косое произведение векторов $\mathbf{a}_i'$ равно

$$\{\mathbf{a}_1'\mathbf{a}_2' \ldots \mathbf{a}_n'\} = \{\mathbf{A}\mathbf{a}_1\mathbf{A}\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{A}\mathbf{a}_n\} = \{\mathbf{A}a_1^{i_1}\mathbf{e}_{i_1}\mathbf{A}a_2^{i_2}\mathbf{e}_{i_2} \ldots \mathbf{A}a_n^{i_n}\mathbf{e}_{i_n}\}$$

или, так как

$$\mathbf{A}a_j^i\mathbf{e}_i = a_j^i\mathbf{A}\mathbf{e}_i = a_j^iA_i^k\mathbf{e}_k.$$

мы получаем, что

$$\{\mathbf{a}_1'\mathbf{a}_2' \ldots \mathbf{a}_n'\} = \{a_1^{i_1}A_{i_1}^{k_1}\mathbf{e}_{k_1}a_2^{i_2}A_{i_2}^{k_2}\mathbf{e}_{k_2} \ldots a_n^{i_n}A_{i_n}^{k_n}\mathbf{e}_{k_n}\} =$$
$$= \varepsilon\,\mathrm{Det}\,(a_j^iA_i^k) = \varepsilon\,\mathrm{Det}\,(a_i^j)\,\mathrm{Det}\,(A_i^j),$$

т. е.

$$\{\mathbf{a}_1'\mathbf{a}_2' \ldots \mathbf{a}_n'\} = \{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n\}\,\mathrm{Det}\,(A_i^j). \tag{4.34}$$

Таким образом, *при аффинном преобразовании все косые произведения векторов умножаются на определитель матрицы этого аффинного преобразования.*

Так как косое произведение n векторов положительно, когда эти векторы образуют правую систему, и отрицательно, когда эти векторы образуют левую систему, отсюда следует, что *при аффинном преобразовании, матрица которого имеет положительный определитель, все правые системы векторов переходят в правые системы, а левые — в левые, а при аффинном преобразовании, матрица которого имеет отрицательный определитель, все правые системы векторов переходят в левые системы, а левые — в правые.* Центроаффинные и аффинные преобразования, матрицы которых имеют положительные определители, будем называть *центроаффинными и аффинными преобразованиями первого рода*, а центроаффинные и аффинные преобразования, матрицы которых имеют отрицательные определители, будем называть *центроаффинными и аффинными преобразованиями второго рода.* Так как оператор переноса — единичный оператор $\mathbf{I}$, то *переносы являются аффинными преобразованиями первого рода.*

Так как произведение двух аффинных преобразований первого рода снова является аффинным преобразованием первого рода, тождественное преобразование, очевидно, является аффинным преобразованием первого рода и аффинное преобразование, обратное для аффинного преобразования первого рода, также является аффинным преобразованием первого рода, аффинные преобразования первого рода образуют группу по умножению, являющуюся подгруппой группы аффинных преобразований. Эта группа, очевидно, зависит от того же числа $n(n+1)$ вещественных параметров, что и группа всех аффинных преобразований. Аналогично показывается, что центроаффинные преобразования первого рода также образуют группу по умножению.

Так как всякую неособенную матрицу с положительным определителем можно, непрерывно изменяя ее элементы, перевести в любую другую неособенную матрицу с положительным определителем, *группа центроаффинных преобразований первого рода является связной группой.* Так как всякий вектор можно, непрерывно изменяя его координаты, перевести в вектор $\mathbf{o}$, *группа переносов также является связной группой.* Отсюда следует, что и *группа всех аффинных преобразований первого рода является*

связной группой. Так как всякую неособенную матрицу с отрицательным определителем также можно, непрерывно изменяя ее элементы, перевести в другую неособенную матрицу с отрицательным определителем, но нельзя перевести в неособенную матрицу с положительным определителем, *группа центроаффинных преобразований и группа всех аффинных преобразований состоят из двух связных компонент, одна из которых состоит из аффинных преобразований первого рода, а другая — из аффинных преобразований второго рода.*

Если мы поставим в соответствие каждому аффинному преобразованию первого рода число 1, а каждому аффинному преобразованию второго рода — число — 1, то *группа аффинных преобразований гомоморфна группе, состоящей из чисел* 1 *и* —1. Так как при этом гомоморфизме числу 1 соответствуют аффинные преобразования первого рода, *ядром этого гомоморфизма является подгруппа аффинных преобразований первого рода.* Поэтому *группа аффинных преобразований первого рода является нормальным делителем группы аффинных преобразований.*

4.1.8. Неподвижные точки и инвариантные направления. Если точка M_0 ($\mathbf{x}_0$) остается неподвижной при аффинном преобразовании (4.10),— в этом случае это преобразование называется *центроаффинным преобразованием с центром* M_0,— то вектор $\mathbf{x}_0$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{a},$$

равносильному условию

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_0 = \mathbf{a},$$

откуда получаем, что

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{a}. \tag{4.35}$$

Поэтому *всякое аффинное преобразование, для которого оператор* $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ *является обратимым, имеет единственную неподвижную точку.* В противном случае аффинное преобразование обладает многими неподвижными точками или не обладает ни одной неподвижной точкой — примером последнего случая является перенос, когда $\mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{o}$.

Собственные векторы оператора **A** аффинного преобразования определяют *инвариантные направления* преобразования — такие направления, что прямые, проведенные в этих направлениях при аффинном преобразовании, сохраняют свое направление, т. е. переходят в себя или в параллельные прямые.

В том случае, когда оператор **A** аффинного преобразования имеет вид $\lambda\mathbf{I}$, все направления инвариантны при этом преобразовании.

4.1.9. Преобразование родства. Аффинное преобразование, которое можно определить с помощью двух систем $m+1$ точек A_0, A_i и A_0', A_i', у которых n точек $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ совпадают соответственно с точками $A_0', A_1', \ldots, A_{n-1}'$, называется *преобразованием родства с плоскостью родства* $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$. При таком преобразовании все точки плоскости $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ переходят в себя. Так как, в частности, точка пересечения этой плоскости с прямой A_nA_n' также переходит в себя, прямая A_nA_n' также перейдет в себя и, следовательно, направление этой прямой является инвариантным направлением преобразования. Это направление называется *направлением родства* [2]. Две фигуры, переводимые друг в друга преобразованием родства, называются *родственными фигурами*.

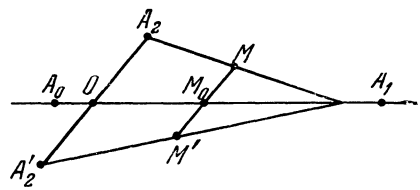

Рис. 4.7.

На рис. 4.7 изображено построение точки M', родственной точке M на 2-плоскости.

Если выбрать за начало O системы аффинных координат точку пересечения прямой A_nA_n' с плоскостью $A_0\,A_1 \ldots A_{n-1}$, а за базисные векторы $\mathbf{e}_i$ принять векторы $\overline{OA_i}$, преобразование родства примет вид

$$'x^i = x^i \ (i < n), \quad 'x^n = \lambda x^n. \tag{4.36}$$

Формула (4.36) показывает, что при преобразовании родства каждая точка M переходит в такую точку M, что

направление прямой MM' совпадает с направлением родства, причем если M_0 — точка пересечения прямой MM' с плоскостью родства, то

$$\overline{M_0M'} = \lambda\overline{M_0M}. \tag{4.37}$$

Число λ в формулах (4.36) и (4.37) называется *коэффициентом родства*. В случае, когда $|\lambda| < 1$, преобразование родства называют также *сжатием к плоскости* — плоскости родства, в случае, когда $|\lambda| > 1$, преобразование родства называют также *растяжением от плоскости*, в случае, когда $\lambda = -1$, преобразование родства называют также *отражением от плоскости*. Сжатие к плоскости, растяжение от плоскости и отражение от плоскости называются *прямыми* или *косыми*, в зависимости от того, является ли угол между плоскостью и направлением родства прямым углом или нет.

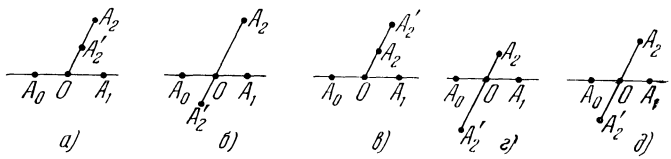

Рис. 4.8.

На рис. 4,8, *а* и *б* изображены два случая косого сжатия к прямой ($\lambda > 0$ и $\lambda < 0$), на рис. 4.8, *в* и *г* изображены аналогичные два случая косого растяжения от прямой, на рис. 4.8, *д* изображено косое отражение от прямой на 2-плоскости.

4.1.10. Гомотетия. Аффинное преобразование

$$'\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \tag{4.38}$$

называется *гомотетией*[3] с центром M_0 ($\mathbf{x}_0$). Если принять точку M_0 за начало системы аффинных координат, гомотетия может быть записана в виде

$$'x^i = \lambda x^i. \tag{4.39}$$

Две фигуры, переводимые друг в друга гомотетией, называются *гомотетичными фигурами*.

На рис. 4.9 изображено построение точки M', гомотетичной точке M на 2-плоскости.

Формулы (4.38) и (4.39) показывают, что при гомотетии каждая точка M переходит в такую точку M', что прямая MM' проходит через точку M_0 и векторы $\overline{M_0M}$ и $\overline{M_0M'}$ связаны соотношением (4.37). Число λ в формулах (4.37), (4.38) и (4.39) называется *коэффициентом гомотетии*. В случае, когда $|\lambda| < 1$, гомотетию называют также *сжатием к точке*—центру гомотетии, в случае, когда $|\lambda| > 1$, гомотетию называют также *растяжением от точки*, в случае, когда $\lambda = -1$, гомотетию называют также *отражением* от точки.

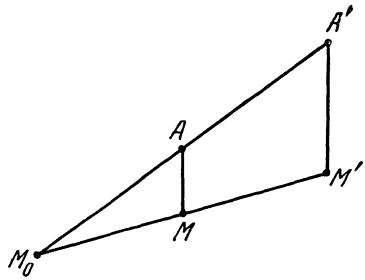

Рис. 4.9.

4.1.11. Преобразование m-родства. Преобразование родства и гомотетии являются частными случаями *преобразования m-родства*, которое при надлежащем выборе базиса принимает вид

$$'x^a = x^a \quad (a \leqslant m), \quad 'x^u = \lambda x^u \quad (u > m). \qquad (4.40)$$

При таком преобразовании все точки m-плоскости $x^u = 0$ переходят в себя, а направления всех векторов вида $\mathbf{e}_u t^u$ являются инвариантными направлениями. Поэтому плоскость $x^u = 0$ в этом случае называется *m-плоскостью m-родства*, а $(n-m)$-направление, определяемое векторами $\mathbf{e}_u$, называется *$(n-m)$-направлением m-родства*.

Преобразование родства является преобразованием m-родства при $m = n-1$, гомотетия является преобразованием m-родства при $m = 0$.

Число λ в формуле (4.40) называется *коэффициентом m-родства*. В случае, когда $|\lambda| < 1$, преобразование m-родства называют также *сжатием к m-плоскости*, в случае, когда $|\lambda| > 1$, преобразование m-родства называют также

растяжением от m-плоскости, в случае, когда $\lambda = -1$, преобразование m-родства называют также *отражением от m-плоскости*. Сжатие к m-плоскости, растяжение от m-плоскости и отражение от m-плоскости называются *прямыми* или *косыми* в зависимости от того, перпендикулярны ли все инвариантные направления преобразования плоскости m-родства или нет.

§ 2. Движения

4.2.1. Движения и конгруэнтность. Будем называть *движением* евклидова пространства такое геометрическое преобразование этого пространства, при котором не изменяются расстояния между точками.

Покажем, что *движения могут быть записаны в виде*

$$'\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{a}, \tag{4.41}$$

где $\mathbf{U}$ — *ортогональный оператор.*

В самом деле, три точки A, B, C лежат на одной прямой, причем точка B — между точками A и C, тогда и только тогда, когда расстояние AC равно сумме расстояний AB и BC. При движении всякие три точки, лежащие на одной прямой, переводятся в три точки, лежащие на одной прямой, и не могут перейти в три точки, не лежащие на одной прямой. Поэтому *движения являются аффинными преобразованиями* и, следовательно, могут быть записаны в виде (4.10).

Так как при движениях не изменяются расстояния между точками, то оператор $\mathbf{A}$, входящий в формулу (4.10), не изменяет модуля векторов, т. е. для всякого вектора

$$|\mathbf{A}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$$

или

$$\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^2,$$

откуда, как мы видели в **2.3.6**, оператор $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$, т. е. является ортогональным оператором.

Две фигуры, переводимые друг в друга движением, называются *конгруэнтными фигурами* [4].