растяжением от m-плоскости, в случае, когда $\lambda = -1$, преобразование m-родства называют также *отражением от m-плоскости*. Сжатие к m-плоскости, растяжение от m-плоскости и отражение от m-плоскости называются *прямыми* или *косыми* в зависимости от того, перпендикулярны ли все инвариантные направления преобразования плоскости m-родства или нет.

§ 2. Движения

4.2.1. Движения и конгруэнтность. Будем называть *движением* евклидова пространства такое геометрическое преобразование этого пространства, при котором не изменяются расстояния между точками.

Покажем, что *движения могут быть записаны в виде*

$$'\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{a}, \tag{4.41}$$

где $\mathbf{U}$ — *ортогональный оператор.*

В самом деле, три точки A, B, C лежат на одной прямой, причем точка B — между точками A и C, тогда и только тогда, когда расстояние AC равно сумме расстояний AB и BC. При движении всякие три точки, лежащие на одной прямой, переводятся в три точки, лежащие на одной прямой, и не могут перейти в три точки, не лежащие на одной прямой. Поэтому *движения являются аффинными преобразованиями* и, следовательно, могут быть записаны в виде (4.10).

Так как при движениях не изменяются расстояния между точками, то оператор $\mathbf{A}$, входящий в формулу (4.10), не изменяет модуля векторов, т. е. для всякого вектора

$$|\mathbf{A}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$$

или

$$\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^2,$$

откуда, как мы видели в **2.3.6**, оператор $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$, т. е. является ортогональным оператором.

Две фигуры, переводимые друг в друга движением, называются *конгруэнтными фигурами* [4].

4.2.2. Движения в координатах. Формулу (4.41) можно переписать в прямоугольных координатах в виде

$$'x^i = U^i_j x^j + a^i. \tag{4.42}$$

В частности, при $n = 2$ формулу (4.42) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} 'x^1 &= x^1 \cos\varphi - x^2 \sin\varphi + a^1, \\ 'x^2 &= x^1 \sin\varphi + x^2 \cos\varphi + a^2 \end{aligned}\right\} \tag{4.43}$$

или

$$\left.\begin{aligned} 'x^1 &= x^1 \cos\varphi + x^2 \sin\varphi + a^1, \\ 'x^2 &= x^1 \sin\varphi - x^2 \cos\varphi + a^2. \end{aligned}\right\} \tag{4.44}$$

Формула (4.42) отличается от формулы (2.21) преобразования прямоугольных координат тем, что здесь координаты x^i стоят в правой части, а координаты $'x^i$ — в левой части, а в формуле (2.21) — наоборот.

Отсюда, так же как для аффинных преобразований, следует, что *движения можно определить как такие преобразования евклидова пространства, при которых всякая точка с координатами x^i в некоторой системе прямоугольных координат переходит в точку с численно равными координатами в некоторой, вообще говоря другой, системе прямоугольных координат с теми же масштабами на осях.* Соотношение (2.21) можно переписать в виде (4.42) после замены координат x^i на $x^{i'}$ и обратно и соответственной замены коэффициентов $A^i_{i'}$ на U^i_j. На приведенном выше рис. 4.5 изображено преобразование прямоугольных координат и соответственное движение при $n = 2$.

4.2.3. Вращения и переносы. Частными случаями движений (4.41) являются движения

$$'\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{x}, \tag{4.45}$$

переводящие в себя начало O ($\mathbf{o}$) и называемые *вращениями* вокруг точки O, и *переносы* (4.22).

Вращения образуют группу по умножению, изоморфную группе ортогональных операторов по умножению, так как произведение вращений (4.45) и $'\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{x}$ имеет вид $'\mathbf{x} = (\mathbf{V}\mathbf{U})\mathbf{x}$, т. е. является вращением с оператором $\mathbf{V}\mathbf{U}$.

Тождественное преобразование является вращением с единичным оператором $\mathbf{U} = \mathbf{I}$, обратным преобразованием для вращения (4.45) является вращение

$$'\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}. \tag{4.46}$$

Группа вращений является подгруппой группы центроаффинных преобразований.

Так как вращение (4.45) определяется n^2 элементами матрицы (U^i_j) оператора $\mathbf{U}$, связанными $\frac{n(n+1)}{2}$ условиями (2.58) или (2.59), *группа вращений зависит от* $n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ *независимых вещественных параметров.*

4.2.4. Группа движений. Произведение двух движений также является движением, так как произведение двух преобразований, сохраняющих расстояния, также сохраняет расстояния. Произведение движений (4.41) и

$$'\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{4.47}$$

является движением

$$'\mathbf{x} = (\mathbf{V}\mathbf{U})\mathbf{x} + \mathbf{V}\mathbf{a} + \mathbf{b}. \tag{4.48}$$

Умножение движений ассоциативно, как умножение любых геометрических преобразований. Тождественное преобразование является движением, так как при тождественном преобразовании каждая точка переходит в себя и, следовательно, расстояния между точками не могут измениться. Обратным преобразованием для движения (4.42) является движение

$$'\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{U}^{-1}\mathbf{a}, \tag{4.49}$$

получающееся из преобразования (4.31) при $\mathbf{A} = \mathbf{U}$. Поэтому *движения образуют группу по умножению.* Эта группа является подгруппой группы аффинных преобразований; группы вращений и переносов, очевидно, являются подгруппами группы движений.

Так как движение (4.41) определяется $\frac{n(n-1)}{2}$ независимыми элементами матрицы (U^i_j) ортогонального оператора $\mathbf{U}$ и n координатами a^i вектора $\mathbf{a}$, *группа движений*

зависит от $\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$ *независимых вещественных параметров.*

Так же, как в случае группы аффинных преобразований, показывается, что *группа переносов является нормальным делителем группы движений.*

4.2.5. Задание движения. Так как движение является частным случаем аффинного преобразования, *для задания движения достаточно указать, в какие точки переходят*

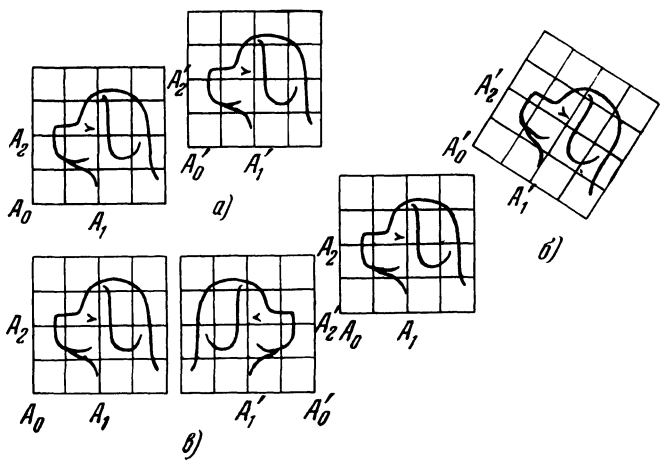

Рис. 4.10.

$n+1$ *точек, не лежащих на одной* $(n-1)$*-плоскости.* Для того чтобы определить движение, эти системы точек, очевидно, должны быть конгруэнтны, т. е. если движение определяется системами точек A_α и A'_α, то каждое расстояние $A_\alpha A_\beta$ должно быть равно соответствующему расстоянию $A'_\alpha A'_\beta$.

На рис. 4.10 изображены три вида движений 2-плоскости, определяемые точками A_0, A_1, A_2 и A'_0, A'_1, A'_2, являющимися смежными вершинами конгруэнтных квадратов. На рис. 4.10, *а* изображен перенос, на рис. 4.10, *б* — поворот, на рис. 4.10, *в* — отражение от прямой.

4.2.6. Движения первого и второго рода. Будем называть вращения и движения соответственно *вращениями и движениями первого или второго рода*, если они являются аффинными преобразованиями соответственного рода. Так же как в случае аффинных преобразований первого рода показывается, что *вращения и движения первого рода образуют группы по умножению*, причем группа движений первого рода зависит от того же числа независимых вещественных параметров, что и вся группа движений, и является нормальным делителем группы движений.

Так как определитель ортогональной матрицы (U_j^i), являющейся матрицей оператора $\mathbf{U}$, равен ± 1, мы находим, что *определители матриц операторов движений первого рода равны* $+1$, *а определители матриц операторов движений второго рода равны* -1.

4.2.7. Неподвижные точки и инвариантные направления. Если точка M_0 $(\mathbf{x}_0)$ остается неподвижной при движении (4.41) — в этом случае это движение называется *вращением вокруг точки* M_0, — то вектор $\mathbf{x}_0$ удовлетворяет условию (4.35), которое здесь можно записать в виде

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{U})^{-1}\mathbf{a}, \tag{4.50}$$

и, следовательно, *всякое движение, для которого оператор* $\mathbf{I} - \mathbf{U}$ *является обратимым, является вращением вокруг единственной точки.*

Собственные векторы оператора $\mathbf{U}$ движения определяют *инвариантные направления* движения.

4.2.8. Мнимые векторы. Для дальнейшего исследования движений нам необходимо ввести *мнимые векторы вещественного линейного пространства.* Для этого определим *комплексное линейное n-пространство* — множество элементов произвольной природы, называемых векторами, в котором определены две операции — *сложение* и *умножение на комплексное число*, удовлетворяющие тем же аксиомам сложения, аксиомам умножения на число и аксиоме размерности, что и вещественное линейное n-пространство (1.2.2, 1.2.3 и 1.2.5), с той разницей, что умно-

жение происходит не на вещественные, а на комплексные числа.

Если в комплексном линейном n-пространстве выделить векторы, все координаты x^i которых относительно какого-нибудь базиса вещественны, мы получим вещественное линейное n-пространство, погруженное в комплексное n-пространство.

Для определения мнимых векторов вещественного линейного n-пространства следует представить себе вещественное n-пространство погруженным в комплексное n-пространство в виде множества векторов с вещественными координатами. Тогда комплексные векторы, не входящие в состав вещественного n-пространства, мы будем называть *мнимыми векторами* этого вещественного пространства [5].

Всякому линейному оператору вещественного n-пространства соответствует линейный оператор комплексного n-пространства, действие которого на базисные векторы $\mathbf{e}_i$ совпадает с его действием исходного оператора на эти векторы, являющиеся вещественными векторами, и действие которого на произвольные комплексные векторы $\mathbf{z} = z^i\mathbf{e}_i$ определяется по закону

$$\mathbf{Az} = z^i(\mathbf{Ae}_i).$$

В том случае, когда линейный оператор, полученный указанным способом из вещественного линейного оператора $\mathbf{A}$, обладает мнимыми собственными векторами, соответствующими мнимым собственным числам, мы будем говорить, что оператор $\mathbf{A}$ обладает мнимыми собственными векторами и мнимыми собственными числами, которые мы будем отличать от вещественных собственных векторов и вещественных собственных чисел этого оператора.

4.2.9. Изотропные векторы. Для мнимых векторов евклидова n-пространства также можно определить скалярное произведение; таким произведением мнимых векторов $\mathbf{z} = z^i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{w} = w^i\mathbf{e}_i$ является комплексное число

$$\mathbf{zw} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j z^i w^j.$$

Это скалярное произведение удовлетворяет аксиомам IV,1°—4° скалярного произведения вещественных векторов.

В то же время, в отличие от вещественных векторов, для мнимых векторов не выполняется аксиома IV,5°, так как скалярный квадрат

$$\mathbf{z}^2 = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j z^i z^j$$

мнимого вектора $\mathbf{z}$ в общем случае является комплексным числом.

Среди мнимых векторов евклидова пространства особую роль играют векторы, для которых $\mathbf{z}^2 = 0$. Эти векторы называются *изотропными векторами*. Очевидно, что ортогональные операторы переводят изотропные векторы в изотропные; поэтому изотропные векторы переходят друг в друга при вращениях пространства, а при вращениях первого рода на 2-плоскости каждое из двух направлений изотропных векторов 2-плоскости переходит в себя (этим свойством изотропных направлений 2-плоскости и объясняется название этих направлений) [6].

4.2.10. Канонический вид матрицы ортогонального оператора. Классификация вращений евклидова n-пространства сводится к классификации ортогональных операторов $\mathbf{U}$ этого пространства.

Прежде всего покажем, что *собственные числа оператора* $\mathbf{U}$, *соответствующие неизотропным собственным векторам, равны* $+1$ *или* -1, *а собственные векторы этого оператора, соответствующие собственным числам, отличным от* ± 1, *изотропны*. В самом деле, при действии оператора $\mathbf{U}$ скалярный квадрат $\mathbf{z}^2$ вектора не изменяется, т. е. если при действии оператора вектор $\mathbf{z}$ переходит в вектор $\lambda\mathbf{z}$, то

$$(\mathbf{U}\mathbf{z})^2 = (\lambda\mathbf{z})^2 = \lambda^2\mathbf{z}^2 = \mathbf{z}^2,$$

откуда следует, что при $\mathbf{z}^2 \neq 0$ должно быть $\lambda^2 = 1$, т. е. $\lambda = \pm 1$, а при $\lambda \neq \pm 1$ должно быть $\mathbf{z}^2 = 0$.

Собственные векторы оператора $\mathbf{U}$, *соответствующие двум различным собственным числам, перпендикулярны, за исключением того случая, когда соответственные собственные числа взаимно обратны*. В самом деле, если $\mathbf{U}\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$ и $\mathbf{U}\mathbf{w} = \mu\mathbf{w}$, то

$$\mathbf{U}\mathbf{z}\mathbf{U}\mathbf{w} = \lambda\mu\mathbf{z}\mathbf{w} = \mathbf{z}\mathbf{w},$$

откуда следует, что или $\mathbf{zw} = 0$, т. е. векторы перпендикулярны, или $\lambda\mu = 1$, т. е. $\mu = \frac{1}{\lambda}$.

Если оператор $\mathbf{U}$ *обладает собственным числом* λ, *то он обладает также собственным числом* $\frac{1}{\lambda}$ *той же кратности, что и* λ. Для ортогонального оператора $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}$ и, следовательно, уравнения (1.62) для операторов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}^{-1}$, корнями которых являются собственные числа этих операторов, совпадают, так как левые части этих уравнений — определители матриц, получающихся друг из друга транспонированием. Поэтому собственные числа операторов $\mathbf{U}$ и $\mathbf{U}^{-1}$ совпадают. С другой же стороны, собственные числа двух взаимно обратных операторов взаимно обратны. Поэтому для всякого собственного вектора $\mathbf{z}$ оператора $\mathbf{U}$, соответствующего собственному числу λ, не равному ± 1, существует другой собственный вектор $\mathbf{z}^*$ того же оператора, соответствующий собственному числу $\frac{1}{\lambda}$.

Комплексные собственные числа оператора $\mathbf{U}$ *являются комплексными числами единичного модуля.* В самом деле, пусть λ и $\bar{\lambda}$ — два комплексно сопряженных собственных числа, $\mathbf{z}$ и $\bar{\mathbf{z}}$ — два соответствующих им собственных вектора. Если бы $|\lambda|$ не было равно 1, то произведение $\lambda\bar{\lambda}$ также не было равно 1 и векторы $\mathbf{z}$ и $\bar{\mathbf{z}}$ были бы перпендикулярны, но скалярное произведение этих векторов в случае базиса системы прямоугольных координат ($\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$) равно

$$\bar{\mathbf{z}}\mathbf{z} = z^1\bar{z}^1 + \ldots + z^n\bar{z}^n = |z^1|^2 + \ldots + |z^n|^2 > 0$$

и векторы $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}$ не могут быть перпендикулярны.

Матрица оператора $\mathbf{U}$ *всегда приводится к диагональному виду.* В самом деле, если бы матрица оператора $\mathbf{U}$ не приводилась бы к диагональному виду, то для одного из ее собственных чисел существовал бы вектор $\mathbf{z}$, не являющийся собственным вектором и удовлетворяющий условию

$$(\mathbf{U} - \lambda\mathbf{I})^2\,\mathbf{z} = \mathbf{o}. \tag{4.51}$$

Покажем, что это невозможно, т. е. всякий вектор $\mathbf{z}$, удовлетворяющий условию (4.51), является собственным

вектором. Обозначим вектор $(\mathbf{U}-\lambda\mathbf{I})\,\mathbf{z}$ через $\mathbf{w}$. Если λ — комплексное число, то вектор $\mathbf{w}$ мнимый и сопряженный с ним мнимый вектор имеет вид

$$\bar{\mathbf{w}} = (\mathbf{U}-\bar{\lambda}\mathbf{I})\,\bar{\mathbf{z}} = \frac{1}{\lambda}(\lambda\mathbf{U}-\mathbf{I})\,\bar{\mathbf{z}}.$$

Поэтому

$$\mathbf{w}\bar{\mathbf{w}} = (\mathbf{U}-\lambda\mathbf{I})\,\mathbf{z}\,\frac{1}{\lambda}(\lambda\mathbf{U}-\mathbf{I})\,\bar{\mathbf{z}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda}(\lambda\mathbf{U}\mathbf{z}\mathbf{U}\bar{\mathbf{z}} - \bar{\mathbf{z}}\mathbf{U}\mathbf{z} - \lambda^2\mathbf{z}\mathbf{U}\bar{\mathbf{z}} + \lambda\mathbf{z}\bar{\mathbf{z}}).$$

Но

$$\bar{\mathbf{z}}\mathbf{U}\mathbf{z} = \mathbf{U}\bar{\mathbf{z}}\mathbf{U}^2\mathbf{z}, \qquad \mathbf{z}\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{U}\mathbf{z}\mathbf{U}\bar{\mathbf{z}}$$

и

$$\mathbf{w}\bar{\mathbf{w}} = -\frac{1}{\lambda}(\lambda^2\mathbf{z}\mathbf{U}\bar{\mathbf{z}} - 2\lambda\mathbf{U}\mathbf{z}\mathbf{U}\bar{\mathbf{z}} + \mathbf{U}\bar{\mathbf{z}}\mathbf{U}^2\mathbf{z}) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda}(\lambda^2\mathbf{I} - 2\lambda\mathbf{U} + \mathbf{U}^2)\,\mathbf{z}\mathbf{U}\bar{\mathbf{z}} = -\frac{1}{\lambda}(\mathbf{U}-\lambda\mathbf{I})^2\,\mathbf{z}\mathbf{U}\bar{\mathbf{z}} = 0.$$

Поэтому, в силу (4.51), в случае базиса системы прямоугольных координат

$$\mathbf{w}\bar{\mathbf{w}} = w^1\bar{w}^1 + \ldots + w^n\bar{w}^n = |w^1|^2 + \ldots + |w^n|^2 = 0,$$

откуда следует, что $\mathbf{w}=\mathbf{o}$, т. е. $\mathbf{U}\mathbf{z}=\lambda\mathbf{z}$, и $\mathbf{z}$ — собственный вектор. Если λ — вещественное число, т. е. ± 1, то доказательство совершенно такое же с тем упрощением, что здесь $\mathbf{z}=\bar{\mathbf{z}}$ и $\lambda=\bar{\lambda}$.

Таким образом, матрица оператора $\mathbf{U}$ приводится к диагональному виду $U^i_j = u_i\delta^i_j$, причем среди диагональных элементов u_i k_1 раз встречается $e^{i\varphi_1}$ и $e^{-i\varphi_1}$, k_2 раз встречается $e^{i\varphi_2}$ и $e^{-i\varphi_2}$, ..., k_r раз встречается $e^{i\varphi_r}$ и $e^{-i\varphi_r}$, k_0 раз встречается 1 и k_{-1} раз встречается -1.

Среди мнимых собственных векторов, соответствующих k_α-кратному собственному числу $e^{i\varphi_\alpha}$, можно выбрать k_α взаимно перпендикулярных векторов; сопряженные с ними векторы — собственные векторы, соответствующие собственному числу $e^{-i\varphi_\alpha}$. Среди вещественных собственных векторов, соответствующих k_0-кратному собственному числу 1 и k_{-1}-кратному собственному числу -1, также мож-

но выбрать, соответственно, k_0 и k_{-1} взаимно перпендикулярных векторов, причем каждый собственный вектор перпендикулярен всем остальным собственным векторам кроме тех, которые соответствуют обратному собственному числу.

Матрицу оператора U можно привести и к вещественному каноническому виду. Для этого достаточно заменить каждую пару мнимо сопряженных собственных векторов $\mathbf{f}_i$, $\bar{\mathbf{f}}_i$ парой вещественных векторов

$$\mathbf{e}_{2i-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_i + \bar{\mathbf{f}}_i), \quad \mathbf{e}_{2i} = \frac{1}{2i}(\mathbf{f}_i - \bar{\mathbf{f}}_i),$$

т. е.

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_{2i-1} + i\mathbf{e}_{2i}, \quad \bar{\mathbf{f}}_i = \mathbf{e}_{2i-1} - i\mathbf{e}_{2i}.$$

Так как

$$\mathbf{U}\mathbf{f}_i = e^{i\varphi_i}\mathbf{f}_i, \quad \mathbf{U}\bar{\mathbf{f}}_i = e^{-i\varphi_i}\mathbf{f}_i,$$

то

$$\mathbf{U}\mathbf{e}_{2i-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}\mathbf{f}_i + \mathbf{U}\bar{\mathbf{f}}_i) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi}\mathbf{f}_i + e^{-i\varphi}\bar{\mathbf{f}}_i) =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{i\varphi}\mathbf{e}_{2i-1} + ie^{i\varphi}\mathbf{e}_{2i} + e^{-i\varphi}\mathbf{e}_{2i-1} - ie^{-i\varphi}\mathbf{e}_{2i}) =$$

$$= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\mathbf{e}_{2i-1} - \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\mathbf{e}_{2i} = \mathbf{e}_{2i-1}\cos\varphi - \mathbf{e}_{2i}\sin\varphi,$$

$$\mathbf{U}\mathbf{e}_{2i} = \frac{1}{2i}(\mathbf{U}\mathbf{f}_i - \mathbf{U}\bar{\mathbf{f}}_i) = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi}\mathbf{f}_i - e^{-i\varphi}\bar{\mathbf{f}}_i) =$$

$$= \frac{1}{2i}(e^{i\varphi}\mathbf{e}_{2i-1} + ie^{i\varphi}\mathbf{e}_{2i} - e^{-i\varphi}\mathbf{e}_{2i-1} + ie^{-i\varphi}\mathbf{e}_{2i}) =$$

$$= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\mathbf{e}_{2i-1} + \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\mathbf{e}_{2i} = \mathbf{e}_{2i-1}\sin\varphi + \mathbf{e}_{2i}\cos\varphi,$$

т. е. векторы $\mathbf{e}_{2i-1}$ и $\mathbf{e}_{2i}$ и, следовательно, все их линейные комбинации, при действии оператора U поворачиваются на угол φ.

Так как в силу изотропности векторов $\mathbf{f}_i$ и $\bar{\mathbf{f}}_i$

$$\mathbf{e}_{2i-1}\mathbf{e}_{2i} = \frac{1}{4i}(\mathbf{f}_i^2 - \bar{\mathbf{f}}_i^2) = 0,$$

то построенные нами вещественные векторы $\mathbf{e}_{2i-1}$ и $\mathbf{e}_{2i}$ для всех мнимых собственных чисел вместе с выбранными нами собственными векторами, соответствующими собст-

венным числам $+1$ и -1, взаимно перпендикулярны. Умножением на надлежащие множители можно сделать эти векторы единичными. В этом случае эти векторы образуют базис системы прямоугольных координат евклидова n-пространства. Матрица оператора $\mathbf{U}$ в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \mathbf{U}_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \mathbf{U}_r & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \mathbf{U}_r \\ & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & -1 \\ & & & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}, \qquad (4.52)$$

где $\mathbf{U}_i$ — матрица второго порядка

$$\mathbf{U}_i = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}.$$

4.2.11. Классификация вращений. Частными случаями ортогональных операторов $\mathbf{U}$ являются операторы $\mathbf{U} = \mathbf{I}$ и $\mathbf{U} = -\mathbf{I}$. В первом случае вращение имеет вид $'\mathbf{x} = \mathbf{x}$, т. е. является тождественным преобразованием, во втором случае вращение имеет вид $'\mathbf{x} = -\mathbf{x}$, т. е. является отражением от начала. В первом случае в матрице (4.52) отсутствуют все подматрицы кроме предпоследней, во втором случае в этой матрице отсутствуют все подматрицы кроме последней.

В случае, когда в матрице (4.52) имеются обе последние подматрицы, но отсутствуют все предыдущие подматрицы, вращение имеет вид

$$'x^a = x^a \ (a \leqslant m), \quad 'x^u = -x^u \ (u > m). \qquad (4.53)$$

Вращение (4.53) является частным случаем преобразования m-родства (4.40) при $\lambda = -1$. Так как здесь $\lambda = -1$, а базисные векторы взаимно перпендикулярны, это вращение является *прямым отражением от m-плоскости*, которое в общем случае выражается формулами (3.76) и (3.79).

В случае, когда в матрице (4.52) отсутствуют обе последние подматрицы, вращение имеет единственную неподвижную точку и называется *поворотом вокруг точки*. В случае, когда в матрице (4.52) отсутствует только последняя подматрица и кратность собственного числа 1 равна m, вращение называется *поворотом вокруг m-плоскости*. В случае, когда в матрице (4.52) отсутствует только предпоследняя подматрица и кратность собственного числа -1 равна m, вращение называется *поворотным отражением от $(n-m)$-плоскости*.

Поворот вокруг точки, как вытекает из вида матрицы (4.52), может иметь место только при четном n.

Заметим, что вращение (4.43) 2-плоскости является поворотом вокруг точки, а вращение (4.44) 2-плоскости является отражением от прямой.

4.2.12. Стационарные углы поворота. При повороте вокруг точки единичный вектор $\mathbf{x}$ с координатами x^i переходит в единичный вектор $'\mathbf{x}$, составляющий с вектором $\mathbf{x}$ некоторый угол φ, определяемый соотношением

$$\cos\varphi = \mathbf{x}'\mathbf{x} = [(x^1)^2 + \ldots + (x^{2k_1})^2]\cos\varphi_1 + \\ + [(x^{2k_1+1})^2 + \ldots + (x^{2k_1+2k_2})^2]\cos\varphi_2 + \ldots \\ \ldots + [(x^{2k_1+2k_2+\ldots+2k_{r-1}+1})^2 + \ldots + (x^n)^2]\cos\varphi_r. \quad (4.54)$$

Найдем векторы, для которых этот угол, а следовательно, и его косинус принимают стационарное значение. Для нахождения стационарных значений функции (4.54) при условии $\mathbf{x}^2 = 1$ составим вспомогательную функцию

$$U = \cos\varphi + \lambda\mathbf{x}^2.$$

Частные производные этой функции по x^i равны

$$\frac{\partial U}{\partial x^i} = 2x^i\cos\varphi_\alpha + 2\lambda x^i,$$

где

$$2k_1 + \ldots + 2k_{\alpha-1} < i \leqslant 2k_1 + \ldots + 2k_\alpha.$$

В случае, когда значение угла φ является стационарным, эти производные равны 0, т. е. имеют место соотношения

$$x^i \cos\varphi_\alpha + \lambda x^i = 0. \tag{4.55}$$

Умножая левые части этих равенств на x^i и суммируя по i, мы получаем, что

$$\cos\varphi + \lambda = 0.$$

Подставляя значение $\lambda = -\cos\varphi$ в (4.55), мы находим, что угол φ может иметь стационарное значение только в случае, когда он равен одному из углов φ_α. Таким образом, *углы φ_α являются стационарными углами, на которые поворачиваются векторы при повороте вокруг точки*. При этом на угол φ_α поворачиваются только те векторы, которые лежат в плоскости, определяемой собственными векторами, соответствующими собственным числам $e^{i\varphi_\alpha}$ и $e^{-i\varphi_\alpha}$. Среди стационарных значений угла φ имеется максимальное и минимальное значения этого угла.

4.2.13. Паратактический поворот. Поворот вокруг точки, все стационарные углы которого равны, называется *паратактическим поворотом*[7]. Этот поворот может быть записан в координатах в виде

$$\left.\begin{aligned} {}'x^{2i-1} &= x^{2i-1}\cos\varphi + x^{2i}\sin\varphi, \\ {}'x^{2i} &= -x^{2i-1}\sin\varphi + x^{2i}\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{4.56}$$

При паратактическом повороте каждый вектор пространства поворачивается на один и тот же угол, так как при $\varphi_1 = \ldots = \varphi_r = \varphi$ выражение (4.54) для $\cos\varphi$ не зависит от координат вектора.

При паратактическом повороте каждая 2-плоскость, определенная произвольным вектором $\mathbf{x}$ *и вектором* $\mathbf{Ux}$, *переходит в себя*. В самом деле, вектор $'\mathbf{x} = \mathbf{Ux}$, как видно из формулы (4.56) для его координат, выражается через вектор $\mathbf{x}$ и вектор $\tilde{\mathbf{x}}$ с координатами

$$\tilde{x}^{2i-1} = x^{2i}, \quad \tilde{x}^{2i} = -x^{2i-1}$$

по формуле

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{x}\cos\varphi + \tilde{\mathbf{x}}\sin\varphi.$$

Так как вектор $\tilde{\mathbf{x}}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{x}$, вектор $\mathbf{U}\tilde{\mathbf{x}}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{Ux}$ и имеет вид

$$\mathbf{U}\tilde{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}\sin\varphi + \tilde{\mathbf{x}}\cos\varphi.$$

Произвольный единичный вектор $\mathbf{y}$ в 2-плоскости, определяемой векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{Ux}$, имеет вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}\cos\psi + \tilde{\mathbf{x}}\sin\psi.$$

Поэтому вектор

$$\mathbf{Uy} = \mathbf{Ux}\cos\psi + \mathbf{U}\tilde{\mathbf{x}}\sin\psi$$

находится в той же 2-плоскости.

Определенные таким образом 2-плоскости называются *инвариантными 2-плоскостями паратактического поворота.*

4.2.14. Классификация движений. В случае, когда оператор $\mathbf{U}$ движения является единичным оператором $\mathbf{I}$, движение представляет собой перенос (4.22). В случае, когда оператор $\mathbf{U}$ имеет вид $-\mathbf{I}$, движение можно записать в виде

$$'\mathbf{x} = -\mathbf{x} + \mathbf{a}.$$

Сравнивая это движение, которое можно переписать в виде

$$'\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{a} = -\left(\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{a}\right), \tag{4.57}$$

с отражением от точки (3.82), мы находим, что это движение является отражением от точки $A\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}\right)$.

Заметим, что перенос (4.22) и отражение от точки (4.57) исчерпывают все движения, у которых все направления инвариантны, так как у аффинных преобразований, обладающих этим свойством, оператор имеет вид $\lambda\mathbf{I}$, а такой оператор является ортогональным оператором только при $\lambda = \pm 1$.

В случае, когда матрица оператора **U** имеет вид (4.52), где имеются обе последние подматрицы, но отсутствуют все предыдущие подматрицы, движение имеет вид

$$'x^a = x^a + a^a \ (a \leqslant m), \quad 'x^u = -x^u + a^u \ (u > m)$$

или, что равносильно этому,

$$\left.\begin{aligned} 'x^a &= x^a + a^a \quad (a \leqslant m), \\ 'x^u - \frac{1}{2} a^u &= -\left(x^u - \frac{1}{2} a^u\right) \quad (u > m). \end{aligned}\right\} \tag{4.58}$$

Это движение является произведением прямого отражения от m-плоскости $x^a = 0$ и переноса вдоль этой m-плоскости. Такое движение называется *переносным отражением*.

В случае, когда матрица оператора **U** имеет вид (4.52), где отсутствуют обе последние подматрицы, оператор $\mathbf{U} - \mathbf{I}$ является обратимым и движение имеет единственную неподвижную точку M_0 ($\mathbf{x}_0$) с радиус-вектором

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{U})^{-1}\mathbf{a} \tag{4.59}$$

и может быть записано в виде

$$'\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{U}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0); \tag{4.60}$$

это движение является вращением вокруг точки M_0. В случае, когда матрица оператора **U** имеет вид (4.52), где отсутствует последняя подматрица, движение имеет вид

$$'x^a = U^a_b x^b + a^a \ (a, b \leqslant m), \quad 'x^u = x^u + a^u \ (u > m). \tag{4.61}$$

Первые m строк записи (4.60) могут быть записаны в виде записи (4.41) движения в m-пространстве, причем матрица имеет вид (4.52), где отсутствуют обе последние подматрицы и поэтому оператор $\mathbf{U} - \mathbf{I}$ является обратимым и движение m-пространства имеет единственную неподвижную точку M_0 ($\mathbf{x}_0$) с радиус-вектором (4.59) и может быть записано в виде (4.60). Поэтому движение (4.61) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} 'x^a - x^a_0 &= U^a_b \ (x^b - x^b_0) \ (a, \ b \leqslant m), \\ 'x^u &= x^u + a^u \quad (u > m). \end{aligned}\right\} \tag{4.62}$$

Формула (4.62) показывает, что движение n-пространства в этом случае является произведением поворота вокруг $(n-m)$-плоскости $x^a = 0$ и переноса в направлении, параллельном этой $(n-m)$-плоскости. Такое движение называется *винтовым движением*. Прямая, проходящая через точку с координатами x_0^a, 0 в направлении вектора с координатами 0, a^u, называется *осью винтового движения*.

В основном случае, т. е. в случае минимального числа кратных собственных чисел оператора $\mathbf{U}$, число различных стационарных углов φ_α этого оператора равно $\frac{n-1}{2}$ при нечетном n и $\frac{n}{2}$ или $\frac{n}{2}-1$ при четном n. Углы φ_α в этом случае определяют взаимно перпендикулярные инвариантные 2-направления. Поэтому *движение первого рода в основном случае при нечетном n и при четном n и $\frac{n}{2}-1$ стационарных углах является винтовым движением, ось которого перпендикулярна всем инвариантным 2-направлениям движения, а при четном n и $\frac{n}{2}$ стационарных углах — поворотом вокруг точки.* В частности, при $n=2$ движение первого рода в основном случае является переносом или поворотом вокруг точки, при $n=3$ — винтовым движением, при $n=4$ — винтовым движением или поворотом вокруг точки [8].

4.2.15. Представление движений в виде произведения отражений от плоскостей. Покажем, что *всякое движение n-пространства является произведением не более $n+1$ прямых отражений от $(n-1)$-плоскостей.* В самом деле, пусть наше движение переводит $n+1$ точек $A_0, A_1, \ldots, A_n$, не лежащих в одной плоскости, в точки $A_0', A_1', \ldots, A_n'$. Построим плоскость α_0 симметрии точек A_0 и A_0' и отразим точки $A_0', A_1', \ldots, A_n'$ от плоскости α_0. При этом отражении точка A_0' перейдет в точку A_0, а точки $A_1', \ldots, A_n'$ перейдут в точки $A_1'', \ldots, A_n''$. Построим далее плоскость α_1 симметрии точек A_1 и A_1''; эта плоскость проходит через точку A_0, так как эта плоскость

пересекает 2-плоскость $A_0A_1A_1''$ по высоте равнобедренного треугольника $A_0A_1A_1''$. Отразим точки A_1'', A_2'', ..., A_n'' от плоскости α_1. При этом отражении точка A_1'' перейдет в точку A_1, а точки A_2'', A_3'', ..., A_n'' перейдут в точки A_2''', A_3''', ..., A_n'''. После m шагов у нас построены плоскости $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, причем плоскость α_k проходит через точки $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$ и точки $A_1'', A_2'', \ldots, A_n''$; ...; $A_m^{(m+1)}, \ldots, A_n^{(m+1)}$. Построим плоскость α_m симметрии точек A_m и $A_m^{(m+1)}$; эта плоскость пройдет через точки A_0, $A_1, \ldots, A_{m-1}$, так как она пересекает каждую из 2-плоскостей $A_kA_mA_m^{(m+1)}$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ по высоте равнобедренного треугольника $A_kA_mA_m^{(m+1)}$. Отразим точки $A_m^{(m+1)}$, $A_{m+1}^{(m+1)}, \ldots, A_n^{(m+1)}$ от плоскости α_m. При этом точка $A_m^{(m+1)}$ перейдет в точку A_m, а точки $A_{m+1}^{(m+1)}, \ldots, A_n^{(m+1)}$ перейдут в точки $A_{m+1}^{(m+2)}, \ldots, A_n^{(m+2)}$. Построенная таким образом плоскость α_{n-1} совпадает с плоскостью $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$, и при отражении от нее точка $A_n^{(n)}$ перейдет в точку A_n. Из нашего построения видно, что рассматриваемое движение является произведением отражений от плоскостей $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$. В случае, если в нашем построении точка $A_m^{(m+1)}$ совпадает с точкой A_m, плоскость α_m не строится и в этом случае движение является произведением отражений от плоскостей $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \ldots, \alpha_{m+1}, \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_0$.

Произведение отражений от двух пересекающихся плоскостей является поворотом вокруг $(n-2)$*-плоскости, по которой пересекаются данные плоскости, на угол, равный удвоенному углу между данными плоскостями.* В самом деле, расположим систему прямоугольных координат таким образом, чтобы первая из наших плоскостей определялась уравнением $x^1 = 0$, а вторая — уравнением $x^1 \cos\varphi + x^2 \sin\varphi = 0$. Эти плоскости пересекаются по $(n-2)$-плоскости $x^1 = x^2 = 0$ и составляют угол φ. Подставляя в формулу (3.49) для отражения от плоскости в первом случае $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$, $v = 0$, а во втором случае $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 \cos\varphi + \mathbf{e}_2 \sin\varphi$, $v = 0$, мы найдем выражение отражений от этих плоскостей в виде

$$'x^1 = -x^1, \quad 'x^i = x^i \ (i > 1) \tag{4.63}$$

и

$$\left.\begin{aligned} {}'x^1 &= -x^1 \cos 2\varphi - x^2 \sin 2\varphi, \\ {}'x^2 &= -x^1 \sin 2\varphi + x^2 \cos 2\varphi, \\ {}'x^i &= x^i \ (i > 2). \end{aligned}\right\} \tag{4.64}$$

Произведение отражений (4.64) и (4.63) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} {}'x^1 &= x^1 \cos 2\varphi + x^2 \sin 2\varphi, \\ {}'x^2 &= -x^1 \sin 2\varphi + x^2 \cos 2\varphi, \\ {}'x^i &= x^i \ (i > 2), \end{aligned}\right\} \tag{4.65}$$

т. е. является поворотом на угол 2φ вокруг $(n-2)$-плоскости $x^1 = x^2 = 0$.

Произведение отражений от двух параллельных плоскостей является переносом вдоль общего перпендикуляра этих плоскостей на расстояние, равное удвоенному расстоянию между этими плоскостями. В самом деле, расположим систему прямоугольных координат таким образом, чтобы первая из наших плоскостей определялась уравнением $x^1 = 0$, а вторая — уравнением $x^1 = a$. Эти плоскости параллельны и находятся на расстоянии a. Подставляя в формулу (3.49) $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1$, $v = a$, мы получим выражение отражения от второй из этих плоскостей в виде

$$'x^1 = -x^1 - 2a, \qquad 'x^i = x^i \qquad (i > 1). \tag{4.66}$$

Произведение отражений (4.66) и (4.63) имеет вид

$$'x^1 = x^1 + 2a, \qquad 'x^i = x^i \qquad (i > 1), \tag{4.67}$$

т. е. является переносом на вектор $2a\mathbf{e}_1$.

Так как отражение от плоскости является движением второго рода, а произведение двух отражений от плоскости является движением первого рода, *всякое движение первого рода является произведением четного числа отражений от плоскостей, а всякое движение второго рода является произведением нечетного числа отражений от плоскостей.*

Так как всякую пару плоскостей можно непрерывным преобразованием (например, непрерывным поворотом в случае пересекающихся плоскостей и непрерывным переносом в случае параллельных плоскостей) перевести в две

совпадающие плоскости, а произведение отражений от двух совпадающих плоскостей является тождественным преобразованием, то *произведение отражений от двух плоскостей всегда можно непрерывным преобразованием перевести в тождественное преобразование*; в формулах (4.65) и (4.67) (для произведений отражений от двух плоскостей) для этого достаточно положить $\varphi = \varphi_0 t$ и $a = a_0 t$ и устремить t к нулю. Поэтому *всякое движение первого*

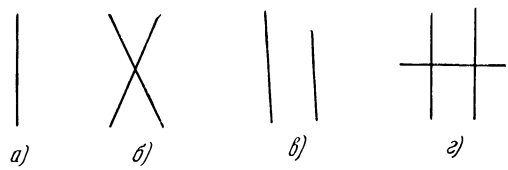

Рис. 4.11.

рода можно непрерывно преобразовать в тождественное преобразование, а всякое движение второго рода можно непрерывно преобразовать в отражение от плоскости и

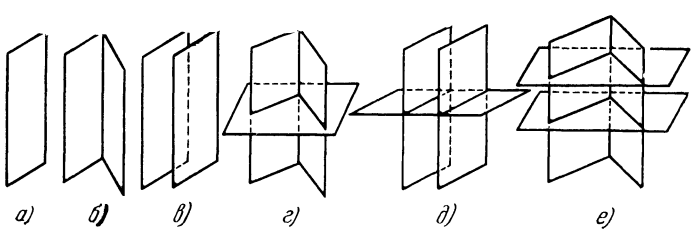

Рис. 4.12.

нельзя непрерывно преобразовать в тождественное преобразование. Отсюда вытекает, что *группы вращений и движений первого рода являются связными группами и что группы вращений и движений состоят из двух связных компонент, одна из которых состоит из движений первого рода, а другая — из движений второго рода.*

На рис. 4.11 изображены прямые, произведениями отражений от которых являются различные виды движений на плоскости: отражение от прямой (рис. 4.11, *а*),

поворот вокруг точки (рис. 4.11, *б*), перенос (рис. 4.11, *в*) и переносное отражение (рис. 4.11, *г*).

На рис. 4.12 изображены плоскости, произведениями отражений от которых являются различные виды движений 3-пространства: отражение от плоскости (рис. 4.12, *а*), поворот вокруг прямой (рис. 4.12, *б*), перенос (рис. 4.12, *в*), поворотное отражение (рис. 4.12, *г*), переносное отражение (рис. 4.12, *д*) и винтовое движение (рис. 4.12, *е*).

§ 3. Подобия

4.3.1. Подобия и подобные фигуры. Будем называть *подобием* евклидова n-пространства такое геометрическое преобразование, при котором все расстояния умножаются на одно и то же положительное число λ, называемое *коэффициентом подобия* [9]. Две фигуры, переводимые друг в друга подобием, называются *подобными фигурами*.

Гомотетия с коэффициентом λ является частным случаем подобия с коэффициентом $|\lambda|$. В самом деле, при гомотетии (4.38) точки $M(\mathbf{x})$ и $N(\mathbf{y})$ с расстоянием $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|$ переходят в точки M' и N' с радиус-векторами $'\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ и $'\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x}_0)$, обладающие расстоянием $|'\mathbf{y} - '\mathbf{x}| = |\lambda|\,|\mathbf{y}-\mathbf{x}|$.

Подобие с коэффициентом λ можно представить в виде произведения гомотетии с тем же коэффициентом и любым центром движения. В самом деле, произведение подобия с коэффициентом λ и гомотетии $'\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$, обратной для гомотетии (4.38), не изменяет расстояний между точками, т. е. является движением. Поэтому произведение этого движения на гомотетию (4.38) совпадает с данным подобием.

Перемножая гомотетию (4.38) и движение (4.41), мы получим выражение подобия

$$'\mathbf{x} = \lambda\mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{a}, \tag{4.68}$$

где $\mathbf{U}$ — ортогональный оператор.

4.3.2. Подобия в координатах. Формулу (4.68) можно переписать в координатах в виде

$$'x^i = \lambda U^i_j x^j + a^i. \tag{4.69}$$