поворот вокруг точки (рис. 4.11, *б*), перенос (рис. 4.11, *в*) и переносное отражение (рис. 4.11, *г*).

На рис. 4.12 изображены плоскости, произведениями отражений от которых являются различные виды движений 3-пространства: отражение от плоскости (рис. 4.12, *а*), поворот вокруг прямой (рис. 4.12, *б*), перенос (рис. 4.12, *в*), поворотное отражение (рис. 4.12, *г*), переносное отражение (рис. 4.12, *д*) и винтовое движение (рис. 4.12, *е*).

§ 3. Подобия

4.3.1. Подобия и подобные фигуры. Будем называть *подобием* евклидова n-пространства такое геометрическое преобразование, при котором все расстояния умножаются на одно и то же положительное число λ, называемое *коэффициентом подобия* [9]. Две фигуры, переводимые друг в друга подобием, называются *подобными фигурами*.

Гомотетия с коэффициентом λ является частным случаем подобия с коэффициентом $|\lambda|$. В самом деле, при гомотетии (4.38) точки $M(\mathbf{x})$ и $N(\mathbf{y})$ с расстоянием $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|$ переходят в точки M' и N' с радиус-векторами $'\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ и $'\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x}_0)$, обладающие расстоянием $|'\mathbf{y} - '\mathbf{x}| = |\lambda|\,|\mathbf{y}-\mathbf{x}|$.

Подобие с коэффициентом λ можно представить в виде произведения гомотетии с тем же коэффициентом и любым центром движения. В самом деле, произведение подобия с коэффициентом λ и гомотетии $'\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$, обратной для гомотетии (4.38), не изменяет расстояний между точками, т. е. является движением. Поэтому произведение этого движения на гомотетию (4.38) совпадает с данным подобием.

Перемножая гомотетию (4.38) и движение (4.41), мы получим выражение подобия

$$'\mathbf{x} = \lambda\mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{a}, \tag{4.68}$$

где $\mathbf{U}$ — ортогональный оператор.

4.3.2. Подобия в координатах. Формулу (4.68) можно переписать в координатах в виде

$$'x^i = \lambda U^i_j x^j + a^i. \tag{4.69}$$

Сравнивая эту формулу с формулой (2.21) преобразования прямоугольных координат, мы находим, что *подобия можно определить как такие преобразования аффинного пространства, при которых каждая точка с координатами x^i в некоторой системе прямоугольных координат переходит в точку с численно равными координатами в некоторой системе прямоугольных координат, вообще говоря, с другими масштабами на осях.*

4.3.3. Группа подобий. Произведение двух подобий также является подобием, так как произведение двух преобразований, при которых все расстояния умножаются на одни и те же числа, также является преобразованием, при котором все расстояния умножаются на одно и то же число. Произведение преобразований (4.68) и

$$'\mathbf{x} = \mu \mathbf{V}\mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{4.70}$$

является подобием

$$'\mathbf{x} = \lambda\mu (\mathbf{V}\mathbf{U})\, \mathbf{x} + \mu \mathbf{V}\mathbf{a} + \mathbf{b}. \tag{4.71}$$

Умножение подобий ассоциативно как умножение любых геометрических преобразований. Тождественное преобразование, очевидно, является подобием, обратным преобразованием для преобразования (4.68) является преобразование

$$'\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{U}^{-1}\mathbf{a}. \tag{4.72}$$

Поэтому *подобия образуют группу по умножению.* Эта группа является подгруппой группы аффинных преобразований. Так как преобразование (4.68) зависит от тех же параметров, что и движение (4.41), и независимого от них параметра λ, *группа подобий зависит от* $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ *независимых вещественных параметров.*

Будем называть подобия *подобиями первого или второго рода*, если они являются аффинными преобразованиями соответствующего рода. Так же, как в случае аффинных преобразований первого рода, показывается, что *подобия первого рода образуют группу по умножению*, которая зависит от того же числа независимых веществен-

ных параметров, что и вся группа подобий, и является нормальным делителем группы подобий. Из того, что гомотетию с положительным коэффициентом можно непрерывно преобразовать в тождественное преобразование (устремляя этот коэффициент к 1), и из свойств движений первого и второго рода следует, что *группа подобий первого рода является связной группой* и что *группа подобия состоит из двух связных компонент, одна из которых состоит из подобий первого рода, а другая из подобий второго рода.*

Группа движений, очевидно, является подгруппой группы подобий, так как движения можно рассматривать как подобия с коэффициентом 1. Если мы поставим в соответствие всякому преобразованию подобия (4.68) положительное число λ, то, как видно из формулы (4.71), *группа подобий гомоморфна группе положительных чисел по умножению.* Так как при этом гомоморфизме числу 1 соответствуют движения, *ядром этого гомоморфизма является группа движений.* Поэтому *группа движений является нормальным делителем группы подобий.*

4.3.4. Центр подобия. Так как для оператора λU подобия при $\lambda \neq 1$ разность $\lambda U - I$ всегда является обратимым оператором, *подобие, не являющееся движением, всегда обладает единственной неподвижной точкой.* Эта точка называется *центром подобия* для любых двух подобных фигур, получаемых друг из друга данным подобием [10].

4.3.5. Группа гомотетий и переносов. Гомотетию (4.38) можно записать также в виде

$$'\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mathbf{a}, \tag{4.73}$$

где $\mathbf{a} = (1 - \lambda)\,\mathbf{x}_0$. Произведение гомотетии (4.73) и гомотетии

$$'\mathbf{x} = \mu\mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{4.74}$$

имеет вид

$$'\mathbf{x} = \lambda\mu\mathbf{x} + \mu\mathbf{a} + \mathbf{b}, \tag{4.75}$$

т. е. при $\lambda\mu \neq 1$ является гомотетией, а при $\lambda\mu = 1$ является переносом. Таким образом, *произведение двух*

гомотетий, коэффициенты которых не взаимно обратны, является снова гомотетией, а произведение двух гомотетий с взаимно обратными коэффициентами является переносом.

Покажем, что *если произведение двух гомотетий является гомотетией, то центры этих трех гомотетий лежат на одной прямой.* В самом деле, так как радиус-вектор центра гомотетии (4.73) равен $\mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{a}}{1-\lambda}$ и, аналогично, радиус-векторы центров гомотетий (4.74) и (4.75) равны соответственно $\mathbf{y}_0 = \frac{\mathbf{b}}{1-\mu}$ и $\mathbf{z}_0 = \frac{\mu\mathbf{a}+\mathbf{b}}{1-\lambda\mu}$, то, составляя разности

$$\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{b}}{1-\mu} - \frac{\mathbf{a}}{1-\lambda} = \frac{(1-\lambda)\,\mathbf{b} - (1-\mu)\,\mathbf{a}}{(1-\lambda)(1-\mu)},$$

$$\mathbf{z}_0 - \mathbf{x}_0 = \frac{\mu\mathbf{a}+\mathbf{b}}{1-\lambda\mu} - \frac{\mathbf{a}}{1-\lambda} = \frac{(1-\lambda)\,\mathbf{b} - (1-\mu)\,\mathbf{a}}{(1-\lambda)(1-\lambda\mu)},$$

мы убеждаемся, что эти векторы коллинеарны.

Так как произведение двух гомотетий является гомотетией или переносом, произведение двух переносов является переносом, а произведение гомотетии и переноса, как легко проверить, является гомотетией, умножение гомотетий и переносов ассоциативно, тождественное преобразование является частным случаем переноса, а обратное преобразование для гомотетии и переноса является, соответственно, гомотетией и переносом, *гомотетии и переносы образуют группу по умножению.* Эта группа является подгруппой группы подобий. Так как гомотетии (4.73) зависят от n координат вектора $\mathbf{a}$ и независимого от них числа λ, *группа гомотетий и переносов зависит от $n+1$ независимых вещественных параметров.*

Если мы поставим в соответствие всякому преобразованию подобия (4.68) оператор $\mathbf{U}$, то, как видно из формулы (4.71), группа подобий гомоморфна группе ортогональных операторов. Так как при этом гомоморфизме единичному оператору $\mathbf{I}$ соответствуют все гомотетии и переносы, *ядром этого гомоморфизма является группа гомотетий и переносов.* Поэтому *группа гомотетий и переносов является нормальным делителем группы подобий.*