

Многогранники

§ 1. Прямолинейные отрезки

5.1.1. **Лучи и отрезки.** Если в уравнении

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{a} \quad (5.1)$$

прямой линии придавать параметру t только неотрицательные значения $t \geq 0$, мы получим *прямолинейный луч* с вершиной $A(\mathbf{x}_0)$. Если придавать параметру t в том же уравнении (5.1) только значения $0 \leq t \leq 1$, мы получим *прямолинейный отрезок* с концами $A(\mathbf{x}_0)$ и $B(\mathbf{x}_0 + \mathbf{a})$. Условимся называть луч с вершиной A , проходящий через точку B , *лучом AB* , в отрезок с концами A и B , соответственно, *отрезком AB* .

5.1.2. **Длина отрезка.** Расстояние AB называется *длиной отрезка AB* . Как видно из определения длины отрезка, она обладает следующими свойствами.

1°. Длина отрезка *инвариантна* при движениях, т. е. если точки A и B переходят при движении в точки A' и B' , то

$$AB = A'B'.$$

2°. Длина отрезка *аддитивна*, т. е. если отрезок AC состоит из отрезков AB и BC , то

$$AC = AB + BC.$$

3°. Длина отрезка *позитивна*, т. е.

$$AB > 0, \text{ если } A \neq B,$$

$$AB = 0, \text{ если } A = B.$$

Покажем, что всякая числовая функция $f(AB)$ отрезка AB , обладающая

1° инвариантностью при движениях, т. е. если точки A и B переходят при движении в точки A' и B' , то

$$f(AB) = f(A'B'),$$

2° аддитивностью, т. е. если отрезок AC состоит из отрезка AB и BC , то

$$f(AC) = f(AB) + f(BC),$$

3° позитивностью, т. е.

$$f(AB) > 0, \text{ если } A \neq B,$$

$$f(AB) = 0, \text{ если } A = B,$$

отличается от расстояния AB только постоянным множителем¹.

В самом деле, в силу свойства 1° функция $f(AB)$ отрезка является функцией его длины; будем обозначать эту числовую функцию неотрицательного числового аргумента $f(x)$.

В силу свойства 3°

$$f(0) = 0, \quad f(x) > 0, \quad \text{если } x > 0. \quad (5.2)$$

В силу свойства 2°

$$f(x + x') = f(x) + f(x'). \quad (5.3)$$

Поэтому для любого натурального числа n

$$f(nx) = f(\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ раз}}) = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n \text{ раз}} = nf(x),$$

т. е.

$$f(nx) = nf(x). \quad (5.4)$$

В частности, при $x = \frac{1}{n}$ соотношение (5.4) можно переписать в виде

$$f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right),$$

т. е.

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(1). \quad (5.5)$$

Из формулы (5.5) для любого натурального числа m получаем

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{n}\right) &= f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m \text{ раз}}\right) = \\ &= \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{n}\right)}_{m \text{ раз}} = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1), \end{aligned}$$

т. е.

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1). \quad (5.6)$$

В силу свойства (5.2), если $0 < x < x'$

$$f(x') = f(x) + f(x' - x) > f(x),$$

т. е. функция $f(x)$ является возрастающей функцией.

Для всякого положительного иррационального числа x при сколь угодно большом натуральном числе n всегда можно найти такое натуральное число m , что

$$\frac{m}{n} < x < \frac{m+1}{n}. \quad (5.7)$$

В силу того, что функция $f(x)$ является возрастающей, из неравенств (5.7) вытекает неравенство

$$f\left(\frac{m}{n}\right) < f(x) < f\left(\frac{m+1}{n}\right),$$

которое в силу формулы (5.6) можно переписать в виде

$$\frac{m}{n} f(1) < f(x) < \frac{m+1}{n} f(1)$$

или

$$\frac{m}{n} < \frac{f(x)}{f(1)} < \frac{m+1}{n}. \quad (5.8)$$

Так как разность между рациональными числами $\frac{m}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ может быть сделана сколь угодно малой, то последовательности рациональных чисел $a_n = \frac{m}{n}$ и $b_n = \frac{m+1}{n}$ стремятся к одному пределу, который в силу (5.7) и (5.8) имеет вид

$$\frac{f(x)}{f(1)} = x.$$

Поэтому

$$f(x) = xf(1), \quad (5.9)$$

и функция $f(x)$ отличается от длины отрезка x только постоянным множителем $f(1)$.

5.1.3. Ориентированные отрезки. Будем называть отрезки, на которых указана ориентация, *ориентированными отрезками*; два конца ориентированного отрезка называются *началом* и *концом*. Ориентированный отрезок с началом A и концом B обозначается \overrightarrow{AB} .

Если на прямой задана положительная ориентация, то всякому ориентированному отрезку этой прямой можно поставить в соответствие *относительную длину* — число, по абсолютной величине равное длине этого отрезка, положительное в случае, когда ориентация отрезка совпадает с положительной ориентацией прямой, и отрицательное в случае, когда ориентация отрезка противоположна положительной ориентации прямой. Относительная длина отрезка \overrightarrow{AB} обозначается также \overline{AB} . Таким образом, символом \overrightarrow{AB} обозначаются ориентированный отрезок, его относительная длина и вектор, определяемый этим отрезком. Заметим, что относительная длина отрезка \overrightarrow{AB} может быть записана также в виде $\{\overrightarrow{AB}\}$, где \overrightarrow{AB} — соответственный вектор.

Оrientированные отрезки, которым ставится в соответствие один и тот же вектор, называются *эквивалентными*, эквивалентные отрезки имеют равные длины и совпадающие ориентации, они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Очевидно, что векторы n -пространства находятся во взаимно однозначном соот-

ветствии с классами эквивалентных ориентированных отрезков.

5.1.4. Отношения отрезков. Если нам даны два отрезка \overline{AB} и \overline{CD} на одной и той же прямой или на двух параллельных прямых, то векторы \overline{AB} и \overline{CD} коллинеарны, т.е.

$$\overline{AB} = \lambda \overline{CD}. \quad (5.10)$$

Число λ , определяемое соотношением (5.10), называется *отношением* ориентированного отрезка \overline{AB} к ориентированному отрезку \overline{CD} и обозначается

$$\lambda = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}. \quad (5.11)$$

5.1.5. Деление отрезка в данном отношении. Если нам даны три точки A, B, C одной прямой, то число

$$\overline{AB}, \overline{C} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad (5.12)$$

называется *отношением трех точек* A, B, C . Если отношение трех точек A, B, C равно λ , говорят, что *точка C делит отрезок \overline{AB} в отношении λ* . В этом случае

$$\overline{AC} = \lambda \overline{BC}. \quad (5.13)$$

Если радиусы-векторы точек A, B, C соответственно равны x_1, x_2 и x , то равенство (5.13) можно переписать в виде

$$x - x_1 = \lambda(x - x_2), \text{ откуда } (1 - \lambda)x = x_1 - \lambda x_2$$

и

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}. \quad (5.14)$$

Векторное равенство (5.14) равносильно координатным равенствам

$$x^i = \frac{x_1^i - \lambda x_2^i}{1 - \lambda}. \quad (5.15)$$

В случае, когда $\overline{AC} = \overline{CB}$, т. е. $\lambda = -1$, точка C называется *серединой* отрезка AB . В этом случае формулы

(5.14) и (5.15) принимают вид $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}$ и $x^i = \frac{x_1^i + x_2^i}{2}$;

последняя формула показывает, что координаты середины отрезка являются средними арифметическими координат его концов.

Если два ориентированных отрезка \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} с начальными $A(\mathbf{x}_1)$ и $C(\mathbf{y}_1)$ и концами $B(\mathbf{x}_2)$ и $D(\mathbf{y}_2)$ эквивалентны, то $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1$, откуда вытекает, что

$$\frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_2}{2} = \frac{\mathbf{y}_1 + \mathbf{x}_2}{2},$$

и обратно, из этого равенства вытекает равенство векторов $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и эквивалентность соответственных отрезков. Поэтому *необходимым и достаточным условием эквивалентности ориентированных отрезков \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD}* является *совпадение середин отрезков AD и BC* .

5.1.6. Отношения отрезков при аффинных преобразованиях. Рассмотрим два ориентированных отрезка \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} на одной и той же прямой или на двух параллельных прямых и подвергнем их аффинному преобразованию

$$'x = Ax + b. \quad (5.16)$$

Преобразование (5.16) переводит эти отрезки в отрезки $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{C'D'}$. Если радиус-векторы точек A, B, C, D — векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$, а радиус-векторы точек A', B', C', D' — векторы $'\mathbf{x}_1, '\mathbf{x}_2, '\mathbf{y}_1, '\mathbf{y}_2$, то

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad \overrightarrow{CD} = \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1, \\ \overrightarrow{A'B'} &= '\mathbf{x}_2 - '\mathbf{x}_1, \quad \overrightarrow{C'D'} = '\mathbf{y}_2 - '\mathbf{y}_1.\end{aligned}$$

Но так как

$$\begin{aligned}'\mathbf{x}_1 &= Ax_1 + b, & '\mathbf{x}_2 &= Ax_2 + b, \\ '\mathbf{y}_1 &= Ay_1 + b, & '\mathbf{y}_2 &= Ay_2 + b,\end{aligned}$$

то векторы $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{C'D'}$ связаны с векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} соотношениями

$$\overrightarrow{A'B'} = A\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{C'D'} = A\overrightarrow{CD},$$

и если $\overline{AB} = \lambda \overline{CD}$, то и

$$\overline{A'B'} = \lambda \overline{C'D'}.$$

Таким образом, отношения ориентированных отрезков не изменяются при аффинных преобразованиях.

§ 2. Параллелепипеды

5.2.1. Полуплоскости и параллелепипеды. Если в уравнении

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_a t^a \quad (5.17)$$

m -плоскости придавать одному из параметров t^b только неотрицательные значения $t^b \geq 0$, а остальным параметрам — произвольные действительные значения, мы получим m -полуплоскость, ограничиваемую $(m - 1)$ -плоскостью,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_a t^a \quad (a \neq b). \quad (5.18)$$

Если в том же уравнении (5.17) придавать всем параметрам t^a только значения $0 \leq t^a \leq 1$, мы получим m -параллелепипед с вершинами $A_0(\mathbf{x}_0)$, $A_a(\mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_a)$, $A_{ab}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_a + \mathbf{a}_b)$, ..., $A_{12\dots m}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_m)$; 2-параллелепипеды называются *параллелограммами*².

Условимся называть m -параллелепипед с вершинами $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{12\dots m}$ параллелепипедом $A_0 A_1 A_2 \dots A_{12\dots m}$. На рис. 5.1 изображен параллелограмм $A_0 A_1 A_2 A_{12}$ и 3-параллелепипед $A_0 A_1 A_2 A_3 A_{12} A_{13} A_{23} A_{123}$.

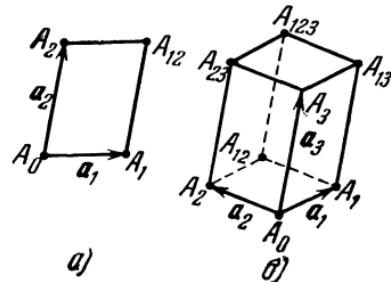


Рис. 5.1.

5.2.2. Границы параллелепипеда. Придавая в уравнении (5.17) значения $0 \leq t^a \leq 1$ всем параметрам t^a при $a \neq b$, а параметру t^b — значения $t^b = 0$ или $t^b = 1$, мы получим $(m - 1)$ -параллелепипеды, являющиеся *гранями*