

и если  $\overline{AB} = \lambda \overline{CD}$ , то и

$$\overline{A'B'} = \lambda \overline{C'D'}.$$

Таким образом, отношения ориентированных отрезков не изменяются при аффинных преобразованиях.

## § 2. Параллелепипеды

**5.2.1. Полуплоскости и параллелепипеды.** Если в уравнении

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_a t^a \quad (5.17)$$

$m$ -плоскости придавать одному из параметров  $t^b$  только неотрицательные значения  $t^b \geq 0$ , а остальным параметрам — произвольные действительные значения, мы получим  $m$ -полуплоскость, ограничиваемую  $(m - 1)$ -плоскостью,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_a t^a \quad (a \neq b). \quad (5.18)$$

Если в том же уравнении (5.17) придавать всем параметрам  $t^a$  только значения  $0 \leq t^a \leq 1$ , мы получим  $m$ -параллелепипед с вершинами  $A_0(\mathbf{x}_0)$ ,  $A_a(\mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_a)$ ,  $A_{ab}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_a + \mathbf{a}_b)$ , ...,  $A_{12\dots m}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_1 + \dots + \mathbf{a}_m)$ ; 2-параллелепипеды называются *параллелограммами*<sup>2</sup>.

Условимся называть  $m$ -параллелепипед с вершинами  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{12\dots m}$  параллелепипедом  $A_0 A_1 A_2 \dots A_{12\dots m}$ . На рис. 5.1 изображен параллелограмм  $A_0 A_1 A_2 A_{12}$  и 3-параллелепипед  $A_0 A_1 A_2 A_3 A_{12} A_{13} A_{23} A_{123}$ .

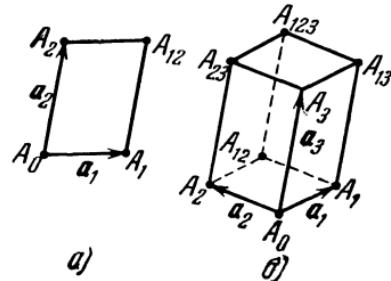


Рис. 5.1.

**5.2.2. Границы параллелепипеда.** Придавая в уравнении (5.17) значения  $0 \leq t^a \leq 1$  всем параметрам  $t^a$  при  $a \neq b$ , а параметру  $t^b$  — значения  $t^b = 0$  или  $t^b = 1$ , мы получим  $(m - 1)$ -параллелепипеды, являющиеся *гранями*

$m$ -параллелепипеда. Границ этих  $(m - 1)$ -параллелепипедов называются  $(m - 2)$ -гранями  $m$ -параллелепипеда, грани этих  $(m - 2)$ -параллелепипедов называются  $(m - 3)$ -гранями  $m$ -параллелепипеда и т. д. Таким образом,  $m$ -параллелепипед обладает  $p$ -гранями, где  $p$  пробегает значения от 0 до  $m - 1$ ; 0-грани  $m$ -параллелепипеда совпадают с его вершинами; 1-грани называются ребрами (при  $m = 2$  — сторонами). На рис. 5.1, а стороны параллелограмма — четыре отрезка  $A_0A_1$ ,  $A_0A_2$ ,  $A_1A_{12}$  и  $A_2A_{12}$ , на рис. 5.1, б — ребра 3-параллелепипеда — двенадцать отрезков  $A_0A_1$ ,  $A_0A_2$ ,  $A_0A_3$ ,  $A_1A_{12}$ ,  $A_1A_{13}$ ,  $A_2A_{12}$ ,  $A_2A_{23}$ ,  $A_3A_{13}$ ,  $A_3A_{23}$ ,

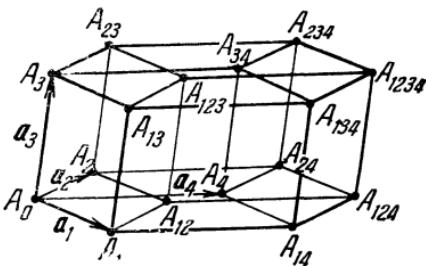


Рис. 5.2.

$A_{12}A_{123}$ ,  $A_{13}A_{123}$  и  $A_{23}A_{123}$ ; 2-грани — шесть параллелограммов  $A_0A_1A_2A_{12}$ ,  $A_0A_1A_3A_{13}$ ,  $A_0A_2A_3A_{23}$ ,  $A_1A_{12}A_{13}A_{123}$ ,  $A_2A_{12}A_{23}A_{123}$ ,  $A_3A_{13}A_{23}A_{123}$ .

На рис. 5.2 изображены вершины и ребра 4-параллелепипеда  $A_0A_1\dots A_{1234}$ . Как видно из этого рисунка, у 4-параллелепипеда 16 вершин, 32 ребра, 24 2-грани и 8 3-граней.

Подсчитаем число  $N_p^{(m)}$   $p$ -граней  $m$ -параллелепипеда. Число  $N_0^{(m)}$  вершин  $m$ -параллелепипеда, очевидно, равно  $2^m$ , а число  $N_{m-1}^{(m)}$  его  $(m - 1)$ -граней, очевидно, равно  $2m$ . Число  $N_p^{(m)}$   $p$ -граней  $m$ -параллелепипеда равно

$$N_p^{(m)} = 2^{m-p} \binom{m}{p}, \quad (5.19)$$

где  $\binom{m}{p}$  — число сочетаний из  $m$  по  $p$ .

В самом деле, число  $p$ -граней  $m$ -параллелепипеда равно сумме числа  $p$ -граней двух параллельных  $(m - 1)$ -граней и числа  $(p - 1)$ -граней  $(m - 1)$ -грани, так как каждая из этих  $(p - 1)$ -граней вместе с параллельной ей  $(p - 1)$ -гранью определяет  $p$ -границу  $m$ -параллелепипеда, т. е.

$$N_p^{(m)} = 2N_p^{(m-1)} + N_{p-1}^{(m-1)}.$$

Формула (5.19) справедлива для  $m = 2$ , так как  $N_0^{(2)} = 2^2 \binom{2}{0} = 2^2$ ,  $N_1^{(2)} = 2 \binom{2}{1} = 2 \cdot 2$ . Предположим, что формула (5.19) справедлива для  $(m - 1)$ -параллелепипедов, т. е. имеют место формулы

$$N_p^{(m-1)} = 2^{m-p-1} \binom{m-1}{p}, \quad N_{p-1}^{(m-1)} = 2^{m-p} \binom{m-1}{p-1}.$$

Тогда в силу известной формулы теории сочетаний

$$\binom{m}{p} = \binom{m-1}{p} + \binom{m-1}{p-1}$$

мы получаем, что

$$N_p^{(m)} = 2 \cdot 2^{m-p-1} \binom{m-1}{p} + 2^{m-p} \binom{m-1}{p-1} = 2^{m-p} \binom{m}{p}.$$

**5.2.3. Объемы.** Будем называть  $n$ -областью  $n$ -пространства область этого пространства, а  $m$ -областью  $n$ -пространства область  $m$ -поверхности этого пространства.

Будем называть объемом  $m$ -области  $\mathfrak{A}$  числовую функцию  $f(\mathfrak{A})$   $m$ -области, обладающую теми же тремя свойствами, что и длина отрезка:

1°. *Инвариантностью* при движениях, т. е. если  $m$ -область  $\mathfrak{A}$  переходит при движении в  $m$ -область  $\mathfrak{A}'$ , то

$$f(\mathfrak{A}) = f(\mathfrak{A}').$$

2°. *Аддитивностью*, т. е. если  $m$ -область  $\mathfrak{A}$  распадается на  $m$ -области  $\mathfrak{B}$  и  $\mathfrak{C}$ , то

$$f(\mathfrak{A}) = f(\mathfrak{B}) + f(\mathfrak{C}).$$

3°. *Позитивностью*, т. е.

$$\begin{aligned} f(\mathfrak{A}) &> 0, & \text{если } \mathfrak{A} — m\text{-область,} \\ f(\mathfrak{A}) &= 0, & \text{если } \mathfrak{A} — l\text{-область при } l < m. \end{aligned}$$

Мы будем рассматривать объемы только наиболее простых  $m$ -областей—многогранников, сфер и сферических многогранников.

**5.2.4. Объем прямоугольного параллелепипеда.** Прежде всего определим объем *прямоугольного  $m$ -параллелепипеда*, т. е. такого  $m$ -параллелепипеда, у которого все

векторы  $a_a$  попарно перпендикулярны. Прямоугольные 2-параллелепипеды называются *прямоугольниками*. На рис. 5.3 изображены прямоугольник и прямоугольный 3-параллелепипед.

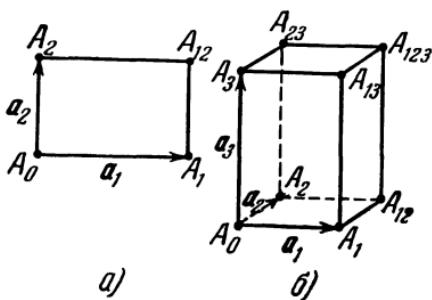


Рис. 5.3.

Будем называть длины  $x_a$  отрезков  $A_0A_a$  прямоугольного  $m$ -параллелепипеда его *измерениями*.

Докажем, что *объем* прямоугольного  $m$ -параллелепипеда только

*постоянным множителем* отличается от произведения его измерений.

В самом деле, в силу свойства 1° функция  $f(\mathfrak{U})$  прямоугольного  $m$ -параллелепипеда является функцией его измерений; будем обозначать эту числовую функцию неотрицательных числовых аргументов  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . В силу свойства 3°

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) > 0, \text{ если все } x_i \neq 0.$$

В случае, если один из аргументов этой функции обращается в нуль,  $m$ -параллелепипед превращается в  $(m - 1)$ -параллелепипед и в силу того же свойства 3°

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \text{ если хотя бы одно } x_i = 0.$$

Приложив к прямоугольному  $m$ -параллелепипеду, определяемому уравнением (5.17) при  $0 \leq t^a \leq 1$ , другой прямоугольный  $m$ -параллелепипед, определяемый тем же уравнением при  $1 \leq t^b \leq T^b$  и  $0 \leq t^a \leq 1$ , если  $a \neq b$ , мы получим новый прямоугольный параллелепипед, определяемый тем же уравнением при  $0 \leq t^b \leq T^b$  и  $0 \leq t^a \leq 1$ , если  $a \neq b$ . У этих трех прямоугольных параллелепипедов совпадают все измерения, кроме  $b$ -го, и если мы обозначим  $b$ -е измерение второго параллелепипеда через  $x'_b$ , то  $b$ -е измерение третьего параллелепипеда равно  $x_b + x'_b$ . На рис. 5.4 изображены два та-

ких 3-параллелепипеда, причем  $b = 1$ . Так как третий параллелепипед состоит из первого и второго параллелепипедов, то в силу свойства 2° имеем

$$f(x_1, \dots, x_{b-1}, x_b + x'_b, x_{b+1}, \dots, x_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) + \\ + f(x_1, \dots, x_{b-1}, x'_b, x_{b+1}, \dots, x_m).$$

Рассматривая функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  как функцию от  $x_b$ , мы видим, что эта функция удовлетворяет условиям (5.2) и (5.3), поэтому, в силу доказанного в 5.2.1,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \\ = x_b f(x_1, \dots, x_{b-1}, 1, x_{b+1}, \dots, x_m). \quad (5.20)$$

Применяя формулу (5.20) при всех значениях  $b$ , мы получим, что

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \\ = x_1 x_2 \dots x_m f(1, 1, \dots, 1), \quad (5.21)$$

т. е. функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  отличается от произведения  $x_1 x_2 \dots x_m$  измерений прямоугольного  $m$ -параллелепипеда только постоянным множителем  $f(1, 1, \dots, 1)$ .

В дальнейшем мы будем считать этот постоянный множитель равным 1, т. е. будем считать, что *объем*  $V_m$  *прямоугольного m-параллелепипеда равен произведению его измерений*

$$V_m = x_1 x_2 \dots x_m. \quad (5.22)$$

**5.2.5. Объем произвольного параллелепипеда.** Рассмотрим два  $m$ -параллелепипеда: параллелепипед, определяемый уравнением (5.17) при  $0 \leq t^a \leq 1$ , и параллелепипед, определяемый тем же уравнением, в котором некоторый вектор  $\mathbf{a}_b$  заменен на сумму  $\mathbf{a}_b + \lambda \mathbf{a}_c$  ( $c \neq b$ ). В случае, когда  $\lambda > 0$ , второй параллелепипед получается из первого отниманием фигуры, одним из ребер которой является отрезок  $A_b A'_b$ , определяемый вектором  $\overline{A_b A'_b} = \lambda \mathbf{a}_c$ , и прибавлением фигуры, одним из ребер которой является отрезок  $A_{bc} A'_{bc}$ , определяемый тем же вектором; в случае, когда  $\lambda < 0$ , второй параллелепипед получается

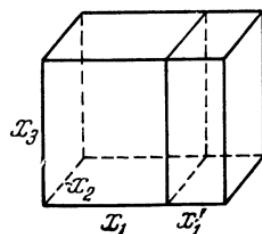


Рис. 5.4.

из первого прибавлением первой фигуры и отниманием второй фигуры. На рис. 5.5 изображены два 3-параллелепипеда, второй из которых получается из первого прибавлением фигуры  $A_0A_2A_3A'_3A_{23}A'_{23}$  и отниманием фигуры  $A_1A_{12}A_{13}A'_{13}A_{123}A'_{123}$ .

Но вторая из этих фигур получается из первой переносом на вектор  $\mathbf{a}_c = \vec{A}_0\vec{A}_c$ . Поэтому в силу свойства 1° эти фигуры имеют равные объемы. Поэтому в силу свойства 2° наши два параллелепипеда, получающиеся друг из друга прибавлением и отниманием фигур с равными объемами, имеют равные объемы.

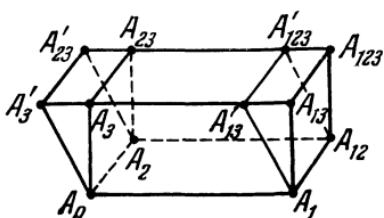


Рис. 5.5.

Применяя этот процесс последовательно ко всем векторам  $\mathbf{a}_c (c \neq b)$ , мы получим, что объем  $m$ -параллелепипеда, определяемого уравнением (5.17) при  $0 \leq t^a \leq 1$ , равен объему  $m$ -параллелепипеда, определяемого тем же уравнением, в котором некоторый вектор  $\mathbf{a}_b$  заменен на сумму  $\mathbf{a}_b + \lambda^a \mathbf{a}_a (a \neq b)$ .

Числа  $\lambda^a$  всегда можно подобрать таким образом, чтобы вектор  $\mathbf{a}_b + \lambda^a \mathbf{a}_a$  был перпендикулярен всем векторам  $\mathbf{a}_a$ , условия

$$(\mathbf{a}_b + \lambda^a \mathbf{a}_a) \mathbf{a}_c = \mathbf{a}_b \mathbf{a}_c + \lambda^a \mathbf{a}_a \mathbf{a}_c = 0 \quad (c \neq b)$$

являются системой  $m - 1$  линейных уравнений с  $m - 1$  неизвестными  $\lambda^a (a \neq b)$ , определитель которой представляет собой определитель Грама, составленный из  $m - 1$  векторов  $\mathbf{a}_a (a \neq b)$ , который отличен от нуля, так как эти векторы линейно независимы. В этом случае мы получим  $m$ -параллелепипед с объемом, равным объему данного  $m$ -параллелепипеда, и имеющий одно из ребер, перпендикулярное всем пересекающимся с ним ребрам. Применяя тот же процесс к граням  $m$ -параллелепипеда, мы получим в конце концов прямоугольный  $m$ -параллелепипед с объемом, равным объему данного  $m$ -параллелепипеда. Сравнивая прямоугольные  $m$ -параллелепипед и  $(m - 1)$ -параллелепипед с объемами, равными данному  $m$ -параллеле-

параллелепипеду и одной из его граней, мы получаем, что *объем*  $V_m$   $m$ -*параллелепипеда* *равен произведению объема*  $V_{m-1}$  *одной из его*  $(m-1)$ *-граней на расстояние*  $h_m$  *между этой гранью и параллельной ей*  $(m-1)$ *-гранью*

$$V_m = V_{m-1} h_m. \quad (5.23)$$

Если мы будем называть выделенную  $(m-1)$ -границу  $m$ -параллелепипеда *его основанием*, а расстояние  $h_m$  — *его высотой*, то формула (5.23) показывает, что *объем*  $m$ -*параллелепипеда равен произведению объема его основания на высоту*.

*Объем*  $V_m$   $m$ -*параллелепипеда, определяемого уравнением* (5.17) *при*  $0 \leq t^a \leq 1$ , *определяется соотношением*

$$V_m^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1^2 & \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_m \\ \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2^2 & \dots & \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_m & \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_m & \dots & \mathbf{a}_m^2 \end{vmatrix}, \quad (5.24)$$

т. е. *квадрат объема этого параллелепипеда равен определителю Грама, составленному из*  $m$  *векторов*  $\mathbf{a}_a$ .

Наше утверждение очевидно при  $m = 1$ , когда параллелепипед совпадает с отрезком, определяемым вектором  $\mathbf{a}_1$ , и объем этого параллелепипеда совпадает с длиной этого отрезка  $V_1 = |\mathbf{a}_1|$ , т. е.  $V_1^2 = \mathbf{a}_1^2$ .

Рассмотрим теперь  $m$ -параллелепипед и предположим, что наше утверждение справедливо для его  $(m-1)$ -граней. Рассмотрим его  $(m-1)$ -границу, определяемую уравнением (5.17) при  $0 \leq t^a \leq 1$  и  $b = m$ . Тогда скалярный квадрат векторного произведения  $[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_{m-1}]$  в  $m$ -плоскости  $m$ -параллелепипеда, равный определителю Грама, составленному из  $m-1$  векторов  $\mathbf{a}_a$  ( $a < m$ ), равен объему этой  $(m-1)$ -грани. Так как объем  $V_m$   $m$ -параллелепипеда равен произведению объема  $V_{m-1}$  этой  $(m-1)$ -грани на соответствующую высоту  $h_m$ , то объем  $V_m$  равен

$$V_m = |[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_{m-1}]| |\mathbf{a}_m| |\cos \varphi|,$$

где  $\varphi$  — угол между вектором  $\mathbf{a}_m$  и перпендикуляром к  $(m-1)$ -грани в  $m$ -плоскости  $m$ -параллелепипеда. Поэтому

объем  $V_m$  нашего параллелепипеда равен абсолютной величине скалярного произведения  $[\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_{m-1} | \mathbf{a}_m]$ , равного косому произведению  $\{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_m\}$ . Поэтому в силу (2.76) квадрат  $V^2$  объема  $m$ -параллелепипеда равен определителю Грама. Так как наше утверждение справедливо для  $m = 1$  и из его справедливости для  $m - 1$  следует его справедливость для  $m$ , утверждение полностью доказано.

*Объем  $n$ -параллелепипеда  $A_0 A_1 \dots A_n \dots A_{12} \dots n$ , определяемого уравнением (5.17) при  $m = n$  и  $0 \leq t^a \leq 1$ , равен абсолютной величине косого произведения векторов  $\mathbf{a}_a$ , т. е.*

$$V_n = |\{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n\}|, \quad (5.25)$$

так как квадрат этого косого произведения равен определителю Грама, составленному из векторов  $\mathbf{a}_a$ .

В силу формулы (2.78) формулу (5.24) можно переписать в виде

$$V_n = |\varepsilon| |\text{Det}(a_j^i)|, \quad (5.26)$$

где  $\varepsilon^2 = \text{Det}(e_{ij}) = \text{Det}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)$ .

**5.2.6. Ориентированные  $n$ -параллелепипеды.** Будем говорить, что  $n$ -параллелепипед  $A_0 A_1 \dots A_n \dots A_{12} \dots n$  в ориентированном пространстве *ориентирован* положительно, если векторы  $\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}$  составляют правую систему, и *ориентирован отрицательно*, если эти векторы составляют левую систему. Будем обозначать ориентированный  $n$ -параллелепипед  $A_0 A_1 \dots A_n \dots A_{12} \dots n$  символом  $\overline{A_0 A_1 \dots A_n \dots A_{12} \dots n}$ .

Так как косое произведение  $\{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n\}$  по абсолютной величине равно объему  $n$ -параллелепипеда положительно, когда векторы  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  образуют правую систему, и отрицательно, когда эти векторы образуют левую систему, т. е. положительно, когда  $n$ -параллелепипед ориентирован положительно, и отрицательно, когда он ориентирован отрицательно, будем называть это косое произведение *относительным объемом* ориентированного  $n$ -параллелепипеда.

Поэтому *относительный объем*  $V_n$  ориентированного  $n$ -параллелепипеда  $\overline{A_0 A_1 \dots A_n \dots A_{12} \dots n}$ , определяемого урав-

нением (5.17) при  $m = n$  и  $0 \leq t^a \leq 1$ , равен

$$V_n = \{\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n\}. \quad (5.27)$$

**5.2.7. Аффинность  $n$ -параллелепипедов.** Если нам даны два произвольных  $n$ -параллелепипеда  $A_0 A_1 \dots A_n \dots A_{12\dots n}$  и  $B_0 B_1 \dots B_n \dots B_{12\dots n}$ , то системы точек  $A_0, A_1, \dots, A_n$  и  $B_0, B_1, \dots, B_n$  определяют аффинное преобразование, переводящее первые из этих точек во вторые. Так как при аффинном преобразовании плоскости переходят в плоскости, а параллельные плоскости — в параллельные плоскости, это аффинное преобразование переводит весь  $n$ -параллелепипед  $A_0 A_1 \dots A_n \dots A_{12\dots n}$  в  $n$ -параллелепипед  $B_0 B_1 \dots B_n \dots B_{12\dots n}$ . Поэтому *всякие два  $n$ -параллелепипеда аффинны*.

Так как относительный объем ориентированного  $n$ -параллелепипеда, определяемого уравнением (5.17) при  $m = n$  и  $0 \leq t^a \leq 1$ , равен косому произведению (5.27), а косое произведение векторов при аффинном преобразовании с оператором  $\mathbf{A}$  преобразуется по формуле (4.34), т. е. умножается на определитель матрицы оператора  $\mathbf{A}$ , мы получаем, что *при аффинном преобразовании относительные объемы всех  $n$ -параллелепипедов умножаются на определитель матрицы этого аффинного преобразования*, т. е. если  $n$ -параллелепипед с относительным объемом  $V_n$  переходит при аффинном преобразовании с матрицей  $(A_j^i)$  в  $n$ -параллелепипед с относительным объемом  $V_n'$ , то

$$V_n' = V_n \operatorname{Det}(A_j^i). \quad (5.28)$$

Отсюда вытекает, что *отношения относительных объемов  $n$ -параллелепипедов не изменяются при аффинных преобразованиях*.

**5.2.8. Объемы произвольных кубируемых фигур.** Объем  $n$ -областей общего вида можно определить с помощью интегрирования, если считать за элемент объема прямоугольные параллелепипеды, ограниченные координатными плоскостями системы прямоугольных координат, имеющие измерения  $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$ . Так как в силу (5.22) элемент  $dV$  объема равен

$$dV = dx^1 dx^2 \dots dx^n, \quad (5.29)$$

объем  $n$ -области  $\mathfrak{A}$  общего вида выражается интегралом

$$V = \iint_{\mathfrak{A}} \dots \int dx^1 dx^2 \dots dx^n. \quad (5.30)$$

Вычисление интеграла (5.30) называется *кубатурой* (при  $n = 2$  *квадратурой*)  $n$ -области, а  $n$ -области, для которых интеграл (5.30) существует, называются *кубируемыми* (для  $n = 2$  *квадрируемыми*)  $n$ -областями<sup>3</sup>.

При переходе от системы прямоугольных координат  $x^i$  к другой системе прямоугольных координат  $x^{i'}$ , связанных с координатами  $x^i$  соотношениями (2.21), т. е.

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i + a^{i'}, \quad (5.31)$$

имеем

$$dx^{i'} = A_i^{i'} dx^i. \quad (5.32)$$

Из формулы (5.32) следует, что частные производные  $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$  совпадают с элементами матрицы  $(A_j^{i'})$ , и функциональный определитель преобразования (5.31) равен определителю матрицы  $(A_i^{i'})$ , т. е.

$$\frac{\partial(x^{1'}, \dots, x^{n'})}{\partial(x^1, \dots, x^n)} = \text{Det} \left( \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right) = \text{Det}(A_i^{i'}).$$

Так как интеграл вида (5.30) в координатах  $x^{i'}$  имеет вид

$$\begin{aligned} V' &= \iint_{\mathfrak{A}} \dots \int dx^{1'} dx^{2'} \dots dx^{n'} = \\ &= \iint_{\mathfrak{A}} \dots \int \left| \frac{\partial(x^{1'}, \dots, x^{n'})}{\partial(x^1, \dots, x^n)} \right| dx^1 dx^2 \dots dx^n = \\ &= \iint_{\mathfrak{A}} \dots \int |\text{Det}(A_i^{i'})| dx^1 dx^2 \dots dx^n = \\ &= |\text{Det}(A_i^{i'})| \iint_{\mathfrak{A}} \dots \int dx^1 dx^2 \dots dx^n, \end{aligned}$$

а матрица  $(A_i^j)$  является ортогональной матрицей, определитель которой равен  $\pm 1$ , то значение интеграла (5.30) *одно и то же в любой системе прямоугольных координат*.

Так как элементы объема всякой кубируемой  $n$ -области являются бесконечно малыми  $n$ -параллелепипедами, отношения объемов которых не изменяются при аффинных преобразованиях, *отношения объемов произвольных кубируемых  $n$ -областей также не изменяются при аффинных преобразованиях*.

### § 3. Симплексы

**5.3.1. Симплексы.** Если заданы  $m + 1$  точек  $A_0(\mathbf{x}_0)$ ,  $A_1(\mathbf{x}_1), \dots, A_m(\mathbf{x}_m)$ , не лежащих в одной  $(m-1)$ -плоскости, то точки, определяемые радиус-векторами

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha t^\alpha, \quad (5.33)$$

где индекс  $\alpha$  пробегает значения от 0 до  $m$ , а параметры  $t^\alpha$  связаны условием

$$t^0 + t^1 + \dots + t^m = 1, \quad (5.34)$$

образуют  $m$ -симплекс<sup>4</sup> с вершинами  $A_0, A_1, \dots, A_m$ , который мы будем называть  $m$ -симплексом  $A_0A_1\dots A_m$ .

На рис. 5.6, *a*, *б* и *в* изображен 2-симплекс (треугольник)  $A_0A_1A_2$ , 3-симплекс (тетраэдр)  $A_0A_1A_2A_3$  и 4-симплекс  $A_0A_1A_2A_3A_4$ .

**5.3.2. Границы симплекса.** Если в уравнении (5.33) один из параметров  $t^\alpha$  равен 0, мы получаем  $(m-1)$ -симплекс, называемый *гранью*  $m$ -симплекса. Границы этих  $(m-1)$ -симплексов называются  $(m-2)$ -гранями  $m$ -симплекса, грани этих  $(m-2)$ -симплексов называются  $(m-3)$ -гранями  $m$ -симплекса и т. д. Таким образом,  $m$ -симплекс обладает  $p$ -гранями, где  $p$  пробегает значения от 0 до  $m-1$ ; 0-грани  $m$ -симплекса совпадают с его вершинами, 1-грани называются *ребрами* (при  $m=2$  — сторонами). На рис. 5.6, *а* стороны треугольника — 3 отрезка  $A_0A_1$ ,  $A_0A_2$ ,  $A_1A_2$ ; на рис. 5.6, *б* ребра тетраэдра — 6 отрезков  $A_0A_1$ ,  $A_0A_2$ ,  $A_0A_3$ ,  $A_1A_2$ ,  $A_1A_3$ ,  $A_2A_3$ , 2-грани — 4 тре-