а матрица $(A_i^{i'})$ является ортогональной матрицей, определитель которой равен ± 1, то *значение интеграла* (5.30) *одно и то же в любой системе прямоугольных координат.*

Так как элементы объема всякой кубируемой n-области являются бесконечно малыми n-параллелепипедами, отношения объемов которых не изменяются при аффинных преобразованиях, *отношения объемов произвольных кубируемых n-областей также не изменяются при аффинных преобразованиях.*

§ 3. Симплексы

5.3.1. Симплексы. Если заданы $m+1$ точек $A_0(\mathbf{x}_0)$, $A_1(\mathbf{x}_1),\ldots,A_m(\mathbf{x}_m)$, не лежащих в одной $(m-1)$-плоскости, то точки, определяемые радиус-векторами

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha t^\alpha, \tag{5.33}$$

где индекс α пробегает значения от 0 до m, а параметры t^α связаны условием

$$t^0 + t^1 + \ldots + t^m = 1, \tag{5.34}$$

образуют *m-симплекс*[4] с вершинами $A_0, A_1,\ldots,A_m$, который мы будем называть m-симплексом $A_0A_1\ldots A_m$.

На рис. 5.6, *а*, *б* и *в* изображен 2-симплекс (треугольник) $A_0A_1A_2$, 3-симплекс (тетраэдр) $A_0A_1A_2A_3$ и 4-симплекс $A_0A_1A_2A_3A_4$.

5.3.2. Грани симплекса. Если в уравнении (5.33) один из параметров t^α равен 0, мы получаем $(m-1)$-симплекс, называемый *гранью* m-симплекса. Грани этих $(m-1)$-симплексов называются *$(m-2)$-гранями* m-симплекса, грани этих $(m-2)$-симплексов называются *$(m-3)$-гранями* m-симплекса и т. д. Таким образом, *m-симплекс обладает p-гранями, где p пробегает значения от 0 до $m-1$*; 0-грани m-симплекса совпадают с его вершинами, 1-грани называются *ребрами* (при $m=2$ — сторонами). На рис. 5.6, *а* стороны треугольника — 3 отрезка A_0A_1, A_0A_2, A_1A_2; на рис. 5.6, *б* ребра тетраэдра — 6 отрезков A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3, 2-грани — 4 тре-

угольника $A_0A_1A_2$, $A_0A_1A_3$, $A_0A_2A_3$, $A_1A_2A_3$; на рис. 5.6, *в* — ребра 4-симплекса — 10 отрезков A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, A_0A_4, A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4, 2-грани — 10 треугольников $A_0A_1A_2$, $A_0A_1A_3$, $A_0A_1A_4$, $A_0A_2A_3$,

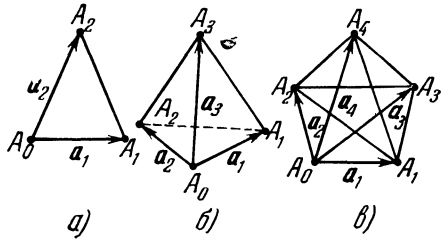

Рис. 5.6.

$A_0A_2A_4$, $A_0A_3A_4$, $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$, 3-грани — 5 тетраэдров $A_0A_1A_2A_3$, $A_0A_1A_2A_4$, $A_0A_1A_3A_4$, $A_0A_2A_3A_4$, $A_1A_2A_3A_4$.

Если мы представим векторы $\mathbf{x}_a$ в виде $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}_a$, то формулу (5.33) можно переписать в виде (5.17), где параметры t^a ограничены условиями $0 \leqslant t^a$, $t^1 + t^2 + \ldots + t^m \leqslant 1$.

Так как любая система $p + 1$ вершин m-симплекса определяет p-грань симплекса, *число* $N_p^{(m)}$ *p-граней m-симплекса равно числу сочетаний из* $m + 1$ *по* $p + 1$, т. е.

$$N_p^{(m)} = \binom{m+1}{p+1}. \tag{5.35}$$

5.3.3. Объем симплекса. Прежде всего покажем, что *объем V_m произвольного m-симплекса выражается через объем V_{m-1} одной из его $(m-1)$-граней и расстояния h_m от вершины, лежащей против этой грани, до плоскости этой грани по формуле*

$$V_m = \frac{1}{m} V_{m-1} h_m. \tag{5.36}$$

Если мы будем называть выделенную $(m-1)$-грань m-симплекса его *основанием*, а расстояние h_m — его *высотой*, то формула (5.36) показывает, что *объем m-симплекса равен $\frac{1}{m}$ произведения его основания на высоту*. Пусть

основание m-симплекса $A_0A_1\ldots A_m$, его $(m-1)$-грань $A_0A_1\ldots A_{m-1}$ (на рис. 5.7 изображается симплекс $A_0A_1\ldots A_m$ при $m=3$). Проведем плоскость, параллельную плоскости $(m-1)$-грани $A_0A_1\ldots A_{m-1}$ на расстоянии x от нее; эта плоскость высечет из нашего m-симплекса $(m-1)$-симплекс $A'_0A'_1\ldots A'_{m-1}$ и отсечет от него m-симплекс $A'_0A'_1,\ldots, A'_{m-1}A_m$. Если мы обозначим объем $(m-1)$-симплекса $A'_0A'_1\ldots A'_{m-1}$ через $V_{m-1}(x)$, то формулу (5.30) для определения объема нашего m-симплекса можно переписать в виде

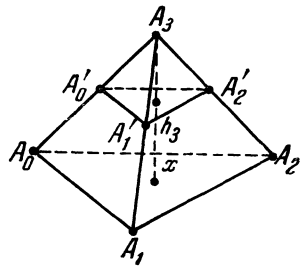

Рис. 5.7.

$$V_m = \int_0^{h_m} V_{m-1}(x)\,dx.$$

Так как m-симплекс $A'_0A'_1\ldots A'_{m-1}A_m$ может быть получен из m-симплекса $A_0A_1\ldots A_{m-1}A_m$ гомотетией с центром в вершине A_m и с коэффициентом $\frac{h_m-x}{h_m}$, $(m-1)$-грань $A'_0A'_1\ldots A'_{m-1}$ получается из $(m-1)$-грани $A_0A_1\ldots A_{m-1}$ той же гомотетией. Так как матрица гомотетии, отображающей $(m-1)$-грань $A_0A_1\ldots A_{m-1}$ на $(m-1)$-грань $A'_0A'_1\ldots A'_{m-1}$, является матрицей $(m-1)$-го порядка вида $\left(\frac{h_m-x}{h_m}\delta^a_b\right)$, определитель этой матрицы равен $\left(\frac{h_m-x}{h_m}\right)^{m-1}$ и объем $V_{m-1}(x)$ может быть записан в виде

$$V_{m-1}(x) = V_{m-1}\cdot\left(\frac{h_m-x}{h_m}\right)^{m-1}.$$

Поэтому

$$V_m = \int_0^{h_m} V_{m-1}(x)\,dx = V_{m-1}\int_0^{h_m}\left(\frac{h_m-x}{h_m}\right)^{m-1}dx =$$

$$= \frac{V_{m-1}}{h_m^{m-1}}\int_{h_m}^{0}(h_m-x)^{m-1}\,d(h_m-x) = \frac{V_{m-1}}{h_m^{m-1}}\cdot\frac{h_m^m}{m} = \frac{1}{m}V_{m-1}h_m.$$

Применяя формулу (5.36) к объему V_{m-1} $(m-1)$-грани, мы выразим этот объем через объем V_{m-2} одной из ее $(m-2)$-граней и соответственную высоту h_{m-1} этой $(m-1)$-грани; и аналогично выражая объемы V_{m-2}, $V_{m-3}, \ldots, V_3$ и площадь V_2, вложенных друг в друга $(m-2)$-грани, $(m-3)$-грани,..., 3-грани и 2-грани симплекса через объемы $V_{m-3}, \ldots, V_3$, площадь V_2 и длину l_1 одного из ребер m-симплекса и соответственные высоты h_{m-2}, $h_{m-3}, \ldots$ $\ldots, h_3$, h_2 этих граней, мы получим, что

$$V_m = \frac{1}{m} V_{m-1} h_m = \frac{1}{m(m-1)} V_{m-2} h_{m-1} h_m =$$

$$= \frac{1}{m(m-1)(m-2)} V_{m-3} h_{m-2} h_{m-1} h_m = \ldots = \frac{1}{m!} l_1 h_2 h_3 \ldots h_{m-1} h_m.$$

В том случае, когда m-симплекс определяется уравнением (5.33), где $t^0 + t^1 + \ldots + t^m = 1$, произведение $l_1 h_2 h_3 \ldots h_{m-1} h_m$ равно объему m-параллелепипеда, определяемого уравнением (5.17) с векторами $\mathbf{a}_a$ при $0 \leqslant t^a \leqslant 1$, поэтому *объем V_m m-симплекса связан с объемом $\overline{V}_m$ соответствующего m-параллелепипеда соотношением*

$$V_m = \frac{1}{m!} \overline{V}_m. \tag{5.37}$$

Так как квадрат объема $\overline{V}_m$ в силу (5.24) равен определителю Грама, составленному из вектора $\mathbf{a}_a$, из формулы (5.37) вытекает, что объем V_m m-симплекса, определяемого уравнением (5.33), где $t^0 + t^1 + \ldots + t^m = 1$, определяется соотношением

$$V_m^2 = \frac{1}{(m!)^2} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1^2 & \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_1\mathbf{a}_m \\ \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2^2 & \ldots & \mathbf{a}_2\mathbf{a}_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{a}_1\mathbf{a}_m & \mathbf{a}_2\mathbf{a}_m & \ldots & \mathbf{a}_m^2 \end{vmatrix}. \tag{5.38}$$

Объем V_n n-симплекса, определяемого уравнением (5.33) при $m = n$, где $t^0 + t^1 + \ldots + t^n = 1$, равен

$$V_n = \frac{1}{n!} |\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \ldots \mathbf{a}_n\}|, \tag{5.39}$$

так как квадрат косого произведения $\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n\}$ равен определителю Грама, составленному из векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

5.3.4. Ориентированные n-симплексы. Будем говорить, что n-симплекс $A_0A_1\ldots A_n$ в ориентированном пространстве *ориентирован* положительно, если векторы $\overline{A_0A_1}, \ldots, \overline{A_0A_n}$ составляют правую систему, и ориентирован отрицательно, если эти векторы составляют левую систему. Будем обозначать ориентированный n-симплекс $A_0A_1\ldots A_n$ символом $\overline{A_0A_1\ldots A_n}$.

Так как косое произведение $\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n\}$, по абсолютной величине равное $n!$ объемам n-симплекса, положительно, когда векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ образуют правую систему, и отрицательно, когда эти векторы образуют левую систему, то число

$$V_n = \frac{1}{n!}\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n\} \tag{5.40}$$

будем называть *относительным объемом* ориентированного симплекса, определяемого уравнением (5.33) при $m = n$, где $t^0 + t^1 + \ldots + t^n = 1$.

5.3.5. Аффинность n-симплексов. Если нам даны два произвольных n-симплекса $A_0A_1\ldots A_n$ и $B_0B_1\ldots B_n$, то системы их вершин определяют аффинное преобразование, переводящее первую из этих систем вершин во вторую. Так как при аффинном преобразовании плоскости переходят в плоскости, это аффинное преобразование переводит весь n-симплекс $A_0A_1\ldots A_n$ в n-симплекс $B_0B_1\ldots B_n$. Поэтому *всякие два n-симплекса аффинны.*

Так как относительный объем ориентированного n-симплекса, определяемого уравнением (5.33) при $m = n$, где $t^0 + t^1 + \ldots + t^n = 1$, выражается по формуле (5.40) через косое произведение $\{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n\}$, а косое произведение векторов при аффинном преобразовании с оператором $\mathbf{A}$ умножается на определитель матрицы оператора $\mathbf{A}$, мы получаем, что *при аффинном преобразовании относительные объемы всех n-симплексов умножаются на определитель матрицы этого аффинного преобразования*, т. е. если n-симплекс с относительным объемом

V_n переходит при аффинном преобразовании с матрицей (A_j^i) в n-симплекс с относительным объемом V_n', то, так же как в случае ориентированных n-параллелепипедов,

$$V_n' = V_n \cdot \mathrm{Det}\ (A_j^i). \tag{5.41}$$

Отсюда вытекает, что *отношения относительных объемов n-симплексов не изменяются при аффинных преобразованиях.*

5.3.6. Центр тяжести n-симплекса. Будем называть *центром тяжести m-симплекса*, определяемого уравнением (5.33), где $t^0 + t^1 + \ldots + t^m = 1$, такую точку A (x) этого симплекса, для которой

$$t^0 = t^1 = \ldots = t^m = \frac{1}{m+1}.$$

Покажем, что *если соединить центр тяжести A m-симплекса с его вершиной A_α, то прямая AA_α* пересечет *$(m-1)$-грань, лежащую против вершины A_α в центре тяжести A_α' этой грани* и что *точка A делит отрезок $A_\alpha A_\alpha'$ в отношении $m : 1$.*

В самом деле, если радиус-вектор вершины A_α m-симплекса — вектор $\mathbf{x}_\alpha$, радиус-вектор центра тяжести этого m-симплекса — вектор

$$\mathbf{x} = \frac{1}{m+1}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_m). \tag{5.42}$$

Поэтому произвольная точка прямой $A_\alpha A$ определяется радиус-вектором

$$\mathbf{x}_\alpha + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha)\, t = \mathbf{x}_\alpha + \left(\frac{1}{m+1}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_m) - \mathbf{x}_\alpha\right) t.$$

Точка A_α' этой прямой, принадлежащая $(m-1)$-грани m-симплекса, лежащей против вершины A_α, соответствует тому значению t, при котором коэффициент при $\mathbf{x}_\alpha$ равен 0. Так как этот коэффициент равен

$$1 + \left(\frac{1}{m+1} - 1\right) t = 1 - \frac{m}{m+1}\, t,$$

то это значение t равно $\frac{m+1}{m}$, т. е. радиус-вектор точки A'_α равен

$$\mathbf{x}'_\alpha = \mathbf{x}_\alpha + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha)\frac{m+1}{m},$$

т. е.

$$\mathbf{x}'_\alpha = \frac{1}{m+1}\cdot\frac{m+1}{m}(\mathbf{x}_0 + \ldots + \mathbf{x}_{\alpha-1} + \mathbf{x}_{\alpha+1} + \ldots + \mathbf{x}_m) =$$

$$= \frac{1}{m}(\mathbf{x}_0 + \ldots + \mathbf{x}_{\alpha-1} + \mathbf{x}_{\alpha+1} + \ldots + \mathbf{x}_m),$$

откуда видно, что точка A'_α является центром тяжести $(m-1)$-симплекса $A_0 \ldots A_{\alpha-1} A_{\alpha+1} \ldots A_m$, являющегося $(m-1)$-гранью m-симплекса $A_0A_1 \ldots A_m$, лежащей против его вершины A_α.

Так как вектор $\overline{AA_\alpha}$ можно записать в виде

$$\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha - \frac{1}{m+1}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_m) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)\mathbf{x}_\alpha - \frac{1}{m+1}(\mathbf{x}_0 + \ldots + \mathbf{x}_{\alpha-1} + \mathbf{x}_{\alpha+1} + \ldots + \mathbf{x}_m) =$$

$$= \frac{m}{m+1}\mathbf{x}_\alpha - \frac{1}{m+1}(\mathbf{x}_0 + \ldots + \mathbf{x}_{\alpha-1} + \mathbf{x}_{\alpha+1} + \ldots + \mathbf{x}_m),$$

а вектор $\overline{A'_\alpha A_\alpha}$ можно записать в виде

$$\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}'_\alpha = \mathbf{x}_\alpha - \frac{1}{m}(\mathbf{x}_0 + \ldots + \mathbf{x}_{\alpha-1} + \mathbf{x}_{\alpha+1} + \ldots + \mathbf{x}_m),$$

мы находим, что

$$\overline{AA_\alpha} = \frac{m}{m+1}\overline{A'_\alpha A_\alpha}.$$

Поэтому

$$\overline{A'_\alpha A} = \overline{A'_\alpha A_\alpha} - \overline{AA_\alpha} = \left(1 - \frac{m}{m+1}\right)\overline{A'_\alpha A_\alpha} = \frac{1}{m+1}\overline{A'_\alpha A_\alpha}$$

и, следовательно,

$$\overline{AA_\alpha} = m\overline{A'_\alpha A},$$

т. е. точка A делит отрезок $A_\alpha A'_\alpha$ в отношении $m : 1$.

Частными случаями этой теоремы являются известные теоремы о том, что центр тяжести треугольника лежит на каждой из его медиан и делит их в отношении $2 : 1$

(рис. 5.8, *а*), а центр тяжести тетраэдра лежит на каждом из отрезков, соединяющих вершины тетраэдра с центрами тяжести противоположных граней, и делит эти отрезки в отношении 3 : 1 (рис. 5.8, *б*).

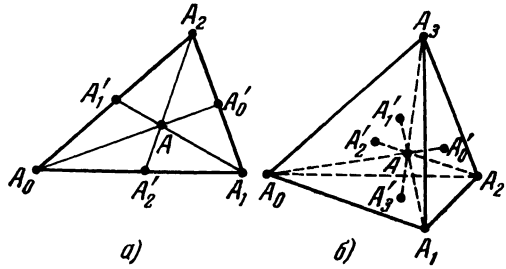

Рис. 5.8.

5.3.7. Ортоцентрический n-симплекс. Будем называть перпендикуляр, опущенный из одной из вершин n-симплекса на $(n-1)$-грань, лежащую против этой вершины, *высотой* n-симплекса. Если высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром* треугольника, то при $n > 2$ высоты n-симплекса в общем случае не пересекаются. В том случае, когда высоты n-симплекса пересекаются в одной точке, будем называть эту точку *ортоцентром n-симплекса*, а n-симплекс, обладающий этим свойством,— *ортоцентрическим n-симплексом*.

Покажем, что *необходимым и достаточным условием того, что n-симплекс $A_0A_1\ldots A_n$ — ортоцентрический, является равенство всех скалярных произведений* $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$, *где* $\mathbf{a}_i = A_0A_i$.

В самом деле, если n-симплекс ортоцентрический и его ортоцентр — точка M, то вектор $\overline{A_0M} = \mathbf{x}$ удовлетворяет условиям

$$\mathbf{x}(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) = 0, \quad (\mathbf{x} - \mathbf{a}_i)\,\mathbf{a}_j = 0 \quad (i \neq j), \tag{5.43}$$

т. е.

$$\mathbf{x}\mathbf{a}_i = \mathbf{x}\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_i\mathbf{a}_j \text{ для всех } i,\ j\ (i \neq j), \tag{5.44}$$

откуда вытекает равенство всех скалярных произведений $\mathbf{x}\mathbf{a}_i$ и всех скалярных произведений $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$.

Пусть теперь все скалярные произведения $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$ равны. Рассмотрим вектор

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}_i\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2 + \ldots + \mathbf{a}^n),$$

где векторы $\mathbf{a}^i$ образуют *взаимный базис* по отношению к базису, состоящему из векторов $\mathbf{a}_i$. Поэтому скалярные произведения $\mathbf{a}_i\mathbf{a}^j$ равны δ_i^j и, следовательно,

$$(\mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2 + \ldots + \mathbf{a}^n)\,\mathbf{a}_k = 1 \text{ при всех } k$$

и

$$\mathbf{x}\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_i\mathbf{a}_j \text{ при всех различных } i,\ j,\ k.$$

Поэтому выполнены все равенства (5.44) и, следовательно, выполнены также все равенства (5.43) и точка M, для которой $\overline{A_0M} = \mathbf{x}$, является ортоцентром n-симплекса.

На рис. 5.9, *а* изображен треугольник $A_0A_1A_2$ с ортоцентром M, а на рис. 5.9, *б* — ортоцентрический тетраэдр $A_0A_1A_2A_3$ с ортоцентром M.

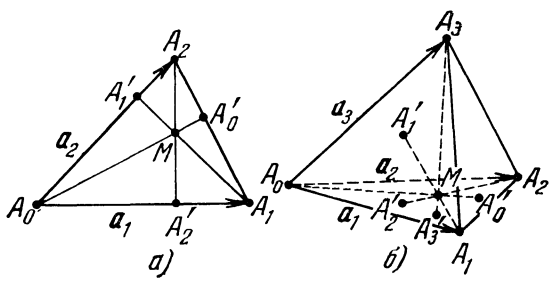

Рис. 5.9.

Равенство всех скалярных произведений $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j$ равносильно равенствам

$$\mathbf{a}_i\,(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_k) = 0 \text{ при всех различных } i,j,k$$

и

$$(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)\ (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_l) = 0 \text{ при всех различных } i,\ j,\ k,\ l,$$

представляющим собой условия перпендикулярности векторов $\overline{A_\alpha A_\beta}$ и $\overline{A_\gamma A_\delta}$ при всех различных $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, т. е. условия перпендикулярности направлений всех пар ребер n-симплекса, расположенных на скрещивающихся прямых. Поэтому *необходимым и достаточным условием того, что n-симплекс $A_0A_1...A_n$ при $n > 2$ — ортоцентрический, является перпендикулярность направлений всех пар его ребер, расположенных на скрешивающихся прямых.*

В случае $n = 2$ имеется единственное скалярное произведение $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, поэтому высоты всякого треугольника пересекаются в одной точке.

§ 4. Многогранники нулевого рода

5.4.1. Многогранники. Будем называть *m-многогранниками* (при $m = 2$ — *многоугольниками*) фигуры, состоящие из m-симплексов, примыкающих друг к другу по их $(m - 1)$-граням. Примыкающие друг к другу p-грани m-симплексов, лежащие в одной p-плоскости, можно объединить в одну *p-грань m-многогранника*, являющуюся p-многогранником; причем общие грани объединяемых p-граней m-симплексов не будем считать гранями m-многогранника.

Совокупность граней m-многогранника, т. е. совокупность тех граней составляющих его симплексов, которые не являются общими гранями примыкающих m-симплексов, называется *границей* m-многогранника. Точки m-многогранника, не являющиеся точками его границы, называются *внутренними точками* m-многогранника.

На рис. 5.10 изображены примеры 3-многогранников— 5-угольная и 6-угольная призмы и 5-угольная и 6-угольная пирамиды.

5.4.2. Призмы и пирамиды. Подвергая $(m - 1)$-многогранник переносу и соединяя отрезком каждую точку этого $(m-1)$-многогранника с той точкой, в которую она переходит при переносе, мы получим *m-призму* [6]. Исходный $(m - 1)$-многогранник и тот $(m - 1)$-многогранник, в который он переходит при переносе, называются *осно-*