представляющим собой условия перпендикулярности векторов $\overline{A_\alpha A_\beta}$ и $\overline{A_\gamma A_\delta}$ при всех различных $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, т. е. условия перпендикулярности направлений всех пар ребер n-симплекса, расположенных на скрещивающихся прямых. Поэтому *необходимым и достаточным условием того, что n-симплекс $A_0A_1...A_n$ при $n > 2$ — ортоцентрический, является перпендикулярность направлений всех пар его ребер, расположенных на скрешивающихся прямых.*

В случае $n = 2$ имеется единственное скалярное произведение $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, поэтому высоты всякого треугольника пересекаются в одной точке.

§ 4. Многогранники нулевого рода

5.4.1. Многогранники. Будем называть *m-многогранниками* (при $m = 2$ — *многоугольниками*) фигуры, состоящие из m-симплексов, примыкающих друг к другу по их $(m - 1)$-граням. Примыкающие друг к другу p-грани m-симплексов, лежащие в одной p-плоскости, можно объединить в одну *p-грань m-многогранника*, являющуюся p-многогранником; причем общие грани объединяемых p-граней m-симплексов не будем считать гранями m-многогранника.

Совокупность граней m-многогранника, т. е. совокупность тех граней составляющих его симплексов, которые не являются общими гранями примыкающих m-симплексов, называется *границей* m-многогранника. Точки m-многогранника, не являющиеся точками его границы, называются *внутренними точками* m-многогранника.

На рис. 5.10 изображены примеры 3-многогранников— 5-угольная и 6-угольная призмы и 5-угольная и 6-угольная пирамиды.

5.4.2. Призмы и пирамиды. Подвергая $(m - 1)$-многогранник переносу и соединяя отрезком каждую точку этого $(m-1)$-многогранника с той точкой, в которую она переходит при переносе, мы получим *m-призму* [6]. Исходный $(m - 1)$-многогранник и тот $(m - 1)$-многогранник, в который он переходит при переносе, называются *осно-*

ваниями m-призмы, а расстояние между $(m-1)$-плоскостями двух оснований m-призмы называется *высотой* m-призмы. На рис. 5.10, *а* и *б* изображены 3-призмы с основаниями $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$, $ABCDEF$ и $A'B'C'D'E'F'$. Частным случаем m-призмы является m-параллелепипед, который получается, если за основание m-призмы принять $(m-1)$-параллелепипед.

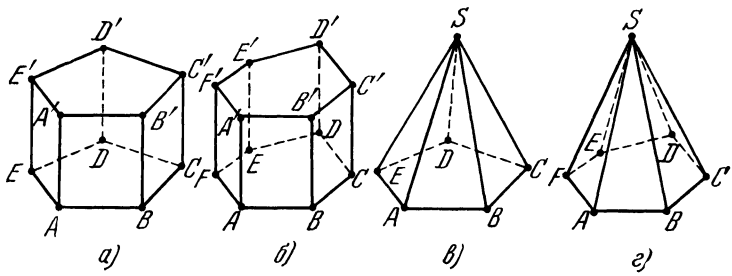

Рис. 5.10.

Соединяя отрезком каждую точку $(m-1)$-многогранника с некоторой точкой S, не лежащей в $(m-1)$-плоскости $(m-1)$-многогранника, мы получим *m-пирамиду*[7]. Исходный $(m-1)$-многогранник называется *основанием m-пирамиды*, а точка S — *вершиной m-пирамиды*; расстояние от вершины до $(m-1)$-плоскости основания m-пирамиды называется *высотой* m-пирамиды. На рис. 5.10, *в* и *г* изображены 3-пирамиды с основаниями $ABCDE$ и $ABCDEF$. Частным случаем n-пирамиды является n-симплекс, который получается, если за основание n-пирамиды принять $(n-1)$-симплекс.

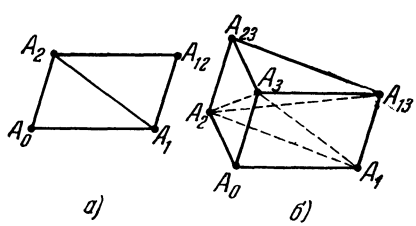

Рис. 5.11.

Разбивая основание m-пирамиды на $(m-1)$-симплексы, мы получим разбиение m-пирамиды на m-симплексы, откуда вытекает, что *m-пирамиды являются m-многогранниками*.

Покажем, что *m-призму, основанием которой является $(m-1)$-симплекс, можно разбить на m m-симплексов равного объема*. В самом деле, если основаниями m-призмы $A_0A_1\ldots A_mA_{1m}A_{2m}\ldots A_{m-1,\,m}$ являются $(m-1)$-симплексы $A_0A_1\ldots A_{m-1}$ и $A_mA_{1m}\ldots A_{m-1,\,m}$, то эта m-призма разбивается на m-симплексы $A_0A_1\ldots A_{m-1}A_m$, $A_1\ldots A_{m-1}A_mA_{1m}$, $A_2\ldots A_{m-1}A_mA_{1m}A_{2m}$, ..., $A_i\ldots A_{m-1}A_mA_{1m}\ldots A_{im}$, ..., $A_mA_{1m}\ldots A_{m-1,m}$. Каждые два соседние из этих m-симплексов имеют общее основание и равные высоты, например, m-симплексы $A_i\ldots A_{m-1}A_mA_{1m}\ldots A_{im}$ и $A_{i+1}\ldots A_{m-1}A_mA_{1m}\ldots A_{i+1,\,m}$ имеют общее основание $A_{i+1}\ldots A_{m-1}A_mA_{1m}\ldots A_{im}$, причем высоты этих m-симплексов, равные расстояниям от точек A_i и $A_{i+1,\,m}$ до плоскости $A_{i+1}\ldots A_{m-1}A_mA_{1m}\ldots A_{im}$, равны. На рис. 5.11, *а* изображено разбиение параллелограмма $A_0A_1A_2A_{12}$ на треугольники $A_0A_1A_2$ и $A_1A_2A_{12}$, на рис. 5.11, *б* изображено разбиение призмы $A_0A_1A_2A_3A_{13}A_{23}$ на тетраэдры $A_0A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_3A_{13}$ и $A_2A_3A_{13}A_{23}$.

Разбивая основание m-призмы на $(m-1)$-симплексы, мы получим новые m-призмы, которые можно разбить на m-симплексы, откуда вытекает, что *m-призмы являются m-многогранниками*. Поэтому, в частности, *m-параллелепипеды являются m-многогранниками*.

Покажем, что m-параллелепипед можно разбить на $m!$ m-симплексов равного объема. В самом деле, если нам дан m-параллелепипед $A_0A_1\ldots A_m\ldots A_{12\ldots m}$, то его 2-грань $A_0A_1A_2A_{12}$ можно разбить на два треугольника $A_0A_1A_2$ и $A_1A_2A_{12}$. Поэтому 3-грань $A_0A_1A_2A_3A_{12}A_{13}A_{23}A_{123}$ разбивается на две трехгранные 3-призмы $A_0A_1A_2A_3A_{13}A_{23}$ и $A_1A_2A_{12}A_{13}A_{23}A_{123}$ и, так как каждая из этих 3-призм разбивается на 3 тетраэдра, вся 3-грань разбивается на $2\cdot3=6$ тетраэдров. Поэтому 4-грань $A_0A_1\ldots A_{1234}$ разбивается на 6 4-призм, основаниями которых являются тетраэдры, и, так как каждая из этих 4-призм разбивается на 4 4-симплекса, вся 4-грань разбивается на $2\cdot3\cdot4=24$ 4-симплекса. Если мы предположим, что $(p-1)$-грань $A_0A_1\ldots A_p\ldots A_{12\ldots p-1}$ разбивается на $(p-1)!$ $(p-1)$-симплексов, то p-грань разбивается на $(p-1)!$ p-призм, основаниями которых являются $(p-1)$-симплексы и, так как каждая из этих p-призм разбивается на p p-симплексов, вся p-грань разбивается на $(p-1)!\cdot p=p!$ p-симплексов. Таким же образом показывается, что $(m-1)$-

грань разбивается на $(m-1)!$ $(m-1)$-симплексов, откуда следует, что весь m-параллелепипед разбивается на $(m-1)!$ m-призм, основаниями которых являются $(m-1)$-симплексы и, так как каждая из этих m-призм разбивается на m-симплексов, мы получаем, что весь m-параллелепипед разбивается на $(m-1)!\cdot m = m!$ m-симплексов.

Объем V_m m-призмы равен произведению объема V_{m-1}, одного из ее оснований на ее высоту h_m, т. е. объем V_m вычисляется по той же формуле (5.23), что и объем m-параллелепипеда. В самом деле, если мы проведем плоскость, параллельную плоскостям оснований, на расстоянии x от одной из них, то эта плоскость высечет из m-призмы $(m-1)$-многогранник, конгруэнтный ее основаниям. Так как сечения m-призмы конгруэнтны ее основаниям, объем этого сечения равен объему V_{m-1} основания. Поэтому формулу (5.30) для определения объема m-призмы можно переписать в виде

$$V_m = \int_0^{h_m} V_{m-1}\,dx = V_{m-1}\int_0^{h_m} dx = V_{m-1}h_m.$$

Объем V_m m-пирамиды равен $\frac{1}{m}$ произведения объема V_{m-1} ее основания на ее высоту h_m, т. е. объем V_m вычисляется по той же формуле (5.37), что и объем m-симплекса. Для доказательства достаточно разбить m-пирамиду на m-симплексы с общей вершиной в вершине m-пирамиды и с основаниями, образующими разбиение основания m-пирамиды. Так как высоты всех этих m-симплексов равны h_m, а объемы оснований дают в сумме объем V_{m-1} основания m-пирамиды, наше утверждение вытекает из формулы (5.37) для объема m-симплекса.

5.4.3. Выпуклые многогранники. Симплексы и параллелепипеды обладают тем свойством, что они находятся по одну сторону от плоскости всякой их грани. Будем называть многранники, обладающие этим свойством, *выпуклыми многогранниками*. Из этого определения следует, что *выпуклые многогранники можно рассматривать как пересечения конечного числа m-полуплоскостей.*

Так как m-полуплоскости обладают тем свойством, что вместе со всякими двумя их точками A и B им принадлежат и все точки отрезка AB, то этим свойством обладают и выпуклые многогранники. Выпуклые многогранники являются частным случаем *выпуклых фигур* — множеств точек, обладающих тем свойством, что вместе со всякими двумя их точками A и B им принадлежат все точки отрезка AB. Помимо m-полуплоскостей и выпуклых m-многогранников примерами выпуклых фигур являются m-плоскости; при $m = 1$ прямые, полупрямые и отрезки исчерпывают все выпуклые 1-фигуры.

Заметим, что m-призмы и m-пирамиды являются выпуклыми многогранниками в случае, когда их основания являются выпуклыми $(m - 1)$-многогранниками.

5.4.4. Многогранники нулевого рода. *Всякий выпуклый m-многогранник* можно поставить во взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие с m-симплексом: для этого достаточно поместить внутрь выпуклого m-многогранника m-симплекс, тогда всякий луч, выходящий из центра тяжести m-симплекса, пересечет как одну из граней m-симплекса, так и одну из граней m-многогранника в единственной точке. Искомое соответствие мы получим, устанавливая на каждом из этих лучей растяжение, переводящее точку пересечения луча с гранью m-симплекса в точку его пересечения с гранью m-многогранника.

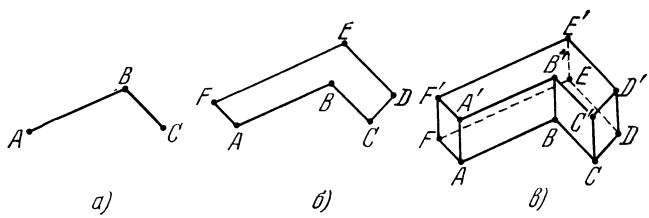

Рис. 5.12.

Многогранники, находящиеся во взаимно однозначном и взаимно непрерывном соответствии с m-симплексами, называются *m-многогранниками нулевого рода* [8]. Однако не всякий m-многогранник нулевого рода является выпуклым: на рис. 5.12 изображены примеры невыпуклых m-многогранников нулевого рода при $m = 1, 2, 3$.

Во всех этих многогранниках все внутренние точки отрезка AC, соединяющего вершины A и C, не являются точками многогранника.

Мы будем объединять p-грани m-симплексов, составляющих m-многогранник, только в том случае, когда объединенные p-грани являются p-многогранниками нулевого рода. Поэтому мы будем представлять себе произвольные m-многогранники состоящими из m-многогранников нулевого рода, примыкающих друг к другу по своим граням; общие грани необъединяемых m-многогранников нулевого рода будем считать гранями данного m-многогранника. В том случае, когда m-многогранник рассматривается как состоящий из некоторого числа m-многогранников нулевого рода, эти m-многогранники нулевого рода называются *ячейками* данного m-многогранника.

На рис. 5.13 изображены 1-многогранники, ячейками которых являются отрезки.

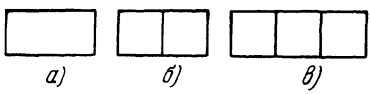

Рис. 5.13.

На рис. 5.14 изображены многоугольники, ячейками которых являются трапеции.

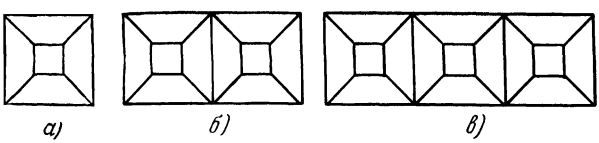

Рис. 5.14.

На рис. 5.15 изображены 3-многогранники, ячейками которых являются призмы.

Совокупность граней m-симплекса, у которого удалена одна $(m-1)$-грань, является $(m-1)$-многогранником нулевого рода: для доказательства достаточно спроектировать эти грани из точки A_0', получающейся отражением

вершины A_0, лежащей против удаленной грани $A_1A_2\ldots A_m$ от центра тяжести удаленной грани, на $(m-1)$-плоскость, проведенную через A_0 параллельно этой грани. При этом

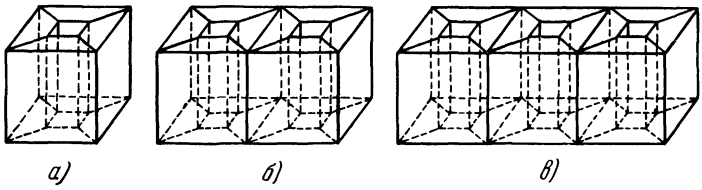

Рис. 5.15.

рассматриваемая совокупность граней m-симплекса $A_0A_1\ldots A_m$ проектируется в виде $(m-1)$-симплекса $A_1'A_2'\ldots A_m'$, разбитого на m $(m-1)$-симплексов $A_0A_1'\ldots A_{m-1}',\ldots,A_0A_2'\ldots A_m'$. На рис. 5.16, *а* изображено проектирование совокупности сторон A_0A_1 и A_0A_2 треугольника $A_0A_1A_2$ на отрезок $A_1'A_2'$, состоящий из отрезков

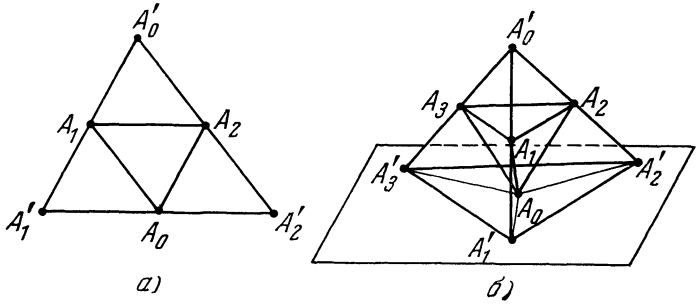

Рис. 5.16.

$A_1'A_0$ и A_0A_2'. На рис. 5.16, *б* изображено проектирование совокупности граней $A_0A_1A_2$, $A_0A_1A_3$ и $A_0A_2A_3$ тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$ на треугольник $A_1'A_2'A_3'$, состоящий из треугольников $A_0A_1'A_2'$, $A_0A_1'A_3'$ и $A_0A_2'A_3'$.

Так как p-многогранник нулевого рода находится во взаимно однозначном и взаимно непрерывном соответствии с p-симплексом, из этого вытекает, что *совокупность граней m-многогранника нулевого рода, у которого удалена*

одна $(m-1)$*-грань, являющаяся* $(m-1)$*-многогранником нулевого рода, также является* $(m-1)$*-многогранником нулевого рода.*

5.4.5. Теорема Эйлера. Важнейшим свойством многогранников нулевого рода является *теорема Эйлера*[9]: *если число вершин* m*-многогранника нулевого рода* N_0, *число его* p*-граней* — N_p, *а число его ячеек* N_m, *то*

$$1 - N_0 + N_1 - N_2 + \ldots + (-1)^{p-1}N_p + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m-2}N_{m-1} + (-1)^{m-1}N_m = 0. \quad (5.45)$$

Формула (5.45) справедлива при $m = 1$, когда многогранник представляет собой незамкнутую ломаную линию, состоящую из N_1 звеньев. Так как число вершин N_0 такой ломаной всегда равно $N_1 + 1$, то всегда $1 - N_0 + N_1 = 0$.

Предположим, что формула (5.45) справедлива для $(m-1)$-многогранников.

Рассмотрим m-многогранник нулевого рода, состоящий из одной ячейки ($N_m = 1$). Если мы удалим эту ячейку и одну из $(m-1)$-граней m-многогранника, совокупность остальных граней m-многогранника образует $(m-1)$-гранник нулевого рода, числа вершин и p-граней которого при $p < m-1$ совпадают с соответственными числами для m-многогранника, а число $(m-1)$-граней равно $N_{m-1} - 1$. Для этого $(m-1)$-гранника в силу нашего предположения

$$1 - N_0 + N_1 - N_2 + \ldots + (-1)^{p-1}N_p + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m-2}(N_{m-1} - 1) = 0,$$

что совпадает с формулой (5.45) при $N_m = 1$.

Предположим теперь, что формула (5.45) справедлива для m-многогранников, состоящих из $N_m - 1$ ячеек. Такой многогранник мы получим, удалив одну из ячеек этого m-многогранника. Обозначим числа вершин и p-граней этого m-многогранника, не являющихся вершинами и p-гранями удаленной ячейки, через N_0' и N_p', числа вершин и p-граней m-многогранника с $N_m - 1$ ячейками, являющихся вершинами и p-гранями удаленной ячейки, через N_0'' и N_p'', а числа вершин и p-граней

удаленной ячейки, не являющихся вершинами и p-гранями m-многогранника с $N_m - 1$ ячейками, — через N_0''' и N_p'''. Для m-многогранника с $N_m - 1$ ячейками, согласно нашему предположению,

$$1 - (N_0' + N_0'') + (N_1' + N_1'') - \ldots + (-1)^{p-1}(N_p' + N_p'') + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m-2}(N_{m-1}' + N_{m-1}'') + (-1)^{m-1}(N_m - 1) = 0,$$

для удаленной ячейки, согласно нашему предположению,

$$1 - (N_0'' + N_0''') + (N_1'' + N_1''') - \ldots + (-1)^{p-1}(N_p'' + N_p''') + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m-2}(N_{m-1}'' + N_{m-1}''') + (-1)^{m-1} = 0.$$

С другой стороны, совокупность общих граней m-многогранника с $N_m - 1$ ячейками и удаленной ячейкой образует $(m-1)$-многогранник нулевого рода, для которого

$$1 - N_0'' + N_1'' - \ldots - (-1)^{p-1} N_p'' + \ldots + (-1)^{m-2} N_{m-1}'' = 0.$$

Складывая левые части первых двух из этих равенств, вычитая из полученной суммы левую часть последнего равенства и учитывая, что

$$N_0' + N_0'' + N_0''' = N_0, \qquad N_p' + N_p'' + N_p''' = N_p,$$

мы получаем равенство (5.45).

При $m = 3$ теорему Эйлера обычно записывают в виде

$$N_0 - N_1 + N_2 = 2. \tag{5.46}$$

Формула (5.45) очевидным образом выполняется для m-симплексов и m-параллелепипедов. В случае m-симплексов в силу формулы (5.37) $N_p = \binom{m+1}{p+1}$ и

$$1 - N_0 + N_1 - \ldots + (-1)^{p-1} N_p + \ldots + (-1)^{m-1} N_m =$$
$$= 1 - (m+1) + \binom{m+1}{2} + \ldots + (-1)^{p-1}\binom{m+1}{p+1} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m-1} = (1-1)^{m+1} = 0.$$

В случае m-параллелепипедов в силу формулы (5.19) $N_p = 2^{m-p}\binom{m}{p}$ и

$$1 - N_0 + N_1 - N_2 + \ldots + (-1)^{p-1} N_p + \ldots + (-1)^{m-2} N_{m-1} + \\ + (-1)^{m-1} N_m = 1 - 2^m + 2^{m-1} m - 2^{m-2}\binom{m}{2} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{p-1} 2^{m-p}\binom{m}{p} + \ldots + (-1)^{m-2} 2m + (-1)^{m-1} = \\ = 1 - (2-1)^m = 1 - 1 = 0.$$

В случае многогранников ненулевого рода левая часть формулы (5.45) уже не равна 0. В частности, в случае многогранников первого рода, изображенных на рис. 5.13, *а*, 5.14, *а*, 5.15, *а*, имеем соответственно

$$1 - N_0 + N_1 = 1 - 4 - 4 = 1,$$
$$1 - N_0 + N_1 - N_2 = 1 - 8 + 12 - 4 = 1,$$
$$1 - N_0 + N_1 - N_2 + N_3 = 1 - 16 + 32 - 20 + 4 = 1.$$

В случае многогранников второго рода, изображенных на рис. 5.13, *б*, 5.14, *б* и 5.15, *б*, соответственно имеем

$$1 - N_0 + N_1 = 1 - 6 + 7 = 2,$$
$$1 - N_0 + N_1 - N_2 = 1 - 14 + 22 - 7 = 2,$$
$$1 - N_0 + N_1 - N_2 + N_3 = 1 - 28 + 58 - 36 + 7 = 2.$$

В случае многогранников третьего рода, изображенных на рис. 5.13, *в*, 5.14, *в* и 5.15, *в*, соответственно имеем

$$1 - N_0 + N_1 = 1 - 8 + 10 = 3,$$
$$1 - N_0 + N_1 - N_2 = 1 - 20 + 32 - 10 = 3,$$
$$1 - N_0 + N_1 - N_2 + N_3 = 1 - 40 + 84 - 52 + 10 = 3.$$

§ 5. Правильные многогранники

5.5.1. Правильные многоугольники и 3-многогранники. *Правильным многоугольником* называется выпуклый многоугольник, все стороны и все углы которого соответственно конгруэнтны между собой. Существуют правильные p-угольники для любого целого числа $p \geqslant 3$. Будем обозначать правильные p-угольники символами $\{p\}$.