В случае m-параллелепипедов в силу формулы (5.19) $N_p = 2^{m-p}\binom{m}{p}$ и

$$1 - N_0 + N_1 - N_2 + \ldots + (-1)^{p-1} N_p + \ldots + (-1)^{m-2} N_{m-1} + \\ + (-1)^{m-1} N_m = 1 - 2^m + 2^{m-1} m - 2^{m-2}\binom{m}{2} + \ldots \\ \ldots + (-1)^{p-1} 2^{m-p}\binom{m}{p} + \ldots + (-1)^{m-2} 2m + (-1)^{m-1} = \\ = 1 - (2-1)^m = 1 - 1 = 0.$$

В случае многогранников ненулевого рода левая часть формулы (5.45) уже не равна 0. В частности, в случае многогранников первого рода, изображенных на рис. 5.13, *а*, 5.14, *а*, 5.15, *а*, имеем соответственно

$$1 - N_0 + N_1 = 1 - 4 - 4 = 1,$$
$$1 - N_0 + N_1 - N_2 = 1 - 8 + 12 - 4 = 1,$$
$$1 - N_0 + N_1 - N_2 + N_3 = 1 - 16 + 32 - 20 + 4 = 1.$$

В случае многогранников второго рода, изображенных на рис. 5.13, *б*, 5.14, *б* и 5.15, *б*, соответственно имеем

$$1 - N_0 + N_1 = 1 - 6 + 7 = 2,$$
$$1 - N_0 + N_1 - N_2 = 1 - 14 + 22 - 7 = 2,$$
$$1 - N_0 + N_1 - N_2 + N_3 = 1 - 28 + 58 - 36 + 7 = 2.$$

В случае многогранников третьего рода, изображенных на рис. 5.13, *в*, 5.14, *в* и 5.15, *в*, соответственно имеем

$$1 - N_0 + N_1 = 1 - 8 + 10 = 3,$$
$$1 - N_0 + N_1 - N_2 = 1 - 20 + 32 - 10 = 3,$$
$$1 - N_0 + N_1 - N_2 + N_3 = 1 - 40 + 84 - 52 + 10 = 3.$$

§ 5. Правильные многогранники

5.5.1. Правильные многоугольники и 3-многогранники. *Правильным многоугольником* называется выпуклый многоугольник, все стороны и все углы которого соответственно конгруэнтны между собой. Существуют правильные p-угольники для любого целого числа $p \geqslant 3$. Будем обозначать правильные p-угольники символами $\{p\}$.

Правильным 3-многогранником называется выпуклый 3-многогранник, все грани которого — конгруэнтные между собой правильные многоугольники, а середины ребер, примыкающих к каждой вершине, являются вершинами также конгруэнтных между собой правильных многоугольников. Эти последние многоугольники называются *вершинными многоугольниками*; вместо правильности и конгруэнтности этих многоугольников в определении правильных многогранников часто говорят о правильности и конгруэнтности многогранных углов при вершинах многогранников. Если грани правильного многогранника являются правильными многоугольниками $\{p\}$, а его вершинные многоугольники являются правильными многоугольниками $\{q\}$, будем обозначать правильные многогранники символами $\{p, q\}$.

Числа N_0, N_1 и N_2 вершин, ребер и граней правильного многогранника, с одной стороны, связаны соотношением (5.6), а с другой стороны, число N_0 вершин многогранника равно числу вершин всех граней многогранника, т. е. N_2p, деленному на число граней, примыкающих к одной вершине, т. е. на q, а число N_1 ребер многогранника равно числу ребер всех граней многогранника, т. е. тому же числу N_2p, деленному на число граней, примыкающих к одному ребру, т. е. на 2. Таким образом,

$$N_0 = N_2 \frac{p}{q}, \qquad N_1 = N_2 \frac{p}{2}. \tag{5.47}$$

Поэтому соотношение (5.46) можно переписать в виде

$$N_2\left(\frac{p}{q} - \frac{p}{2} + 1\right) = N_2 \frac{2p + 2q - pq}{2q} = 2$$

или

$$N_2 = \frac{4q}{2p + 2q - pq}. \tag{5.48}$$

Наименьшие возможные значения p и q равны 3. Формула (5.46) дает конечные положительные значения N_2 только при значениях p и q, указанных в табл. 5.1.

При $p = q = 4$ и при $p = 3$, $q = 6$ и $p = 6$, $q = 3$ (случаи так называемых «com» см. 5.5.13) мы получаем $N_2 = \infty$; при $p = 3$, $q > 6$, при $p > 6$, $q = 3$ и при $p \geqslant 4$, $q > 4$ мы получаем для N_2 отрицательные значения.

Поэтому единственными возможными правильными 3-многогранниками являются многогранники $\{3,3\}$ — *правильный тетраэдр* (рис. 5.17, *а*), $\{3, 4\}$ — *правильный октаэдр* (рис. 5.17, *б*), $\{4,3\}$ — *куб* (рис. 5.17, *в*), $\{3,5\}$ — *правильный икосаэдр* (рис. 5.17, *г*) и $\{5,3\}$ — *правильный додекаэдр* (рис. 5.17, *д*)[10].

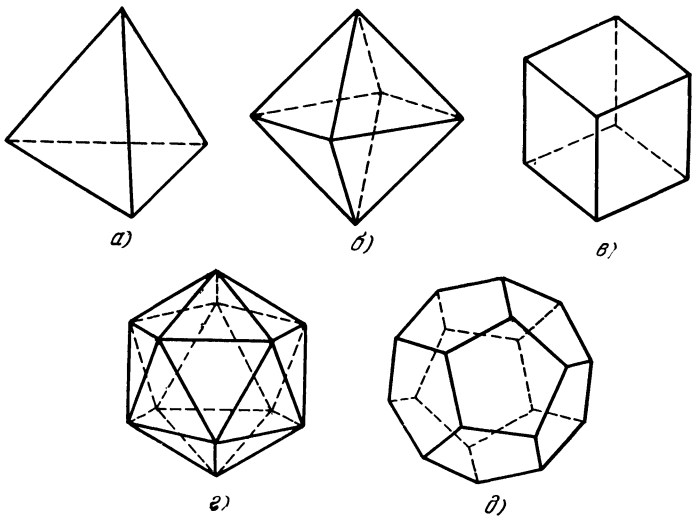

Рис. 5.17.

Применяя формулы (5.47), мы находим, что число N_0 вершин и число N_1 ребер пяти правильных 3-многогранников соответственно равны числам, указанным в табл. 5.2.

Таблица 5.1

p	q	N_2
3	3	4
3	4	8
4	3	6
3	5	20
5	3	12

Таблица 5.2

p	q	N_0	N_1
3	3	4	6
3	4	6	12
4	3	8	12
3	5	12	30
5	3	20	30

5.5.2. **Правильные n-многогранники.** Определение правильных многоугольников и 3-многогранников позволяет определить *правильные n-многогранники* по индукции. Предположим, что правильные $(n-1)$-многогранники $(n-1)$-пространства уже определены. Тогда будем называть правильным n-многогранником n-пространства такой выпуклой n-многогранник этого пространства, все $(n-1)$-грани которого — конгруэнтные между собой правильные $(n-1)$-многогранники, а середины ребер, примыкающих к каждой вершине, являются вершинами также конгруэнтных между собой правильных $(n-1)$-многогранников, называемых *вершинными* $(n-1)$-*многогранниками*. Если 2-грани правильного n-многогранника являются правильными многоугольниками $\{p_1\}$, 2-грани вершинных $(n-1)$-многогранников n-многогранника являются правильными многоугольниками $\{p_2\}$, 2-грани вершинных $(n-2)$-многогранников этих $(n-1)$-многогранников являются правильными многоугольниками $\{p_3\}$,..., 2-грани вершинных $(n-i+1)$-многогранников, определяемых аналогичным образом вершинных $(n-i+2)$-многогранников, являются правильными многоугольниками $\{p_i\}$,..., 2-грани вершинных многоугольников, определяемых аналогичным образом вершинных 3-многогранников, являются правильными многоугольниками $\{p_{n-1}\}$, мы будем обозначать правильные n-многогранники символами $\{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}$.

Из этого определения видно, что вершинные $(n-1)$-многогранники правильного n-многогранника являются правильными многогранниками $\{p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}\}$, вершинные $(n-2)$-многогранники этих $(n-1)$-многогранников являются правильными многогранниками $\{p_3, p_4, \ldots, p_{n-1}\}$ и т. д.

Так как $(n-2)$-грани вершинных $(n-1)$-многогранников правильного n-многогранника совпадают с вершинными $(n-2)$-многогранниками $(n-1)$-граней правильного n-многогранника, то $(n-1)$-грани правильного n-многогранника являются правильными многогранниками $\{p_1, p_2, \ldots, p_{n-2}\}$; точно так же показывается, что $(n-2)$-грани правильного n-многогранника являются правильными многогранниками $\{p_1, p_2, \ldots, p_{n-3}\}$ и т. д. [11].

5.5.3. Центр правильного многогранника. Покажем, что *внутри каждого правильного n-многогранника имеется точка, находящаяся на равных расстояниях от всех его вершин и на равных расстояниях от всех его p-граней, в том числе и от* $(n-1)$*-граней*. Для доказательства рассмотрим две примыкающие друг к другу $(n-1)$-грани n-многогранника. Эти $(n-1)$-грани находятся в двух $(n-1)$-плоскостях, пересекающихся по $(n-2)$-плоскости, содержащей $(n-2)$-грань n-многогранника. Эти $(n-1)$-плоскости образуют угол, меньший развернутого угла. Поэтому в пучке $(n-1)$-плоскостей, определяемом этими двумя $(n-1)$-плоскостями, имеется $(n-1)$-плоскость, образующая с этими двумя $(n-1)$-плоскостями равные острые углы; будем называть эту $(n-1)$-плоскость *биссектральной* $(n-1)$-*плоскостью*. Если мы построим такие биссектральные $(n-1)$-плоскости для данной $(n-1)$-грани n-многогранника и всех его $(n-1)$-граней, примыкающих к этой грани, эти $(n-1)$-плоскости вместе с $(n-1)$-гранью n-многогранника образуют n-пирамиду с правильным основанием. Если мы построим такую же n-пирамиду на $(n-1)$-грани, примыкающей к первой $(n-1)$-грани, то эти две n-пирамиды будут конгруэнтны и будут примыкать друг к другу по одной из своих боковых $(n-1)$-граней. Поэтому будут совпадать и вершины этих n-пирамид. На рис. 5.18 изображены две такие 3-пирамиды $SABCDE$ и $SABC'D'E'$ для додекаэдра в 3-пространстве.

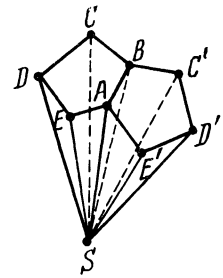

Рис. 5.18.

Строя аналогичные n-пирамиды на всех $(n-1)$-гранях n-многогранника, мы найдем, что все эти n-пирамиды также будут конгруэнтны и их вершины также совпадут между собой. Эта точка находится на равных расстояниях от всех вершин и p-граней оснований этих пирамид и от самих этих оснований, т. е. на равных расстояниях от вершин n-многогранника и на равных расстояниях от всех его p-граней, в том числе и от $(n-1)$-граней.

Будем называть эту точку *центром* n-многогранника.

5.5.4. Характеристический симплекс правильного многогранника. С каждым правильным n-многогранником можно связать n-симплекс, вершинами которого являются центры n-многогранника и вложенных друг в друга p-граней этого многогранника до его вершины. Обозначим центр p-грани n-многогранника, являющийся вершиной этого n-симплекса, через O_p, в частности, вершину n-многогранника — через O_0, середину ребра n-многогранника — через O_1, а центр самого n-многогранника — через O_n;

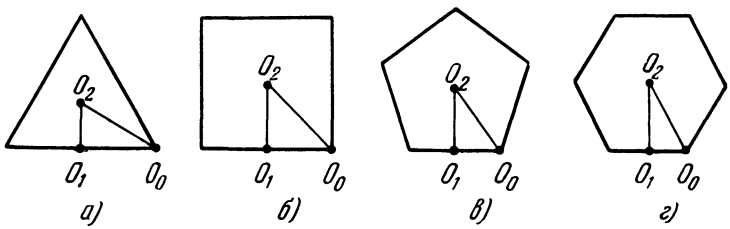

Рис. 5.19.

будем называть определенный таким образом n-симплекс $O_0O_1O_2\ldots O_n$ *характеристическим симплексом* n-многогранника. На рис. 5.19 изображены характеристические треугольники равностороннего треугольника $\{3\}$, квадрата $\{4\}$, правильных 5-угольника $\{5\}$ и 6-угольника $\{6\}$. Заметим, что угол между гранями $O_1O_2\ldots O_{n-1}$ и $O_0O_2\ldots O_{n-1}$ n-симплекса равен углу $O_1O_2O_0$, находящемуся в 2-грани n-многогранника и равному углу между прямыми, соединяющими центр этой 2-грани с ее вершиной и серединой ее стороны, т. е. углу $\frac{\pi}{p_1}$. Угол между гранями $O_0O_2O_3\ldots O_{n-1}$ и $O_0O_1O_3\ldots O_{n-1}$ n-симплекса $O_0O_1\ldots O_n$ равен углу, находящемуся в 2-грани вершинного $(n-1)$-многогранника, заключенному между прямыми, соединяющими центр этой 2-грани с ее вершиной и серединой ее стороны, т. е. углу $\frac{\pi}{p_2}$. Точно так же угол между гранями

$$O_0O_1\ldots O_{i-2}O_i\ldots O_n \quad \text{и} \quad O_0O_1\ldots O_{i-1}O_{i+1}\ldots O_n$$

n-симплекса $O_0O_1\ldots O_n$ равен углу, находящемуся в 2-грани вершинного $(n-i+2)$-многогранника, заключенно-

му между прямыми, соединяющими центр этой 2-грани с ее вершиной и серединой ее стороны, т. е. углу $\frac{\pi}{p_i}$. Наконец, угол между гранями $O_0O_1\ldots O_{n-3}O_{n-1}O_n$ и $O_0O_1\ldots O_{n-2}O_n$ n-симплекса $O_0O_1\ldots O_n$ равен углу вершинного многоугольника, заключенному между прямыми, соединяющими центр этого многоугольника с его вершиной и серединой его стороны, т. е. углу $\frac{\pi}{p_{n-1}}$. Отличен от нуля и угол между гранями $O_0O_1\ldots O_{n-2}O_n$ и $O_0O_1\ldots O_{n-1}$ n-симплекса $O_0O_1\ldots O_n$. Все остальные углы между $(n-1)$-гранями n-симплекса $O_0O_1\ldots O_{n-1}$ — прямые.

5.5.5. Классификация правильных n-многогранников. Так как плоскости $O_1O_2\ldots O_{n-1}O_n$, $O_0O_2\ldots O_{n-1}O_n$, $O_0O_1O_3, \ldots O_{n-1}O_n, \ldots$, $O_0O_1\ldots O_{n-2}O_n$ содержат $(n-1)$-грани характеристического n-симплекса $O_0O_1\ldots O_n$ правильного n-многогранника, проходящие через его вершину O_0, нормальные векторы $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$ этих плоскостей линейно независимы и поэтому определитель Грама, составленный из этих векторов, равный квадрату объема n-параллелепипеда, построенного на отрезках, представляемых этими векторами, положителен. Если принять модули всех нормальных векторов за 1, то отличными от нуля будут

$$\mathbf{e}_0^2 = \mathbf{e}_1^2 = \ldots = \mathbf{e}_{n-1}^2 = 1, \tag{5.49}$$

$$\mathbf{e}_0\mathbf{e}_1 = \cos\frac{\pi}{p_1},\ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \cos\frac{\pi}{p_2}, \ldots, \mathbf{e}_{n-2}\mathbf{e}_{n-1} = \cos\frac{\pi}{p_{n-1}}, \tag{5.50}$$

и, следовательно, определитель Грама равен

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{p_1} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cos\frac{\pi}{p_1} & 1 & \cos\frac{\pi}{p_2} & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{p_2} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \cos\frac{\pi}{p_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \cos\frac{\pi}{p_{n-1}} & 1 \end{vmatrix} > 0. \tag{5.51}$$

При $n = 2$ формулу (5.51) можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{p} \\ \cos\frac{\pi}{p} & 1 \end{vmatrix} = \sin^2\frac{\pi}{p} > 0.$$

Неравенство $\sin^2\frac{\pi}{p} > 0$ выполняется при всех целых числах $p \geqslant 3$, что соответствует существованию правильных p-угольников для любого целого числа $p \geqslant 3$.

При $n = 3$ формулу (5.51) можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{p} & 0 \\ \cos\frac{\pi}{p} & 1 & \cos\frac{\pi}{q} \\ 0 & \cos\frac{\pi}{q} & 1 \end{vmatrix} > 0$$

или

$$\cos^2\frac{\pi}{p} + \cos^2\frac{\pi}{q} < 1.$$

Решения этого неравенства определяются значениями p и q, указанными в таблице 5.1.

1) $p = q = 3$, так как

$$\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1,$$

2) $p = 3$, $q = 4$ и 3) $p = 4$, $q = 3$, так как

$$\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} < 1,$$

4) $p = 3$, $q = 5$ и 5) $p = 5$, $q = 3$, так как

$$\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{1}{4} + \frac{3+\sqrt{5}}{8} = \frac{5+\sqrt{5}}{8} < 1.$$

Других решений нет, так как при $p = q = 4$

$$\cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

при $p = 3$, $q = 6$ и $p = 6$, $q = 3$

$$\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1,$$

а при остальных значениях p и q

$$\cos^2\frac{\pi}{p}+\cos^2\frac{\pi}{q}>1.$$

Эти пять решений соответствуют тетраэдру, октаэдру, кубу, икосаэдру и додекаэдру.

При $n=4$ формулу (5.51) можно переписать в виде

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\frac{\pi}{p} & 0 & 0 \\ \cos\frac{\pi}{p} & 1 & \cos\frac{\pi}{q} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{q} & 1 & \cos\frac{\pi}{r} \\ 0 & 0 & \cos\frac{\pi}{r} & 1 \end{vmatrix}>0$$

или

$$1-\cos^2\frac{\pi}{p}-\cos^2\frac{\pi}{q}-\cos^2\frac{\pi}{r}+\cos^2\frac{\pi}{p}\cos^2\frac{\pi}{r}>0,$$

т. е.

$$\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{r}>\cos\frac{\pi}{q}.$$

Решения этого неравенства определяются значениями p, q, r:

1) $p=q=r=3$, так как

$$\sin^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

2) $p=4$, $q=r=3$ и 3) $p=q=3$, $r=4$, так как

$$\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{6}}{4}>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

4) $p=r=3$, $q=4$, так как

$$\sin^2\frac{\pi}{3}=\frac{3}{4}>\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

5) $p=5$, $q=r=3$ и 6) $p=q=3$, $r=5$, так как

$$\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{5-\sqrt{5}}}{4\sqrt{2}}>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

Других решений нет, так как при $p = r = 4$, $q = 3$

$$\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3},$$

а при остальных значениях p, q, r

$$\sin \frac{\pi}{p} \sin \frac{\pi}{r} < \cos \frac{\pi}{q}.$$

Таким образом, в *4-пространстве могут существовать только 6 видов правильных 4-многогранников*: $\{3, 3, 3\}$, $\{4, 3, 3\}$, $\{3, 3, 4\}$, $\{3, 4, 3\}$, $\{5, 3, 3\}$ и $\{3, 3, 5\}$.

При $n > 4$ решения неравенства (5.51) определяются только следующими значениями $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$:

1) $p_1 = p_2 = \ldots = p_{n-1} = 3$,
2) $p_1 = 4$, $p_2 = \ldots = p_{n-1} = 3$,
3) $p_1 = \ldots = p_{n-2} = 3$, $p_{n-1} = 4$.

В самом деле, если мы обозначим определитель в левой части неравенства (5.51) через D_n, определитель, получающийся из определителя D_n вычеркиванием первой строки и первого столбца — через D_{n-1} и определитель, получающийся из определителя D_n вычеркиванием первых двух строк и первых двух столбцов — через D_{n-2}, то, разлагая определитель D_n по первой строке и раскладывая определитель, получающийся из определителя вычеркиванием первой строки и второго столбца, по первому столбцу, мы получим соотношение

$$D_n = D_{n-1} - \cos^2 \frac{\pi}{p_1} D_{n-2}. \tag{5.52}$$

В том случае, когда $p_1 = p_2 = \ldots = p_{n-1} = 3$, т. е.

$$\cos \frac{\pi}{p_1} = \cos \frac{\pi}{p_2} = \ldots = \cos \frac{\pi}{p_{n-1}} = \frac{1}{2},$$

соотношение (5.52) принимает вид

$$D_n = D_{n-1} - \frac{1}{4} D_{n-2}.$$

Так как в этом случае $D_1 = 1$, $D_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, мы находим, что

$$D_n = \frac{n+1}{2^n} > 0.$$

В том случае, когда $p_2 = \ldots = p_{n-1} = 3$, $p_1 \neq 3$, соотношение (5.52) можно переписать в виде

$$D_n = \frac{n}{2^{n-1}} - \cos^2 \frac{\pi}{p_1} \cdot \frac{n-1}{2^{n-2}}$$

и условие $D_n > 0$ равносильно условию

$$\frac{1}{2} \frac{n}{n-1} > \cos^2 \frac{\pi}{p_1}. \tag{5.53}$$

Условие (5.53) при $n = 2$ дает выполняющееся при любых целых $p_1 > 3$ условие

$$\cos^2 \frac{\pi}{p_1} < 1,$$

при $n = 3$ условие (5.53) дает условие

$$\cos^2 \frac{\pi}{p_1} < \frac{3}{4},$$

выполняющееся при $p_1 = 4$ и 5, так как $\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$, а $\cos^2 \frac{\pi}{5} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$; при $n = 4$ условие (5.53) дает условие

$$\cos^2 \frac{\pi}{p_1} < \frac{2}{3},$$

также выполняющееся при $p_1 = 4$ и 5. При $n > 4$ условие (5.53) всегда выполняется при $p_1 = 4$, так как

$$\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \frac{n}{n-1},$$

но уже не выполняется при $p_1 = 5$.

Решение $p_1 = \ldots = p_{n-2} = 3$, $p_{n-1} = 4$ имеет место, потому что в этом случае определитель D_n имеет то же значение, что и при $p_1 = 4$, $p_2 = \ldots = p_{n-1} = 3$.

Других решений нет, так как при $p_1 = p_{n-1} = 4$, $p_2 = \ldots = p_{n-2} = 3$, а также при $n = 5$ и $p_1 = p_2 = p_4 = 3$, $p_3 = 4$ и $p_1 = p_3 = p_4 = 3$, $p_2 = 4$, как нетрудно проверить, $D_n = 0$, а при остальных значениях $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ определитель $D_n < 0$.

Таким образом, *в n-пространстве при $n > 4$ могут существовать только 3 вида правильных n-многогранников* $\{3, 3,\ldots, 3, 3\}$, $\{4, 3,\ldots, 3,3\}$ и $\{3,3,\ldots, 3,4\}$.

Ниже мы покажем, что все эти виды правильных n-многогранников действительно существуют.

5.5.6. Правильный n-симплекс. Прежде всего построим *правильный n-симплекс.*

Правильный n-симплекс при $n = 2$ — равносторонний треугольник. Равносторонний треугольник $A_0A_1A_2$ с центром в начале системы прямоугольных координат и со стороной A_0A_1 на прямой $x^2 = -1$ имеет вершины в точках с координатами $(-\sqrt{3}, -1)$, $(\sqrt{3}, -1)$ и $(0, 2)$.

Для построения правильного n-симплекса $A_0A_1\ldots A_n$ с центром в начале системы прямоугольных координат и с гранью $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ на плоскости $x^n = -1$ предположим, что мы построили аналогичный правильный $(n-1)$-симплекс.

Так как центр O n-симплекса делит отрезок прямой OA_n между точкой A_n и плоскостью $x^n = -1$ в отношении $n : 1$, а прямая OA_n совпадает с n-й координатной осью, вершина A_n имеет координаты $(0, 0,\ldots, 0, n)$; n-е координаты вершин $A_0, A_1,\ldots, A_{n-1}$ равны -1, а первые $n-1$ координаты этих вершин можно получить из координат одноименных вершин $(n-1)$-симплекса $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ умножением их на такой множитель α_n, чтобы все расстояния $OA_0, OA_1,\ldots, OA_{n-1}$ были бы равны расстоянию OA_n, т. е. n. Так как расстояние каждой вершины $(n-1)$-симплекса от его центра равно $n-1$, число α_n удовлетворяет условию

$$(n-1)^2\alpha_n^2 + 1 = n^2,$$

т. е.

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{n^2-1}}{n-1} = \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}. \tag{5.54}$$

Применяя этот процесс n раз, мы находим, что координата a_n^n вершины A_n равна n, координаты a_n^i этой вершины при $i < n$ равны O, а координаты a_α^n вершины A_α при $\alpha < n$ равны -1; что координата a_{n-1}^{n-1} вершины A_{n-1}

равна

$$(n-1)\alpha_n = (n-1)\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} = \sqrt{(n-1)(n+1)},$$

координаты a_{n-1}^i этой вершины при $i < n-1$ равны 0, а координаты a_α^{n-1} вершин A_α при $\alpha < n-1$ равны $-\alpha_n = -\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$; что координата a_{n-2}^{n-2} вершины A_{n-2} равна

$$(n-2)\alpha_{n-1}\alpha_n = (n-2)\sqrt{\frac{n}{n-2}}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} = \\ = \sqrt{\frac{(n-2)n(n+1)}{n-1}},$$

координаты a_{n-2}^i этой вершины при $i < n-2$ равны 0, а координаты a_α^{n-2} вершин A_α при $\alpha < n-2$ равны

$$-\alpha_{n-1}\alpha_n = \sqrt{\frac{n(n+1)}{(n-2)(n-1)}};$$

..., координата a_k^k вершины A_k равна

$$k\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n = \\ = k\sqrt{\frac{k+2}{k}}\sqrt{\frac{k+3}{k+1}}\ldots\sqrt{\frac{n}{n-2}}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} = \sqrt{\frac{kn(n+1)}{k+1}},$$

координаты a_k^i этой вершины при $i < k$ равны 0, а координаты a_α^i вершин A_α при $\alpha < k$ равны

$$-\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n = \\ = -\sqrt{\frac{k+2}{k}}\sqrt{\frac{k+3}{k+1}}\ldots\sqrt{\frac{n}{n-2}}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} = \\ = -\sqrt{\frac{n(n+1)}{k(k+1)}},$$

..., координата a_1^1 вершины A_1 равна

$$\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n = \\ = \sqrt{\frac{3}{1}}\sqrt{\frac{4}{2}}\ldots\sqrt{\frac{n}{n-2}}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}},$$

а координата a_0^1 вершины A_0 соответственно равна

$$-\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}\alpha_n = -\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Таким образом, *координаты* a_α^i *вершины* A_α *нашего* n*-симплекса равны*

$$\left.\begin{aligned} a_\alpha^k &= -\sqrt{\frac{n(n+1)}{k(k+1)}} && \text{при } \alpha < k, \\ a_k^k &= \sqrt{\frac{kn(n+1)}{k+1}}, \quad a_\alpha^l = 0 && \text{при } \alpha > l. \end{aligned}\right\} \quad (5.55)$$

В частности, при $n = 3$ формулы (5.65) дают координаты вершин правильного тетраэдра $(-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, -1)$, $(\sqrt{6}, -\sqrt{2}, -1)$, $(0, 2\sqrt{2}, -1)$, $(0, 0, 3)$; при $n = 4$ эти формулы дают координаты вершин правильного 4-симплекса

$$\left(-\sqrt{10}, -\sqrt{\frac{10}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}, -1\right),$$

$$\left(\sqrt{10}, -\sqrt{\frac{10}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}, -1\right),$$

$$\left(0, 2\sqrt{\frac{10}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}, -1\right), \quad (0, 0, \sqrt{15}, -1), (0, 0, 0, 4).$$

Расстояние от центра построенного нами n-симплекса $A_1A_2\ldots A_n$ до его $(n-1)$-граней равно 1, а расстояние от того же центра до вершин этого n-симплекса равно n. Длина каждого из ребер этого n-симплекса равна $\sqrt{2n(n+1)}$.

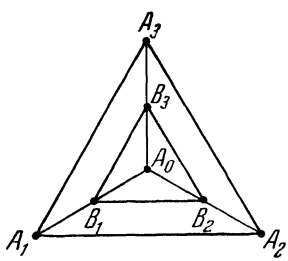

Рис. 5.20.

Из определения правильного n-симплекса видно, что все *m-грани правильного n-симплекса являются правильными m-симплексами*. С другой стороны, вершинный $(n-1)$-многогранник $B_1B_2\ldots B_n$ правильного n-симплекса при его вершине A_0 получается гомотетией с центром A_0 и коэффициентом $\frac{1}{2}$ из $(n-1)$-грани $A_1A_2\ldots A_n$ и, следовательно, также является правильным $(n-1)$-симплексом (на рис. 5.20 изображен вершинный треугольник

$B_1B_2B_3$ правильного тетраэдра $A_0A_1A_2A_3$). Поэтому *вершинные* $(n-1)$*-многогранники правильного* n*-симплекса являются правильными* $(n-1)$*-симплексами*. Из того, что равносторонний треугольник является правильным многоугольником $\{3\}$, а правильный тетраэдр — правильным 3-многогранником $\{3,3\}$, вытекает, что правильный 4-симплекс является правильным 4-многогранником $\{3, 3, 3\}$, правильный 5-симплекс является правильным 5-многогранником $\{3, 3, 3, 3\}$ и, вообще, *правильный* n*-симплекс является правильным* n*-многогранником* $\{3, 3, \ldots, 3, 3\}$.

5.5.7. Объем правильного n-симплекса. Прежде всего вычислим объем построенного нами правильного n-симплекса $A_0A_1\ldots A_n$. В силу формулы (5.36) объем V_n n-симплекса равен $\frac{1}{n}$ произведения объема основания этого n-симплекса на его высоту. Так как объем основания построенного нами n-симплекса равен произведению $V_{n-1}\alpha_n^{n-1}$, а высота этого n-симплекса равна $n+1$, мы получаем, что

$$V_n = \frac{n+1}{n}\,\alpha_n^{n-1}V_{n-1} = \frac{n+1}{n}\sqrt{\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n-1}}\,V_{n-1} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n-1)^{n-1}}}\,V_{n-1}$$

или, так как $V_1 = 2$,

$$V_n = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n-1)^{n-1}}}\cdot\frac{1}{n-1}\sqrt{\frac{n^n}{(n-2)^{n-2}}}\cdots\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4^4}{2^2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3^3}{1}}\cdot 2,$$

т. е., после сокращений,

$$V_n = \frac{\sqrt{(n+1)^{n+1}n^n}}{n!}. \tag{5.56}$$

В случае произвольного правильного n-симплекса, расстояния $(n-1)$-граней которого от его центра равны r, расположим этот n-симплекс гомотетично n-симплексу

$A_0A_1\ldots A_n$ и таким образом, чтобы его центр совпадал с началом O системы прямоугольных координат. Так как произвольный правильный n-симплекс получается из n-симплекса $A_0A_1\ldots A_n$ гомотетией с коэффициентом r, его объем получается из объема (5.56) умножением на r^n. Поэтому *объем правильного n-симплекса, $(n-1)$-грани которого находятся на расстоянии r от его центра, равен*

$$V_n = \frac{\sqrt{(n+1)^{n+1}n^n}}{n!}\, r^n. \tag{5.57}$$

При $n = 2$ и 3 формула (5.57) дает нам площадь равностороннего треугольника $V_2 = 3\sqrt{3}r^2$ и объем правильного тетраэдра $V_3 = 8\sqrt{3}r^3$.

5.5.8. Правильный n-параллелепипед или n-куб. Правильные n-параллелепипеды при $n = 2$ и $n = 3$ — квадрат и куб. Будем называть правильный n-параллелепипед *n-кубом*. Вершины n-куба с центром в начале системы прямоугольных координат и с $(n-1)$-гранями, расположенными на плоскостях $x^i = \pm 1$ имеют координаты $(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$, причем координаты $a^j_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ вершины $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ нашего куба равны

$$\left.\begin{aligned} a^j_{i_1 i_2 \ldots i_k} &= +1 \text{ при } j = i_1, i_2, \ldots, i_k, \\ a^j_{i_1 i_2 \ldots i_k} &= -1 \text{ при } j \neq i_1, i_2, \ldots, i_k. \end{aligned}\right\} \tag{5.58}$$

Расстояние от центра построенного n-куба $A_0A_1\ldots A_{12\ldots n}$ до его $(n-1)$-граней равно 1, а расстояние от того же центра до вершин этого n-куба равно $\sqrt{1+1+\ldots+1} = \sqrt{n}$. Длина каждого из ребер этого n-куба равна 2.

Из определения n-куба видно, что *все p-грани n-куба являются p-кубами*. С другой стороны, вершины $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n-куба, являющиеся концами ребер, выходящих из одной из его вершин A_0, являются вершинами правильного n-симплекса, поэтому вершинный $(n-1)$-многогранник $B_1B_2\ldots B_n$ n-куба при его вершине A_0, получающийся из $(n-1)$-симплекса $A_1A_2\ldots A_n$ гомотетией с центром A_0 и коэффициентом $\frac{1}{2}$, также является правильным

$(n-1)$-симплексом (на рис. 5.21 изображен вершинный треугольник $B_1B_2B_3$ куба $A_0A_1A_2A_3A_{12}A_{13}A_{23}A_{123}$). Поэтому *вершинные* $(n-1)$-*многогранники* n-*куба являются правильными* $(n-1)$-*симплексами*. Из того что, с одной стороны, квадрат является правильным многоугольником $\{4\}$ и 3-куб — правильным 3-многогранником $\{4,3\}$, а, с другой стороны, правильный $(n-1)$-симплекс является правильным $(n-1)$-многогранником $\{3,3,\ldots,3\}$, вытекает, что 4-куб является правильным 4-многогранником $\{4,3,3\}$, 5-куб является правильным 5-многогранником $\{4,3,3,3\}$ и, вообще, *n-куб является правильным n-многогранником* $\{4,3,3,\ldots,3,3\}$.

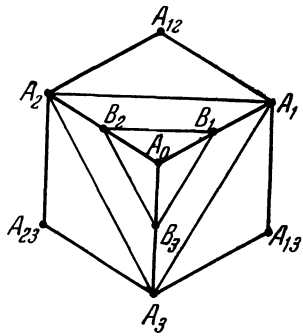

Рис. 5.21.

Так как все ребра n-куба, выходящие из одной из его вершин, перпендикулярны, n-куб является частным случаем прямоугольного n-параллелепипеда и поэтому в силу формулы (5.22) объем n-куба, ребра которого имеют длину r, равен r^n.

5.5.9. Взаимные правильные n-многогранники. Со всяким правильным n-многогранником можно связать n-многогранник, вершинами которого являются центры $(n-1)$-граней исходного n-многогранника. Из построения этого n-многогранника видно, что его $(n-1)$-грани гомотетичны $(n-1)$-многогранникам, полученным таким же образом из вершинных $(n-1)$-многогранников исходного n-многогранника, а строя вершинные $(n-1)$-многогранники этого n-многогранника, мы получим $(n-1)$-многогранники, полученные таким же образом из $(n-1)$-граней исходного n-многогранника. Поэтому *построенный нами n-многогранник является правильным n-многогранником, причем n-многогранник, построенный указанным способом для правильного n-многогранника $\{p_1, p_2,\ldots, p_{n-1}\}$, является правильным n-многогранником $\{p_{n-1}, p_{n-2},\ldots, p_1\}$*. Поэтому построенный нами правильный n-многогранник и n-многогранники, подобные ему,

называются *взаимными правильными n-многогранниками* с исходным n-многогранником. Из определения взаимных n-многогранников вытекает, что *n-многогранник, взаимный с взаимным n-многогранником, подобен исходному n-многограннику*, а также что *число вершин взаимного n-многогранника равно числу* $(n-1)$*-граней исходного n-многогранника, а число p-граней взаимного n-многогранника равно числу* $(n-p-1)$*-граней исходного n-многогранника.*

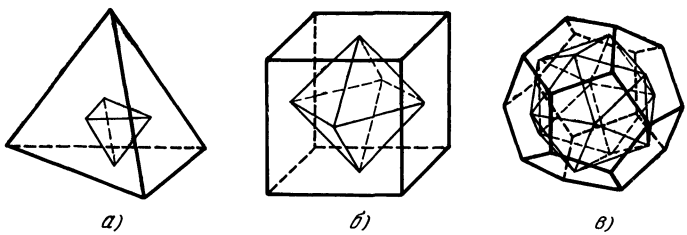

Рис. 5.22.

При $n = 2$ взаимным многоугольником для правильного многоугольника $\{p\}$ является подобный ему многоугольник.

При $n = 3$ взаимным 3-многогранником для правильного 3-многогранника $\{p, q\}$ является 3-многогранник $\{q, p\}$. Поэтому тетраэдр $\{3, 3\}$ взаимен с тетраэдром (рис. 5.22, *а*), куб $\{4,3\}$ — с октаэдром $\{3, 4\}$ (рис. 5.22, *б*), а додекаэдр $\{5, 3\}$ — с икосаэдром $\{3, 5\}$ (рис. 5.22, *в*).

В общем случае при произвольном n правильный n-симплекс $\{3, 3,\ldots,3, 3\}$ взаимен с подобным ему n-многогранником, а n-куб $\{4, 3, \ldots, 3, 3\}$ взаимен с n-многогранником $\{3, 3, \ldots, 3, 4\}$.

5.5.10. Многогранник, взаимный с n-кубом. Рассмотрим подробно правильный n-многогранник $\{3, 3, \ldots, 3,4\}$, взаимный с n-кубом.

Так как вершины квадрата и октаэдра, являющиеся серединами сторон квадрата и центрами граней куба, ограниченных, соответственно, прямыми и плоскостями $x^i = \pm 1$, расположены на осях системы прямоугольных координат, которые при $n = 2$ составляют «координатный крест», а при $n = 3$ — «трехмерный координатный

крест», будем называть правильный n-многогранник $\{3, 3, \ldots, 3, 4\}$ *n-крестом.*

Вершины n-креста $A_1A_2\ldots A_{2n}$, являющиеся центрами граней n-куба, ограниченного плоскостями $x^i = \pm 1$, также расположены на осях системы прямоугольных координат. Обозначим вершины этого n-креста, находящиеся на i-й координатной оси, через A_{2i-1} и A_{2i}, причем вершины A_{2i-1} n-креста имеют координаты $(0,\ldots, 0, 1, 0, \ldots,0)$, а вершины A_{2i} имеют координаты $(0,\ldots, 0, -1, 0,\ldots, 0)$. Тогда $(n-1)$-гранями n-креста являются $(n-1)$-симплексы $A_{i_1}A_{i_2}\ldots A_{i_n}$, где $i_k = 2k-1$ или $2k$, а вершинным $(n-1)$-многогранником n-креста при вершине A_{2i-1} или A_{2i} является $(n-1)$-крест, полученный из $(n-1)$-креста $A_1A_2\ldots A_{2i-2}A_{2i+1}\ldots A_{2n}$ гомотетией с центром, соответственно, A_{2i-1} и A_{2i} и с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Расстояние от центра этого n-креста до его $(n-1)$-граней равно расстоянию от центра n-креста до центра $(n-1)$-грани и, так как координаты центра $(n-1)$-грани равны $\left(\pm\frac{1}{n}, \pm\frac{1}{n}, \ldots, \pm\frac{1}{n}\right)$, это расстояние равно $\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}} = \sqrt{n\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Поэтому n-крест $A_1A_2\ldots A_{2n}$ с центром в начале системы прямоугольных координат и вершинами на осях этой системы, грани которого находятся на расстоянии 1 от его центра, может быть получен из рассмотренного нами n-креста гомотетией с центром в его центре и с коэффициентом $\sqrt{n}$. Поэтому *координаты a_α^k вершин A_α нашего n-креста равны*

$$a_{2i-1}^i = -a_{2i}^i = \sqrt{n}, \quad a_{2i-1}^k = a_{2i}^k = 0 \text{ при } i \neq k. \qquad (5.59)$$

Расстояние от центра построенного нами n-креста $A_1A_2\ldots A_{2n}$ до его $(n-1)$-граней равно 1, а расстояние от того же центра до вершин этого n-креста равно $\sqrt{n}$. Длина каждого из ребер этого n-креста равна $\sqrt{n+n} = \sqrt{2n}$.

Так как n-крест $A_1A_2\ldots A_{2n}$ делится координатными плоскостями на 2^n n-симплексов, ребра которых, выходя-

щие из центра n-креста взаимно перпендикулярны и равны $\sqrt{n}$, а объем такого n-симплекса равен $\frac{\sqrt{n^n}}{n!}$, то объем V_n n-креста $A_1A_2\ldots A_{2n}$ равен

$$V_n = \frac{2^n \sqrt{n^n}}{n!}. \tag{5.60}$$

В случае произвольного n-креста, расстояния $(n-1)$-граней которого от его центра равны r, расположим этот n-крест гомотетично n-кресту $A_1A_2\ldots A_{2n}$ и таким образом, чтобы его центр совпадал с началом O системы прямоугольных координат. Так как произвольный n-крест получается из n-креста $A_1A_2\ldots A_{2n}$ гомотетией с коэффициентом r, его объем получается из объема (5.60) умножением на r^n. Поэтому *объем n-креста, $(n-1)$-грани которого находятся на расстоянии r от его центра, равен*

$$V_n = \frac{2^n \sqrt{n^n}}{n!} r^n. \tag{5.61}$$

При $n = 2$ и 3 формула (5.61) дает нам площадь квадрата $V_2 = 4r^2$ и объем правильного октаэдра $V_3 = 4\sqrt{3}\, r^3$.

Так как числа p-граней n-куба и n-симплекса определяются формулами (5.19) и (5.35), а число p-граней n-креста равно числу $(n-p-1)$-граней n-куба, числа p-граней правильных n-многогранников соответственно равны

Таблица 5.3

p_1	p_k	p_{n-1}	N_0	N_p	N_{n-1}
3	3	3	$n+1$	$\binom{n+1}{p+1}$	$n+1$
3	3	4	$2n$	$2^{p+1}\binom{n}{p+1}$	2^n
4	3	3	2^n	$2^{n-p}\binom{n}{p}$	$2n$

5.5.11. Правильные 4-многогранники. Укажем способы построения 4-многогранников $\{3, 4, 3\}$, $\{3, 3, 5\}$ и $\{5, 3, 3\}$, не имеющих аналогов при $n > 4$.

Для построения правильного 4-многогранника $\{3, 4, 3\}$ рассмотрим 4-куб $A_0A_1\ldots A_{1234}$ и отразим его центр от каждой из его 3-граней. Полученные точки, являющиеся вершинами 4-креста, обозначим $B_1B_2,\ldots, B_8$. Если 3-грани исходного 4-куба находятся от его центра на расстоянии 1, то и его вершины $A_0, A_1,\ldots, A_{1234}$ и точки $B_1, B_2,\ldots, B_8$ находятся от его центра на расстоянии 2. Если мы будем отражать центр n-куба $A_0A_1\ldots A_{12\ldots n}$ от каждой из его $(n-1)$-граней, мы получим точки $B_1, B_2,\ldots, B_{2n}$, то расстояния этих точек от центра n-куба равны расстоянию от этого центра до вершин n-куба только при $n = 4$, так как если $(n-1)$-грани исходного n-куба находятся от его центра на расстоянии 1, вершины A_α n-куба находятся от центра на расстоянии $\sqrt{n}$, а точки B_β — на расстоянии 2, но $\sqrt{n} = 2$ только при $n = 4$. Поэтому n-многогранник с вершинами A_α и B_β при $n \neq 4$ заведомо не может быть правильным многогранником; при $n = 3$ 3-многогранник $A_0A_1\ldots A_{12}$, $B_1\ldots B_6$ ограничен 12 ромбами и называется *ромбододекаэдром* или *гранатоэдром* [12].

Рассмотрим 4-многогранник $A_0A_1\ldots A_{1234}B_1\ldots B_8$. Так как число вершин A_α этого многогранника равно 16, а число его вершин B_β равно 8, общее число вершин этого многогранника равно 24; 3-грани этого 4-многогранника имеют две вершины B_β, не симметричные относительно центра, и 4 вершины A_α, определяющие 2-грань 4-куба $A_0A_1\ldots A_{1234}$, находящуюся в одной 3-плоскости с этими двумя вершинами B_β, причем эти две точки B_β симметричны относительно этой 2-грани; так как и число вершин B_β, не симметричных относительно центра, и число 2-граней 4-куба равно 24, число 3-граней 4-многогранника равно 24; эти 3-грани являются правильными октаэдрами. Вершинным 3-многогранником нашего 4-многогранника при его вершине B_β является 3-куб, получаемый из той 3-грани 4-куба, отражением от которой получена данная точка B_β, гомотетией с центром B_β и коэффициентом $\frac{1}{2}$; вершинным 3-многогранником 4-многогранника при его вершине A_α является 3-куб, 4 вершины

которого являются серединами 4 ребер 4-куба, выходящих из его вершины A_α, а другие 4 вершины которого — середины отрезков $A_\alpha B_\beta$, где B_β — точки, получаемые из центра 4-куба отражением от тех 4 его 3-граней, вершиной которых является точка A_α. Поэтому построенный нами 4-многогранник является правильным многогранником и, так как его 3-грани — октаэдры $\{3, 4\}$, а вершинные 3-многогранники — кубы $\{4, 3\}$, этот многогранник является правильным многогранником $\{3, 4, 3\}$. Так как у этого многогранника $p_1 = p_3$, многогранник, взаимный с ним, является многогранником того же типа.

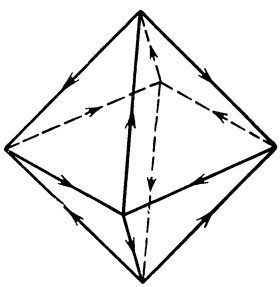

Рис. 5.23.

Ребрами 4-многогранника $\{3,4,3\}$ являются 32 ребра 4-куба и отрезки, соединяющие каждую из 8 вершин B_β с 8 вершинами того 3-куба, отражением от которого получена данная вершина B_β; поэтому общее число ребер 4-многогранника $\{3, 4, 3\}$ равно $32+8\cdot 8=96$. Так как 4-многогранник, взаимный с 4-многогранником $\{3, 4, 3\}$ — 4-многогранник того же типа — число 2-граней этого многогранника также равно 96.

Для построения правильного 4-многогранника $\{3, 3,5\}$ заметим, что ребра октаэдра можно согласованно ориентировать таким образом, что ребра, выходящие из каждой вершины, ориентированы поочередно к вершине и от вершины, а ребра, являющиеся сторонами одной грани ориентированы в круговом порядке (рис. 5.23). Аналогично можно согласованно ориентировать ребра 4-многогранника $\{3, 4, 3\}$ таким образом, что ребра, выходящие из каждой вершины, также ориентированы поочередно к вершине и от нее, а ребра одной 3-грани, являющейся октаэдром, ориентированы указанным выше способом. Если разделить каждое из 12 ориентированных ребер правильного октаэдра в отношении $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) : 1$ в направлении его ориентации, точки деления, как нетрудно проверить, представляют собой 12 вершин пра-

вильного икосаэдра. Деля в том же отношении каждые из 96 ориентированных ребер правильного 4-многогранника $\{3, 4, 3\}$, мы получим 96 вершин 4-многогранника, 3-гранями которого являются 24 конгруэнтных правильных икосаэдров, происходящих из 24 3-граней 4-многогранника $\{3, 4, 3\}$ и из 120 конгруэнтных правильных тетраэдров по пять при каждой из 24 вершин 4-многогранника $\{3, 4, 3\}$, причем из пяти тетраэдров при каждой из этих вершин один окружен четырьмя другими. Если, далее, на каждом из 24 икосаэдров мы построим 4-пирамиду, боковыми 3-гранями которой являются правильные тетраэдры, основаниями которых служат грани икосаэдра, мы заменим каждый икосаэдр 20 тетраэдрами и получим 4-многогранник, ограниченный $120+24\cdot 20=600$ конгруэнтными правильными тетраэдрами. Вершинными 3-многогранниками этого 4-многогранника являются икосаэдры, конгруэнтные икосаэдру, полученному из основания одной из 4-пирамид гомотетией с центром в вершине 4-пирамиды и коэффициентом $\frac{1}{2}$. Поэтому построенный нами 4-многогранник является правильным многогранником и, так как его 3-грани — тетраэдры $\{3, 3\}$, а вершинные 3-многогранники — икосаэдры $\{3, 5\}$, этот многогранник является правильным многогранником $\{3, 3, 5\}$. Вершинами 4-многогранника $\{3, 3, 5\}$ являются 96 вершин 4-многогранника, ограниченного 24 икосаэдрами и 120 тетраэдрами, и 24 вершины 4-пирамид, построенных на икосаэдрах, поэтому общее число вершин 4-многогранника $\{3, 3, 5\}$ равно $96+24=120$. Так как каждое ребро n-многогранника принадлежит стольким же его 2-граням, сколько ребер вершинного $(n-1)$-многогранника сходится к каждой его вершине, а к каждой вершине икосаэдра сходится 5 ребер, каждое ребро 4-многогранника $\{3, 3, 5\}$ принадлежит 5 его 3-граням. Поэтому, так как каждый из 600 тетраэдров, служащих 3-гранями нашего 4-многогранника, обладает 6 ребрами, число ребер 4-многогранника $\{3, 3, 5\}$ равно $\frac{1}{5}\cdot 600\cdot 6=720$. Так как каждая $(n-2)$-грань n-многогранника принадлежит двум его $(n-1)$-граням, каждая 2-грань нашего 4-многогранника принадлежит двум его 3-граням. Поэтому, так как

каждый из 600 тетраэдров, служащих его 3-гранями, обладает 4 гранями, число 2-граней 4-многогранника {3, 3, 5} равно $\frac{1}{2}\cdot 600\cdot 4=1200$.

4-многогранник {5, 3, 3}, взаимный с 4-многогранником {3, 3, 5}, в силу свойств взаимных многогранников обладает 120 3-гранями, 720 2-гранями, 1200 ребрами и 600 вершинами, 3-грани этого 4-многогранника являются додекаэдрами {5, 3}, а вершинные 3-многогранники — тетраэдрами {3, 3}.

Таким образом, число N_0 вершин, число N_1 ребер, число N_2 2-граней и число N_3 3-граней шести правильных 4-многогранников соответственно равны

Таблица 5.4

p	q	r	N_0	N_1	N_2	N_3
3	3	3	5	10	10	5
3	3	4	8	24	32	16
4	3	3	16	32	24	8
3	4	3	24	96	96	24
3	3	5	120	720	1200	600
5	3	3	600	1200	720	120

Заметим, что для 4-многогранников {3, 4, 3}, {3, 3, 5} и {5, 3, 3} формула Эйлера (5.45) выполнена, так как

$$1-24+96-96+24-1=0, \quad 1-120+720-1200+600-1=0.$$

5.5.12. Симметрии правильных многогранников. *Симметрией* правильного n-многогранника называется движение n-пространства, переводящее этот n-многогранник в себя [13]. Симметрии правильного n-многогранника образуют группу, являющуюся подгруппой группы движений n-пространства. Из определения взаимных многогранников следует, что *группы симметрий двух взаимных n-многогранников изоморфны.*

Так как всякое движение n-пространства определяется парой систем прямоугольных координат, а в случае симметрий n-многогранника эти системы координат можно выбирать таким образом, что за начало системы коор-

динат выбрана одна из вершин n-многогранника, 1-я ось направлена по одному из ребер, выходящему из этой вершины, 2-я ось направлена по одной из 2-граней, примыкающих к этому ребру, 3-я ось направлена по одной из 3-граней, примыкающих к этой 2-грани и т. д., всякая симметрия n-многогранника определяется парой вершин n-многогранника, парой ребер, выходящих из этих вершин, парой 2-граней, примыкающих к этим ребрам, парой 3-граней, примыкающих к этим 2-граням и т. д. Если мы зафиксируем одну из систем координат, мы находим, что каждой симметрии n-многогранника взаимно однозначно соответствует совокупность вложенных друг в друга n-граней n-многогранника от вершин до $(n-1)$-грани. Поэтому число s симметрий правильного n-многогранника равно произведению числа $N_0^{(n)}$ его вершин, числа его ребер, выходящих из одной вершины, равного числу $N_0^{(n-1)}$ вершинного $(n-1)$-многогранника n-многогранника, числа 2-граней n-многогранника, примыкающих к его ребру, равного числу $N_0^{(n-2)}$ вершинного $(n-2)$-многогранника вершинного $(n-1)$-многогранника и т. д., до числа $(n-1)$-граней, примыкающих к одной $(n-2)$-грани, равного 2, т. е.

$$s = N_0^{(n)} N_0^{(n-1)} \ldots N_0^{(2)} \cdot 2. \tag{5.62}$$

Число симметрий правильного n-симплекса равно $(n+1)!$, так как все вершинные p-многогранники являются p-симплексами, так что $N_0^{(p)} = p+1$ и для n-симплекса $s = (n+1)n(n-1)\ldots 2 = (n+1)!$. Так как любая подстановка вершин правильного n-симплекса является его симметрией, *группа симметрий правильного n-симплекса изоморфна группе всех подстановок n элементов.*

Число симметрий n-куба и n-креста равно $2^n n!$, так как для n-куба $N_0^{(n)} = 2^n$, а все вершинные p-многогранники n-куба являются p-симплексами, так что при $p > 0$ $N^{(p)} = p+1$ и для n-куба, а следовательно, и для взаимного с ним n-креста $s = 2^n\, n\, (n-1)\ldots 2 = 2^n\, n!$

Число симметрий правильных икосаэдра $\{3, 5\}$ *и додекаэдра* $\{5, 3\}$ *равно* 120, так как для додекаэдра $N_0^{(3)} = 20$, $N_0^{(2)} = 3$ и $s = 20 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

Число симметрий правильного 4-многогранника $\{3, 4, 3\}$ равно 1152, так как в этом случае $N_0^{(4)} = 24$, $N_0^{(3)} = 8$, $N_0^{(2)} = 3$ и $s = 24 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 2 = 1152$.

Число симметрий правильных 4-многогранников $\{3, 3, 5\}$ и $\{5, 3, 3\}$ равно 14400, так как для многогранника $\{3, 3, 5\}$ $N_0^{(4)} = 600$, $N_0^{(3)} = 4$, $N_0^{(2)} = 2$ и $s = 600 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 14400$.

Перечислим симметрии правильных 3-многогранников.

$4! = 24$ симметрий правильного тетраэдра состоят из:

6 отражений от плоскостей, делящих пополам двугранные углы,

8 поворотов на $\frac{2\pi}{3}$ в обе стороны вокруг высот,

6 поворотных отражений на $\frac{\pi}{4}$ в обе стороны вокруг прямых, соединяющих середины противоположных ребер, и 3 отражения от тех же прямых,

1 тождественного преобразования.

$2^3 \cdot 3! = 48$ симметрий куба состоят из:

6 отражений от плоскостей, делящих пополам двугранные углы,

3 отражения от плоскостей, равноотстоящих от противоположных граней,

6 отражений от прямых, соединяющих середины противоположных ребер,

6 поворотов на $\frac{\pi}{2}$ и 6 поворотных отражений на $\frac{\pi}{2}$ в обе стороны вокруг прямых, соединяющих центры произвольных граней и 3 отражения от тех же прямых,

8 поворотных отражений на $\frac{\pi}{3}$ и 8 поворотов на $\frac{2\pi}{3}$ в обе стороны, вокруг прямых, соединяющих противоположные вершины куба,

1 отражения от центра и 1 тождественного преобразования.

120 симметрий додекаэдра состоят из:

15 отражений от плоскостей, делящих пополам двугранные углы,

15 отражений от прямых, соединяющих середины противоположных ребер,

12 поворотных отражений на $\frac{\pi}{5}$, 12 поворотов на $\frac{2\pi}{5}$, 12 поворотных отражений на $\frac{3\pi}{5}$, 12 поворотов на $\frac{4\pi}{5}$ в обе стороны вокруг прямых, соединяющих центры противоположных граней,

20 поворотных отражений на $\frac{\pi}{3}$ и 20 поворотов на $\frac{2\pi}{3}$ в обе стороны вокруг прямых, соединяющих противоположные вершины,

1 отражения от центра и 1 тождественного преобразования.

5.5.13. Правильные (n — 1)-соты. Предельным случаем правильного n-многогранника являются *правильные* (n — 1)-*соты*, т. е. разбиение плоскости на конгруэнтные правильные (n — 1)-многогранники, обладающее правильными вершинными (n — 1)-многогранниками. Правильные (n — 1)-соты можно рассматривать как правильный n-многогранник с бесконечно большим числом (n — 1)-граней и с бесконечно удаленным центром. Поэтому плоскости $O_1O_2\ldots O_{n-1}O_n$, $O_0O_2\ldots O_{n-1}O_n$, $O_0O_1O_3\ldots O_{n-1}O_n, \ldots$ $\ldots, O_0O_1\ldots O_{n-2}O_n$ в этом случае перпендикулярны плоскости (n — 1)-сот и векторы $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1, \ldots$, $\mathbf{e}_{n-1}$ в этом случае компланарны. Будем обозначать правильные (n — 1)-соты тем же символом $\{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}$, что и правильные n-многогранники, причем угол между плоскостями $O_0O_1\ldots O_{i-1}O_{i+1}\ldots O_n$ и $O_0O_1\ldots O_{i-2}O_i\ldots O_n$ здесь также равен $\frac{\pi}{p_i}$. Поэтому определитель D_n в левой части (5.51) в этом случае равен 0. При $n = 3$ равенство $D_n = 0$ можно переписать в виде

$$\cos^2\frac{\pi}{p} + \cos^2\frac{\pi}{q} = 1,$$

что, как мы видели, удовлетворяется при 1) $p = q = 4$, 2) $p = 3$, $q = 6$, 3) $p = 6$, $q = 3$. Эти случаи соответствуют разбиениям плоскости на квадраты $\{4\}$, на равносторонние треугольники $\{3\}$ и на правильные шестиугольники $\{6\}$, т. е. имеется 3 вида 2-сот $\{4, 4\}$, $\{3, 6\}$ и $\{6, 3\}$.

Заметим, что 2-соты $\{4, 4\}$ взаимны с собой, а соты $\{3, 6\}$ и $\{6, 3\}$ взаимны друг с другом.

При $n = 4$ равенство $D_n = 0$ можно переписать в виде

$$\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{\pi}{r} = \cos\frac{\pi}{q},$$

что, как мы видели, удовлетворяется только при $p = r = 4$, $q = 3$. Этот случай соответствует разбиению 3-пространства на кубы $\{4, 3\}$, т. е. имеется только один вид 3-сот $\{4, 3, 4\}$; эти 3-соты взаимны с собой.

При $n = 5$ равенство $D_n = 0$ удовлетворяется в трех случаях, соответствующих 3 видам 4-сот $\{4, 3, 3, 4\}$, $\{3, 4, 3, 3\}$ и $\{3, 3, 4, 3\}$. В первом случае 4-плоскость разбивается на 4-кубы $\{4, 3, 3\}$, во втором случае — на 4-многогранники $\{3, 4, 3\}$, в третьем случае — на 4-кресты $\{3, 3, 4\}$; 4-соты $\{4, 3, 3, 4\}$ взаимны с собой, 4-соты $\{3, 4, 3, 3\}$ можно получить из разбиения 4-плоскости на 4-кубы, если оставить в нем только 4-кубы, имеющие общие вершины, но не имеющие общих ребер, 2-граней и 3-граней, а остальные 4-кубы разбить на 4-пирамиды с вершинами в центрах этих 4-кубов и с основаниями на 3-гранях этих 4-кубов и присоединить эти 4-пирамиды к прилегающим к ним 4-кубам (в 3-пространстве таким же образом как разбиение на кубы получается разбиение пространства на ромбододекаэдры); 4-соты $\{3, 3, 4, 3\}$ взаимны с 4-сотами $\{3, 4, 3, 3\}$.

При $n > 5$ равенство $D_n = 0$ удовлетворяется только в случае $(n - 1)$-сот $\{4, 3, \ldots, 3, 4\}$, при котором плоскость разбивается на $(n - 1)$-кубы; эти $(n - 1)$-соты взаимны с собой.