§ 2. Геометрия на сфере

6.2.1. Большие и малые окружности и m-сферы. Как мы видели, пересечение сферы и $(m+1)$-плоскости является m-сферой. При этом радиус R m-сферы связан с расстоянием d $(m+1)$-плоскости от центра сферы и радиусом r сферы соотношением

$$R^2 = r^2 - d^2, \tag{6.55}$$

что вытекает из теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника OM_0M, вершинами которого являются центр O сферы, центр M_0 m-сферы и произвольная точка M m-сферы (рис. 6.7).

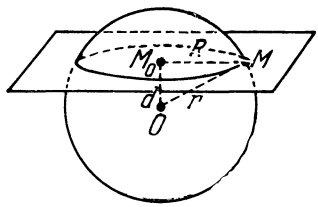

Рис. 6.7.

Поэтому радиус R равен r при $d = 0$, т. е. в случае, когда $(m+1)$-плоскость проходит через центр сферы и $R < r$ при $d > 0$, т. е. в случае, когда $(m+1)$-плоскость не проходит через центр сферы. Будем называть m-сферы (при $m=1$—окружности) на сфере *большими m-сферами* (или *окружностями*) в том случае, когда они высекаются из сферы $(m+1)$-плоскостями, проходящими через ее центр, и *малыми m-сферами* (или *окружностями*) в остальных случаях.

Через всякие две точки сферы можно провести большую окружность: эта окружность высекается из сферы 2-плоскостью, проходящей через две данные точки сферы и ее центр. В случае, если точки не являются диаметрально противоположными, эта большая окружность единственная, так как через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная 2-плоскость.

6.2.2. Сферические расстояния. Будем называть *сферическим расстоянием* между двумя точками сферы длину меньшей из двух дуг большой окружности, соединяющей эти точки. Если M_1 и M_2 — две точки сферы радиуса r с центром O и мы обозначим векторы $\overline{OM_1}$ и $\overline{OM_2}$

соответственно через $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, то в силу этого определения расстояние d между этими точками находится по формуле

$$\cos\frac{d}{r} = \frac{|\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2|}{r^2}, \tag{6.56}$$

так как $\frac{d}{r}$ — центральный угол сферы, стягиваемый дугой большой окружности длины d.

Если на сфере даны две дуги $\breve{M_0M_1}$ и $\breve{M_0M_2}$ больших окружностей с общим концом M_0, то за угол между этими дугами мы будем считать угол между касательными к этим дугам в точке M_0.

6.2.3. Сферическая теорема косинусов. Будем называть *сферическим треугольником* на сфере часть большой 2-сферы этой сферы, ограниченную тремя дугами больших окружностей[6]. Покажем, что для сферических треугольников имеет место *сферическая теорема косинусов: в сферическом треугольнике ABC со сторонами a, b, c, лежащими против углов A, B, C, имеет место соотношение*

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A. \tag{6.57}$$

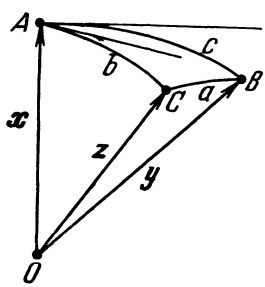

Рис. 6.8.

Не нарушая общности, мы можем предположить, что наш сферический треугольник расположен в 3-пространстве. Если мы обозначим векторы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ соответственно через $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ (рис. 6.8), то углы между векторами $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соответственно равны $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$ и $\frac{c}{r}$ и, следовательно,

$$\mathbf{yz} = r^2\cos\frac{a}{r}, \quad \mathbf{zx} = r^2\cos\frac{b}{r}, \quad \mathbf{xy} = r^2\cos\frac{c}{r}, \tag{6.58}$$

$$|[\mathbf{yz}]| = r^2\sin\frac{a}{r}, \quad |[\mathbf{zx}]| = r^2\sin\frac{b}{r}, \quad |[\mathbf{xy}]| = r^2\sin\frac{c}{r}. \tag{6.59}$$

Угол A равен углу между касательными к дугам $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{AC}$, который в свою очередь равен углу между перпендикулярами к этим касательным, т. е. углу между векторами $[\mathbf{xy}]$ и $[\mathbf{xz}]$. Поэтому

$$\cos A = \frac{[\mathbf{xy}]\,[\mathbf{xz}]}{|[\mathbf{xy}]|\,|[\mathbf{xz}]|}$$

или в силу формулы (2.82)

$$\cos A = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{x}^2 & \mathbf{xz} \\ \mathbf{yx} & \mathbf{yz} \end{vmatrix}}{|[\mathbf{xy}]|\,|[\mathbf{xz}]|}.$$

Полагая в этой формуле $\mathbf{x}^2 = r^2$ и используя формулы (6.58) и (6.59), мы получим

$$\cos A = \frac{\cos\frac{a}{r} - \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}},$$

откуда непосредственно вытекает формула (6.57).

В случае, когда угол A — прямой, формула (6.57) дает *сферическую теорему Пифагора*

$$\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r}. \tag{6.60}$$

6.2.4. Сферическая теорема синусов. Для сферических треугольников имеет место также *сферическая теорема синусов*: *в сферическом треугольнике ABC со сторонами a, b, c, лежащими против углов A, B, C, имеет место соотношение*

$$\frac{\sin A}{\sin\frac{a}{r}} = \frac{\sin B}{\sin\frac{b}{r}} = \frac{\sin C}{\sin\frac{c}{r}}. \tag{6.61}$$

В самом деле,

$$\sin A = \frac{|[[\mathbf{xy}]\,[\mathbf{xz}]]|}{|[\mathbf{xy}]|\,|[\mathbf{xz}]|}$$

или в силу формулы (2.85)

$$\sin A = \frac{|\mathbf{y}\{\mathbf{xxz}\} - \mathbf{x}\{\mathbf{xzy}\}|}{|[\mathbf{xy}]|\,|[\mathbf{xz}]|} = \frac{|\mathbf{x}|\,|\{\mathbf{xyz}\}|}{|[\mathbf{xy}]|\,|[\mathbf{xz}]|} = \frac{1}{r^3}\,\frac{|\{\mathbf{xyz}\}|}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}$$

и

$$\frac{\sin A}{\sin\frac{a}{r}} = \frac{1}{r^3}\,\frac{|\{\mathbf{xyz}\}|}{\sin\frac{a}{r}\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}.$$

Это выражение симметрично относительно векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ и сторон a, b, c, поэтому ему же равны и отношения $\dfrac{\sin B}{\sin\frac{b}{r}}$ и $\dfrac{\sin C}{\sin\frac{c}{r}}$, откуда вытекает формула (6.61).

6.2.5. Двойственная теорема косинусов. Для всякого сферического треугольника ABC можно построить *полярный треугольник* $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ на большой 2-сфере этого сферического треугольника — сферический треугольник, каждая вершина которого является полюсом для одной из сторон данного треугольника, рассматриваемой как экватор [7]. Так как точки $\bar{A}$, $\bar{B}$ и $\bar{C}$ являются, соответственно, полюсами больших окружностей BC, CA и AB, векторы $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{y}}$, $\bar{\mathbf{z}}$ перпендикулярны, соответственно, парам векторов $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и, следовательно,

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{[\mathbf{yz}]}{|[\mathbf{yz}]|}r, \quad \bar{\mathbf{y}} = \frac{[\mathbf{zx}]}{|[\mathbf{zx}]|}r, \quad \bar{\mathbf{z}} = \frac{[\mathbf{xy}]}{|[\mathbf{xy}]|}r. \qquad (6.62)$$

Если векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ составляют правую тройку, то, как показывают формулы (6.62), при перестановке местами двух из этих векторов у векторов $\bar{\mathbf{x}}$, $\bar{\mathbf{y}}$, $\bar{\mathbf{z}}$ происходит аналогичная перестановка и, кроме того, все они умножаются на -1, т. е. треугольник $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ заменяется диаметрально противоположным треугольником. Поэтому, не нарушая общности, мы можем считать, что $\{\mathbf{xyz}\} > 0$.

Если треугольник $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ — полярный треугольник для треугольника ABC, то треугольник ABC — полярный треугольник для треугольника $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, так как в силу формулы (2.85)

$$\bar{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{[\bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{z}}]}{|[\bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{z}}]|}r = \frac{[[\mathbf{zx}][\mathbf{xy}]]}{|[[\mathbf{zx}][\mathbf{xy}]]|}r =$$

$$= \frac{\mathbf{x}\cdot\{\mathbf{zxy}\} - \mathbf{z}\cdot\{\mathbf{xxy}\}}{|\mathbf{x}\cdot\{\mathbf{zxy}\} - \mathbf{z}\cdot\{\mathbf{xxy}\}|}r = \mathbf{x}\frac{\{\mathbf{xyz}\}}{|\{\mathbf{xyz}\}|} = \mathbf{x}$$

и точно так же $\bar{\bar{\mathbf{y}}} = \mathbf{y}$ и $\bar{\bar{\mathbf{z}}} = \mathbf{z}$.

Стороны $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ *полярного треугольника связаны с углами* A, B, C *данного треугольника соотношениями*

$$\bar{a} = (\pi - A)r, \quad \bar{b} = (\pi - B)r, \quad \bar{c} = (\pi - C)r. \qquad (6.63)$$

В самом деле,

$$\cos\frac{\bar{a}}{r} = \frac{\bar{\mathbf{y}}\bar{\mathbf{z}}}{|\bar{\mathbf{y}}|\,|\bar{\mathbf{z}}|} = \frac{[\mathbf{zx}]\,[\mathbf{xy}]}{|[\mathbf{zx}]|\,|[\mathbf{xy}]|} = -\frac{[\mathbf{xy}]\,[\mathbf{xz}]}{|[\mathbf{xy}]|\,|[\mathbf{xz}]|} =$$

$$= -\cos A = \cos(\pi - A)$$

и точно так же

$$\cos\frac{\bar{b}}{r} = \cos(\pi - B) \text{ и } \cos\frac{\bar{c}}{r} = \cos(\pi - C).$$

Так как треугольник ABC является полярным треугольником для треугольника $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$, аналогично получаем

$$\left.\begin{aligned} a &= (\pi - \bar{A})r, \\ b &= (\pi - \bar{B})r, \\ c &= (\pi - \bar{C})r. \end{aligned}\right\} \qquad (6.64)$$

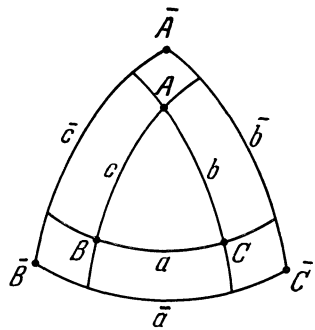

Рис. 6.9.

На рис. 6.9 изображены взаимно полярные сферические треугольники ABC и $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Составляя формулу (6.57) для полярного треугольника и выражая $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ через A, B, C по формулам (6.63) и $\bar{A}$ через a по первой формуле (6.64), мы получим *двойственную сферическую теорему косинусов: в сферическом треугольнике* ABC *со стороной* a *против угла* A *имеет место соотношение*

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos\frac{a}{r}. \qquad (6.65)$$

Эта теорема позволяет определить стороны сферического треугольника по его углам.

6.2.6. Площадь сферического треугольника. Для определения площади сферического треугольника ABC продолжим его стороны до полных больших окружностей, пересекающихся в вершинах диаметрально противоположного

сферического треугольника $A'B'C'$ (рис. 6.10). Площадь части сферы, ограниченной сторонами угла A, относится к площади всей сферы как угол A к углу π, т. е. эта площадь равна $\frac{A}{\pi}\cdot 4\pi r^2 = 4Ar^2$. Точно так же части сферы, ограниченные сторонами углов B и C, соответственно равны $4Br^2$ и $4Cr^2$. Эти три части сферы покрывают всю сферу, причем данный сферический треугольник ABC и конгруэнтный ему диаметрально противоположный треугольник $A'B'C'$ — по три раза, а часть сферы вне этих треугольников — по одному разу. Поэтому, если мы обозначим площадь треугольника ABC и равную ей площадь треугольника $A'B'C'$ через S, мы получим

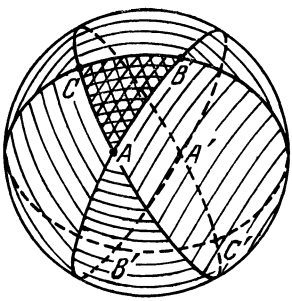

Рис. 6.10.

$$4S + 4\pi r^2 = 4Ar^2 + 4Br^2 + 4Cr^2,$$

т. е.

$$S = r^2 (A + B + C - \pi). \tag{6.66}$$

Выражение $A + B + C - \pi$ называется *угловым избытком* сферического треугольника. Формула (6.66) показывает, что *площадь сферического треугольника пропорциональна его угловому избытку* [8]. Так как $S > 0$ и $r^2 > 0$, из этой формулы следует, что *сумма углов сферического треугольника всегда больше* π.

6.2.7. Координаты на сфере. В качестве координаты на окружности обычно берут угол u^1 между радиус-вектором произвольной точки окружности с центром в начале и 1-й координатной осью. Тогда радиус-вектор $\mathbf{x}$ произвольной точки окружности имеет вид

$$\mathbf{x} = r (\mathbf{e}_1 \cos u^1 + \mathbf{e}_2 \sin u^1). \tag{6.67}$$

Формула (6.67) равносильна двум координатным соотношениям

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= r \cos u^1, \\ x^2 &= r \sin u^1. \end{aligned}\right\} \tag{6.68}$$

В качестве координат на 2-сфере обычно берут «широту» и «долготу», т. е. угол u^2 между радиус-вектором произвольной точки 2-сферы с центром в начале и 2-плоскостью первых двух координатных осей и угол u^1 между прямоугольной проекцией радиус-вектора точки на указанную 2-плоскость и 1-й координатной осью. Тогда радиус-вектор $\mathbf{x}_1$ точки 2-сферы, направленный по прямоугольной проекции радиус-вектора данной точки 2-сферы на указанную координатную 2-плоскость, имеет вид (6.67). Поэтому радиус-вектор самой данной точки 2-сферы имеет вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \cos u^2 + r\mathbf{e}_3 \sin u^2,$$

т. е.

$$\mathbf{x} = r\,(\mathbf{e}_1 \cos u^1 \cos u^2 + \mathbf{e}_2 \sin u^1 \cos u^2 + \mathbf{e}_3 \sin u^2). \quad (6.69)$$

Формула (6.69) равносильна трем координатным соотношениям

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= r\cos u^1 \cos u^2, \\ x^2 &= r\sin u^1 \cos u^2, \\ x^3 &= r\sin u^2. \end{aligned}\right\} \quad (6.70)$$

За координаты на сфере n-пространства возьмем угол u^{n-1} между радиус-вектором произвольной точки сферы с центром в начале и плоскостью первых $n-1$ координатных осей, угол u^{n-2} между прямоугольной проекцией радиус-вектора точки на указанную плоскость и плоскостью первых $n-2$ координатных осей,..., угол u^i между прямоугольной проекцией радиус-вектора точки на $(i+1)$-плоскость и плоскостью первых $i+1$ координатных осей, ..., угол u^1 между прямоугольной проекцией радиус-вектора точки на 2-плоскость первых двух координатных осей и 1-й координатной осью[9]. Тогда радиус-вектор $\mathbf{x}_1$ точки сферы, направленный по прямоугольной проекции радиус-вектора данной точки сферы на 2-плоскость первых двух координатных осей, имеет вид (6.67), радиус-вектор $\mathbf{x}_2$ точки сферы, направленный по прямоугольной проекции радиус-вектора данной точки сферы на 2-плоскость первых двух координатных осей, имеет вид (6.69), а радиус-вектор $\mathbf{x}_i$ точки сферы, направленный по прямоугольной проекции радиус-вектора данной точки сферы на $(i+1)$-плоскость первых $i+1$ координатных осей,

выражается через аналогичный вектор $\mathbf{x}_{i-1}$ по формуле

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}\cos u^i + r\mathbf{e}_{i+1}\sin u^i. \tag{6.71}$$

Поэтому связь между координатами u^i точек на сфере с координатами x^i тех же точек имеет вид

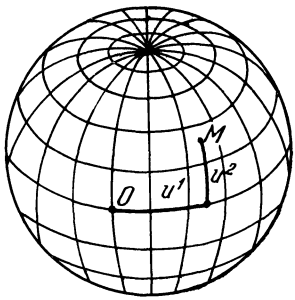

Рис. 6.11.

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= r\cos u^1\cos u^2\ldots\cos u^{n-1},\\ x^2 &= r\sin u^1\cos u^2\ldots\cos u^{n-1},\\ x^3 &= r\sin u^2\cos u^3\ldots\cos u^{n-1},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x^{n-1} &= r\sin u^{n-2}\cos u^{n-1},\\ x^n &= r\sin u^{n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{6.72}$$

Угол u^1, как видно из его определения, изменяется в пределах $0 \leqslant u^1 < 2\pi$, а углы u^i при $i > 1$ — в пределах $-\frac{\pi}{2} < u^i < \frac{\pi}{2}$.

Из формул (6.72) вытекает, что i-я координатная линия на сфере, проходящая через точку с координатами u_0^i, является окружностью

$$\mathbf{x} = (\mathbf{a}_i\cos u^i + r\mathbf{e}_{i+1}\sin u^i)\cos u_0^{i+1}\ldots\cos u_0^{n-1} + \mathbf{b}_i, \tag{6.73}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i = r\,(&\mathbf{e}_1\cos u_0^1\cos u_0^2\ldots\cos u_0^{i-1} + \mathbf{e}_2\sin u_0^1\cos u_0^2\ldots\cos u_0^{i-1} +\\ &+ \mathbf{e}_3\sin u_0^2\cos u_0^3\ldots\cos u_0^{i-1} + \ldots\\ &\ldots + \mathbf{e}_{i-1}\sin u_0^{i-2}\cos u_0^{i-1} + \mathbf{e}_i\sin u_0^{i-1}),\\ \mathbf{b}_i = r\,(&\mathbf{e}_{i+1}\cos u_0^{i+1}\cos u_0^{i+2}\ldots\cos u_0^{n-1} +\\ &+ \mathbf{e}_{i+2}\sin u_0^{i+1}\cos u_0^{i+2}\ldots\cos u_0^{n-1} +\\ &+ \mathbf{e}_{i+3}\sin u_0^{i+2}\cos u_0^{i+3}\ldots\cos u_0^{n-1} + \ldots\\ &\ldots + \mathbf{e}_{n-1}\sin u_0^{n-2}\cos u_0^{n-1} + \mathbf{e}_n\sin u_0^{n-1}). \end{aligned}$$

На рис. 6.11 изображены сферические координаты u^1, u^2 точки M на 2-сфере и координатные линии этой системы координат.

6.2.8. Сферические координаты в пространстве. Если в формулах (6.72) считать число r переменным, мы получим *сферические координаты* $u^1, \ldots, u^{n-1}, r$ в пространстве [10]: этими координатами для точки M является расстояние $r = OM$ точки M от начала O и координаты $u^1, \ldots, u^{n-1}$ точки M на сфере радиуса r с началом O. Координата r принимает любые неотрицательные значения, а координаты $u^1, \ldots, u^{n-1}$ принимают значения, указанные выше. При $n = 2$ сферические координаты называются *полярными*, в этом случае точка O называется *полюсом*, а угол u^1 — *полярным углом*. Первые $n-1$ координатных линий, проходящие через точку с координатами u_0^i, r_0, являются окружностями, выражающиеся формулами (6.73), где r заменено на r_0, а n-я координатная линия является лучом OM.

6.2.9. Элемент объема сферы. Дифференцируя формулы (6.73) по координатам u^i и отбрасывая значки 0 у координат, мы получим дифференциалы

$$d_i\mathbf{x} = (-\mathbf{a}_i \sin u^i + r\mathbf{e}_{i+1} \cos u^i) \cos u^{i+1} \ldots \cos u^{n-1} du^i.$$

Эти дифференциалы взаимно перпендикулярны, так как при $i < j$

$$d_i\mathbf{x}\, d_j\mathbf{x} = (\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j \sin u^i - r\mathbf{e}_{i+1}\mathbf{a}_j \cos u^i) \sin u^j \cos u^{i+1} \ldots$$
$$\ldots \cos u^j \cos^2 u^{j+1} \ldots \cos^2 u^{n-1} du^i du^j = 0.$$

Поэтому в качестве элемента объема сферы можно принять бесконечно малый прямоугольный $(n-1)$-параллелепипед, измерения которого равны

$$|d_i\mathbf{x}| = r \cos u^{i+1} \ldots \cos u^{n-1} du^i.$$

Перемножая эти измерения, мы находим, что объем этого $(n-1)$-параллелепипеда равен

$$dS = |d_1\mathbf{x}| \cdot |d_2\mathbf{x}| \ldots |d_{n-1}\mathbf{x}| =$$
$$= r^{n-1} \cos u^2 \cos^2 u^3 \ldots \cos^{n-2} u^{n-1} du^1 du^2 \ldots du^{n-1}. \quad (6.74)$$

Поэтому объем S всякой кубируемой области $\mathfrak{A}$ на сфере равен

$$S = r^{n-1} \iint_{\mathfrak{A}} \ldots \int \cos u^2 \cos^2 u^3 \ldots \cos^{n-2} u^{n-1} du^1 du^2 \ldots du^{n-1}. \quad (6.75)$$

6.2.10. Элемент объема в сферических координатах. Так как n-я координатная линия в сферических координатах перпендикулярна всем сферам $r = \text{const}$, за элемент объема пространства в сферических координатах можно принять бесконечно малый прямоугольный n-параллелепипед, измерения которого равны $|d_i\mathbf{x}|$ и dr. Объем этого n-параллелепипеда равен

$$dV = r^{n-1}\cos u^2 \cos^2 u^3 \ldots \cos^{n-2} u^{n-1} du^1 du^2 \ldots du^{n-1} dr,$$

и объем всякой кубируемой области $\mathfrak{A}$ пространства равен

$$V = \iint\limits_{\mathfrak{A}} \ldots \int r^{n-1} \cos u^2 \cos^2 u^3 \ldots \cos^{n-2} u^{n-1} du^1 du^2 \ldots du^{n-1} dr. \tag{6.76}$$

Отметим, что выражение под знаком интеграла (6.76) представляет собой *якобиан*

$$\frac{\partial(x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n)}{\partial(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1}, r)}.$$

6.2.11. Объем сферы. Объем сферы радиуса r, который мы будем обозначать S_n, выражается интегралом (6.75), в котором переменное u^1 изменяется от 0 до 2π, а переменные u^i (при $i > 1$) от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Поэтому этот интеграл равен произведению n интегралов

$$S_n = 2r^{n-1} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du^1 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u^2\, du^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u^3\, du^3 \ldots$$

$$\ldots \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-3} u^{n-2}\, du^{n-2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} u^{n-1}\, du^{n-1}.$$

Воспользовавшись известными формулами анализа

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} u\, du = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\pi, \qquad \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} u\, du = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot 2,$$

где $k!!$ — произведение всех натуральных чисел той же четности, что и k, не превосходящих k, мы найдем окончательно, что при четном n

$$S_n = 2r^{n-1}\pi^{\frac{n}{2}} \cdot 2^{\frac{n}{2}-1} \frac{1!!}{2!!} \cdot \frac{2!!}{3!!} \cdot \frac{3!!}{4!!} \cdots \frac{(n-3)!!}{(n-2)!!} = \frac{2^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-2)!!} r^{n-1},$$

а при нечетном n

$$S_n = 2r^{n-1}\pi^{\frac{n-1}{2}} 2^{\frac{n-1}{2}} \frac{1!!}{2!!} \cdot \frac{2!!}{3!!} \cdot \frac{3!!}{4!!} \cdots \frac{(n-3)!!}{(n-2)!!} =$$

$$= \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)!!} r^{n-1},$$

т. е. *объем S_n сферы радиуса r в n-пространстве* [11] *при четном и нечетном n соответственно равен*

$$S_n = \frac{2^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-2)!!} r^{n-1}, \qquad S_n = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{(n-2)!!} r^{n-1}. \qquad (6.77)$$

Формула (6.77) дает при $n = 2$ (считая $0!! = 1$), 3, 4 и 5 соответственно

$$S_2 = 2\pi r, \quad S_3 = 4\pi r^2, \quad S_4 = 2\pi^2 r^3, \quad S_5 = \frac{8}{3}\pi^2 r^4. \quad (6.78)$$

6.2.12. Объем шара. Объем шара радиуса r, который мы будем обозначать V_n, выражается интегралом (6.76), который с помощью интеграла (6.77) для вычисления объема сферы S_n может быть записан в виде

$$V_n = \int_0^r S_n\, dr = \frac{1}{n} S_n r.$$

Поэтому *объем V_n шара радиуса r в n-пространстве* [12] *при четном и нечетном n соответственно равен*

$$V_n = \frac{2^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{n!!} r^n, \qquad V_n = \frac{2^{\frac{n+1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n!!} r^n. \qquad (6.79)$$

Формула (6.79) дает при $n = 2$, 3, 4, 5 соответственно

$$V_2 = \pi r^2, \quad V_3 = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad V_4 = \frac{1}{2}\pi^2 r^4, \quad V_5 = \frac{8}{15}\pi^2 r^5. \quad (6.80)$$