

Квадрики

§ 1. Общая теория квадрик

7.1.1. Уравнения квадрики. Квадрикой или поверхностью второго порядка¹ называется поверхность, определяемая в аффинных координатах уравнением второй степени

$$a_{ij}x^i x^j + 2b_i x^i + c = 0. \quad (7.1)$$

Так как выражение $a_{ij}x^i x^j$ является квадратичной формой относительно координат x^i , коэффициенты a_{ij} образуют симметрический тензор второй валентности, т. е.

$$a_{ij} = a_{ji}. \quad (7.2)$$

Если, в соответствии с (2.48), мы выразим коэффициенты a_{ij} через симметрический оператор \mathbf{A} по формуле

$$a_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{A} \mathbf{e}_j, \quad (7.3)$$

а коэффициенты b_i представим в виде скалярных произведений

$$b_i = \mathbf{b} \mathbf{e}_i, \quad (7.4)$$

то мы можем переписать уравнение (7.1) в векторной форме в виде

$$\mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{x} + 2\mathbf{b} \mathbf{x} + c = 0. \quad (7.5)$$

Симметрический оператор \mathbf{A} удовлетворяет условию

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\tau, \quad (7.6)$$

равносильному условию

$$\mathbf{x} \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{y} \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (7.7)$$

Заметим, что при изменении начала, т. е. при переходе от вектора \mathbf{x} к вектору $\mathbf{x} + \mathbf{a}$, мы перепишем уравнение (7.5) в виде

$$(\mathbf{x} + \mathbf{a})\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) + 2\mathbf{b}(\mathbf{x} + \mathbf{a}) + c = 0, \quad (7.8)$$

т. е.

$$\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} + 2(\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{x} + \mathbf{a}\mathbf{A}\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\mathbf{a} + c = 0, \quad (7.9)$$

откуда видно, что оператор \mathbf{A} в уравнении (7.5) квадрики не зависит от выбора точки O и определяется только самой квадрикой. Поэтому будем называть оператор \mathbf{A} *оператором квадрики*.

7.1.2. Взаимное расположение квадрики и прямой. Рассмотрим взаимное расположение квадрики (7.5) и прямой

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{l}t. \quad (7.10)$$

Подставляя радиус-вектор (7.10) в уравнение (7.5), мы получим квадратное уравнение относительно t

$$(\mathbf{x}_0 + \mathbf{l}t)\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{l}t) + 2\mathbf{b}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{l}t) + c = 0, \quad (7.11)$$

которое можно переписать в виде

$$(\mathbf{l}\mathbf{A}\mathbf{l})t^2 + 2(\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b})\mathbf{l}t + \mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{b}\mathbf{x}_0 + c = 0. \quad (7.12)$$

В случае, когда

$$|\mathbf{l}\mathbf{A}\mathbf{l}| \neq 0, \quad (7.13)$$

уравнение (7.12) — квадратное уравнение относительно t и поэтому имеет два различных вещественных, два совпадающих вещественных или два комплексно сопряженных корня. В этих случаях квадрика и прямая имеют соответственно 2 общие точки, 1 общую точку и ни одной общей точки.

В первом случае говорят, что квадрика *пересекается* с прямой в двух точках. Во втором случае говорят, что прямая *касается* квадрики в этой точке или является *касательной* к ней в этой точке, касательная может быть получена предельным переходом из прямой, пересекающей квадрику в двух точках, при совпадении этих точек. В третьем случае квадрика и прямая не имеют общих точек; если ввести в рассмотрение мнимые точки пространства,

можно сказать, что квадрика и прямая имеют две общие **мнимые** точки.

7.1.3. Асимптотические направления. Прямые, для которых

$$|\mathbf{A}\mathbf{l}| = 0, \quad (7.14)$$

называются имеющими *асимптотическое направление* относительно квадрики². Если выполнено условие (7.14) и

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b})\mathbf{l} \neq 0, \quad (7.15)$$

уравнение (7.12) — линейное относительно t и имеет единственный корень. В этом случае квадрика и прямая пересекаются в одной точке, но прямая не является касательной к квадрике. К этому случаю относятся прямые $x^2 = c$ для параболы $(x^2)^2 = 2px^1$ и прямые $x^2 = \pm \frac{b}{a}x^1 + c$ ($c \neq 0$) для гиперболы $\frac{(x^1)^2}{a^2} - \frac{(x^2)^2}{b^2} = 1$.

Если выполнены условия (7.14) и условие

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b})\mathbf{l} = 0, \quad (7.16)$$

а

$$\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{b}\mathbf{x}_0 + \mathbf{c} \neq 0, \quad (7.17)$$

то уравнение (7.12) становится бессмысленным. В этом случае прямая не имеет с квадрикой ни вещественных, ни мнимых общих точек. К этому случаю относятся асимптоны гиперболы.

Если выполнены условия (7.14), (7.16) и

$$\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{b}\mathbf{x}_0 + \mathbf{c} = 0, \quad (7.18)$$

то все коэффициенты уравнения (7.12) равны нулю, и оно удовлетворяется при любых значениях t . В этом случае прямая целиком лежит на квадрике и называется ее *прямолинейной образующей*.

7.1.4. Центр симметрии. Если точка $M_0(x_0)$ — центр симметрии квадрики (7.5), т. е. при отражении от точки M_0 квадрика переходит в себя, для любой прямой (7.10), проходящей через точку M_0 , точки M_1 и M_2 пересечения этой прямой с квадрикой находятся на равном расстоянии

от точки M_0 по разные стороны от нее. Поэтому $t_2 = -t_1$, т. е. $t_1 + t_2 = 0$ при любых векторах \mathbf{l} . Так как сумма корней квадратного уравнения (7.12) только множителем отличается от коэффициента этого уравнения при t , равенство $t_1 + t_2 = 0$ равносильно равенству (7.16) при любом \mathbf{l} , т. е. равенству

$$\mathbf{Ax}_0 + \mathbf{b} = \mathbf{0}. \quad (7.19)$$

В том случае, когда оператор \mathbf{A} обладает обратным оператором \mathbf{A}^{-1} , применяя к обеим частям равенства (7.19) оператор \mathbf{A}^{-1} , мы находим, что радиус-вектор центра симметрии квадрики имеет вид

$$\mathbf{x}_0 = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \quad (7.20)$$

В том случае, когда квадрика обладает единственным центром симметрии, центр симметрии квадрики называется *центром квадрики*, а квадрика называется *центральной квадрикой*. В том случае, когда квадрика не обладает ни одним центром симметрии или многими центрами симметрии, квадрика называется *нецентральной квадрикой*. Для того чтобы уравнение (7.19) имело единственное решение необходимо и достаточно, чтобы оператор \mathbf{A} обладал обратным оператором \mathbf{A}^{-1} , т. е. определитель матрицы этого оператора отличен от нуля,

$$\text{Det}(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (7.21)$$

7.1.5. Диаметральные плоскости и сопряженные направления. Если $M_0(\mathbf{x}_0)$ — середина хорды квадрики с направляющим вектором \mathbf{l} , то концы M_1 и M_2 этой хорды находятся на равном расстоянии от точки M_0 по разные стороны от нее. Поэтому $t_2 = -t_1$, т. е. $t_1 + t_2 = 0$. Поэтому здесь имеет место равенство (7.16) при заданном векторе \mathbf{l} . Этому условию удовлетворяют радиус-векторы середин всех хорд той же квадрики с тем же направляющим вектором. Поэтому геометрическое место середин параллельных хорд с направляющим вектором \mathbf{l} принадлежит

плоскости

$$(Ax + b)l = 0, \quad (7.22)$$

уравнение которой в силу симметричности оператора A можно переписать в виде

$$(Al)x + bl = 0. \quad (7.23)$$

Плоскости (7.23) называются *диаметральными плоскостями* квадрики. В том случае, когда квадрика — центральная, все ее диаметральные плоскости обязательно проходят через ее центр. Диаметральная плоскость, содержащая геометрическое место середин хорд с направляющим вектором l , называется *сопряженной* с этими хордами.

Будем называть m -плоскости, являющиеся пересечением $n - m$ диаметральных плоскостей, *диаметральными m -плоскостями*, при $m = 1$ — *диаметрами*³.

Тот факт, что нормальным вектором плоскости (7.23) является вектор Al , указывает геометрический смысл оператора A квадрики: *оператор A переводит направляющий вектор l хорд в нормальный вектор сопряженной с ними диаметральной плоскости*.

Если диаметральная плоскость сопряжена с хордами с направляющим вектором l , ее называют *сопряженной* и с диаметром с тем же направляющим вектором.

Из симметричности оператора A вытекает, что *если один из двух диаметров лежит в диаметральной плоскости, сопряженной с другим диаметром, этот последний диаметр лежит в диаметральной плоскости, сопряженной с первым диаметром*. Пусть точка $M_0(x_0)$ принадлежит двум диаметрам с направляющими векторами l_1 и l_2 . Условие, что первый из этих диаметров лежит в диаметральной плоскости, сопряженной со вторым диаметром, имеет вид

$$l_1 Al_2 = 0, \quad (7.24)$$

что равносильно условию

$$l_2 Al_1 = 0,$$

т. е. второй из этих диаметров лежит в диаметральной плоскости, сопряженной с первым диаметром.

Будем называть n направлений *взаимно сопряженными*, если диаметральная плоскость, параллельная любым

$n - 1$ из этих направлений, сопряжена с хордами, параллельными n -му направлению. Из формулы (7.24) следует, что условие взаимной сопряженности n направлений, определяемых векторами \mathbf{l}_i , имеет вид

$$\mathbf{l}_i \mathbf{A} \mathbf{l}_j = 0 \quad (i \neq j). \quad (7.25)$$

7.1.6. Плоскости симметрии и главные направления. Плоскость симметрии квадрики представляет собой диаметральную плоскость, перпендикулярную сопряженным с ней хордам. Поэтому, если \mathbf{l} — направляющий вектор хорд, сопряженных с плоскостью симметрии, нормальный вектор плоскости симметрии должен быть коллинеарным с вектором \mathbf{l} , т. е.

$$\mathbf{A} \mathbf{l} = \lambda \mathbf{l}, \quad (7.26)$$

и, следовательно, нормальный вектор плоскости симметрии квадрики является собственным вектором ее оператора \mathbf{A} .

Будем называть направления, перпендикулярные плоскостям симметрии квадрики, *главными направлениями квадрики*.

7.1.7. Касательная плоскость. Если точка M_0 лежит на квадрике, то выполняется условие (7.18) и уравнение (7.12) принимает вид

$$(\mathbf{l} \mathbf{A} \mathbf{l}) t^2 + 2 (\mathbf{A} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}) \mathbf{l} t = 0.$$

Один корень этого уравнения равен нулю. Если прямая (7.10) — касательная к квадрике, то второй корень этого уравнения также равен нулю, т. е. равна нулю сумма $t_1 + t_2$ и выполняется условие (7.16). Так как в силу условия (7.10) вектор \mathbf{l} коллинеарен с вектором $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, то условие (7.16) можно переписать в виде

$$(\mathbf{A} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0.$$

Складывая почленно это уравнение с тождеством (7.18), мы получаем уравнение

$$(\mathbf{A} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{x}_0 \mathbf{A} \mathbf{x}_0 + 2 \mathbf{b} \mathbf{x}_0 + c = 0, \quad (7.27)$$

которое можно переписать в виде

$$\mathbf{x}_0 \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \mathbf{A} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b} \mathbf{x} - \mathbf{b} \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_0 \mathbf{A} \mathbf{x}_0 + 2 \mathbf{b} \mathbf{x}_0 + c = 0, \quad (7.28)$$

т. е., после упрощений,

$$\mathbf{x}_0 \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} (\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) + c = 0. \quad (7.29)$$

Так как уравнение (7.29) является уравнением плоскости, то мы находим, что геометрическое место точек всех прямых, касающихся квадрики (7.5) в точке M_0 , лежит в плоскости, вполне определяемой этим геометрическим местом. Будем называть эту плоскость *касательной плоскостью*, а точку M_0 — *точкой касания* этой плоскости.

7.1.8. Полярная плоскость и полюс. Будем называть четыре точки прямой (7.10), для которых значения параметров t_1, t_2, t_3, t_4 связаны соотношением

$$\frac{t_3 - t_1}{t_1 - t_4} : \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_4} = -1, \quad (7.30)$$

гармонической четверкой точек, а четвертую из этих точек будем называть *четвертой гармонической точкой* для первых трех точек⁴. Найдем геометрическое место точек пространства, являющихся четвертыми гармоническими для некоторой точки M_0 и для точек M_1 и M_2 пересечения прямых, выходящих из точки M_0 с квадрикой (7.5). Так как значение t для точки M_0 равно 0, то, опуская индекс у значения t для четвертой гармонической точки, мы можем переписать равенство (7.30) в виде

$$\frac{t - t_1}{t_1} : \frac{t - t_2}{t_2} = -1,$$

что равносильно равенству

$$\frac{t - t_1}{t_1} + \frac{t - t_2}{t_2} = 0,$$

откуда находим, что

$$t = \frac{2t_1 t_2}{t_1 + t_2}. \quad (7.31)$$

Так как t_1 и t_2 — корни квадратного уравнения (7.12), а произведение и сумма этих корней связаны с коэффициентами этого уравнения соотношениями

$$t_1 + t_2 = -\frac{2(\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}) \mathbf{l}}{|\mathbf{A}|}, \quad t_1 t_2 = \frac{\mathbf{x}_0 \mathbf{A} \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{b} \mathbf{x}_0 + c}{|\mathbf{A}|},$$

то мы находим, что

$$t = -\frac{\mathbf{x}_0 \mathbf{A} \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{b} \mathbf{x}_0 + c}{(\mathbf{A} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}) \mathbf{l}}$$

и радиус-вектор четвертой гармонической точки равен

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{l} t = \mathbf{x}_0 - \frac{\mathbf{x}_0 \mathbf{A} \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{b} \mathbf{x}_0 + c}{(\mathbf{A} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}) \mathbf{l}} \cdot \mathbf{l}.$$

Поэтому вектор \mathbf{x} удовлетворяет условию

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{A} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}) \mathbf{l} + (\mathbf{x}_0 \mathbf{A} \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{b} \mathbf{x}_0 + c) \cdot \mathbf{l} = \mathbf{o}. \quad (7.32)$$

Так как в силу уравнения (7.10) вектор \mathbf{l} коллинеарен с вектором $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, условие (7.32) можно переписать в виде

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{A} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) +$$

$$+ (\mathbf{x}_0 \mathbf{A} \mathbf{x}_0 + 2\mathbf{b} \mathbf{x}_0 + c) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{o}. \quad (7.33)$$

Так как вектор $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{l} t$ имеет направление произвольной прямой, проходящей через точку M_0 и пересекающейся с квадрикой, то равенство (7.33) равносильно равенству нулю коэффициента при векторе $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ в левой

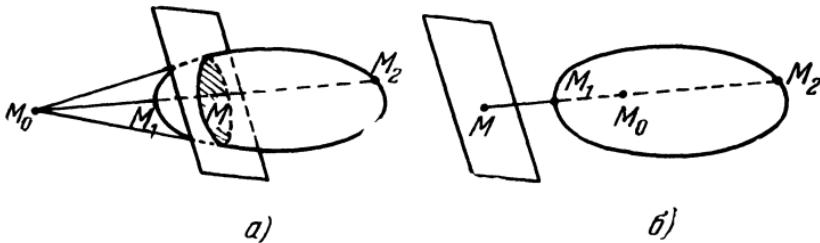


Рис. 7.1.

части равенства (7.33), т. е. равенству (7.27), которое, как мы видели, можно переписать в виде (7.28) или, после упрощений, в виде (7.29). Так как уравнение (7.29) является уравнением плоскости, мы находим, что искомое геометрическое место лежит в плоскости, которая вполне определяется этим геометрическим местом. Будем называть эту плоскость *полярной плоскостью* точки M_0 , а точку M_0 будем называть *полюсом* этой плоскости⁵. На рис. 7.1, а изображен случай, когда точки M заполняют часть полярной плоскости, на рис. 7.1, б — случай, когда точки M заполняют всю полярную плоскость.

Тот факт, что уравнение полярной плоскости имеет тот же вид (7.29), что и уравнение касательной плоскости, показывает, что при стремлении точки M_0 к точке \tilde{M}_0 квадрики, полярная плоскость точки M_0 стремится к касательной плоскости, касающейся квадрики в точке \tilde{M}_0 .

Так как уравнение (7.29) симметрично относительно точек M_0 и M , то это означает, что если точка M лежит на полярной плоскости M_0 , то полярная плоскость точки M проходит через точку M_0 .

Если из точки M_0 можно провести касательную к квадрике, точка касания этой касательной лежит на полярной плоскости точки M_0 , так как касательная может быть получена предельным переходом из секущей, пересекающей квадрику в точках M_1 и M_2 , а при совпадении точек M_1 и M_2 , т. е. при $t_1 = t_2$, как видно из формулы (7.31), t становится равным t_1 и точка M совпадает с точками M_1 и M_2 , т. е. точка касания, являющаяся результатом слияния точек M_1 и M_2 , совпадает с точкой M полярной плоскости.

Поэтому для построения полярной плоскости точки, из которой можно провести касательные к квадрике, достаточно провести из этой точки n касательных, не лежащих в одной плоскости, и провести плоскость через полученные n точек касания, а для построения полюса плоскости, пересекающейся с квадрикой, достаточно выбрать n точек пересечения этой плоскости с квадрикой, не лежащих в одной $(n - 2)$ -плоскости, и искомый полюс является точкой пересечения касательных плоскостей, касающихся квадрик в этих точках. Для построения полярной плоскости точки, из которой нельзя провести касательной к квадрике, достаточно построить не лежащие в одной $(n - 2)$ -плоскости полюсы n плоскостей, проходящих через эту точку и пересекающихся с квадрикой, и искомая плоскость определяется этими n полюсами.

Если мы запишем уравнение (7.29) полярной плоскости точки $M_0(x_0)$ в виде

$$\mathbf{u}x + v = 0, \quad (7.34)$$

то вектор \mathbf{u} и число v соответственно равны

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}, \quad v = \mathbf{b}\mathbf{x}_0 + c. \quad (7.35)$$

Формулы (7.35) можно переписать в координатах

$$u_i = a_{ij}x_0^j + b_i, \quad v = b_i x_0^i + c. \quad (7.36)$$

Если нам дана плоскость (7.34), то координаты x_0^i ее полюса M_0 являются решениями системы уравнений (7.36). Эту систему уравнений можно переписать в виде векторного уравнения в $(n+1)$ -пространстве

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ v \end{pmatrix}, \quad (7.37)$$

решение которого имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & c \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ v \end{pmatrix}. \quad (7.38)$$

Поэтому всякая плоскость (7.34) обладает единственным полюсом относительно квадрики (7.5) тогда и только тогда, когда матрица $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & c \end{pmatrix}$ обладает обратной матрицей, т. е. определитель

$$\Delta = \text{Det} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & c \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & c \end{vmatrix} \quad (7.39)$$

отличен от нуля. Будем называть квадрику, относительно которой всякая плоскость обладает единственным полюсом, *невырожденной квадрикой*, а квадрику, относительно которой плоскости не обладают единственными полюсами — *вырожденной квадрикой*. Как мы видели, *необходимым и достаточным условием невырожденности квадрики является неравенство $\Delta \neq 0$* .

7.1.9. Взаимное расположение квадрики и m -плоскости. Рассмотрим взаимное расположение квадрики (7.5) и m -плоскости

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{l}_a t^a. \quad (7.40)$$

Подставляя радиус-вектор (7.40) в уравнение (7.5), мы получим уравнение второй степени относительно t^a

$$(x_0 + l_a t^a)A(x_0 + l_b t^b) + 2b(x_0 + l_a t^a) + c = 0, \quad (7.41)$$

которое можно переписать в виде

$$(l_a A l_b)t^a t^b + 2(Ax_0 + b)l_a t^a + x_0 A x_0 + 2b x_0 + c = 0. \quad (7.42)$$

В случае, когда не все произведения $l_a A l_b$ равны нулю, уравнение (7.42) — уравнение второй степени относительно t^a , являющееся уравнением квадрики в m -плоскости (7.40), т. е. в этом случае *квадрика пересекается с m-плоскостью по (m - 1)-квадрике*. Эта $(m - 1)$ -квадрика может быть невырожденной и вырожденной; возможен также случай, когда уравнению (7.42) не удовлетворяет ни одна вещественная точка, но удовлетворяют мнимые точки; в этом случае говорят, что квадрики пересекаются с m -плоскостью по мнимой $(m - 1)$ -квадрике.

В случае, когда все

$$l_a A l_b = 0 \quad (7.43)$$

для всех a и b , возможны также три случая: если выполнено условие (7.43), но не все произведения $(Ax_0 + b)l_a$ равны нулю, уравнение (7.42) является уравнением $(m - 1)$ -плоскости. Если выполнены условия (7.43), а также

$$(Ax_0 + b)l_a = 0 \quad (7.44)$$

для всех a и имеет место (7.17), то уравнение (7.42) становится бессмысленным и m -плоскость не имеет с квадрикой ни вещественных, ни мнимых общих точек. Если выполнены условия (7.43), (7.44) и (7.18), то все коэффициенты уравнения (7.42) равны нулю и оно удовлетворяется при любых значениях t^a . В этом случае m -плоскость целиком лежит на квадрике и называется ее *m-плоской образующей*.

§ 2. Классификация квадрик

7.2.1. Собственные векторы симметрического оператора. Прежде всего рассмотрим свойства собственных векторов симметрического оператора A , входящего в уравнение квадрики.