Подставляя радиус-вектор (7.40) в уравнение (7.5), мы получим уравнение второй степени относительно t^a

$$(\mathbf{x}_0 + \mathbf{l}_a t^a)\mathbf{A}\,(\mathbf{x}_0 + \mathbf{l}_b t^b) + 2\mathbf{b}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{l}_a t^a) + c = 0, \qquad (7.41)$$

которое можно переписать в виде

$$(\mathbf{l}_a\mathbf{A}\mathbf{l}_b)t^a t^b + 2(\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b})\mathbf{l}_a t^a + \mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + 2\mathbf{b}\mathbf{x}_0 + c = 0. \qquad (7.42)$$

В случае, когда не все произведения $\mathbf{l}_a\mathbf{A}\mathbf{l}_b$ равны нулю, уравнение (7.42) — уравнение второй степени относительно t^a, являющееся уравнением квадрики в m-плоскости (7.40), т. е. в этом случае *квадрика пересекается с m-плоскостью по $(m-1)$-квадрике*. Эта $(m-1)$-квадрика может быть невырожденной и вырожденной; возможен также случай, когда уравнению (7.42) не удовлетворяет ни одна вещественная точка, но удовлетворяют мнимые точки; в этом случае говорят, что квадрики пересекаются с m-плоскостью по мнимой $(m-1)$-квадрике.

В случае, когда все

$$\mathbf{l}_a\mathbf{A}\mathbf{l}_b = 0 \qquad (7.43)$$

для всех a и b, возможны также три случая: если выполнено условие (7.43), но не все произведения $(\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b})\mathbf{l}_a$ равны нулю, уравнение (7.42) является уравнением $(m-1)$-плоскости. Если выполнены условия (7.43), а также

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b})\mathbf{l}_a = 0 \qquad (7.44)$$

для всех a и имеет место (7.17), то уравнение (7.42) становится бессмысленным и m-плоскость не имеет с квадрикой ни вещественных, ни мнимых общих точек. Если выполнены условия (7.43), (7.44) и (7.18), то все коэффициенты уравнения (7.42) равны нулю и оно удовлетворяется при любых значениях t^a. В этом случае m-плоскость целиком лежит на квадрике и называется ее *m-плоской образующей*.

§ 2. Классификация квадрик

7.2.1. Собственные векторы симметрического оператора. Прежде всего рассмотрим свойства собственных векторов симметрического оператора $\mathbf{A}$, входящего в уравнение квадрики.

Покажем, что *если* $\mathbf{l}_1$ — *собственный вектор симметрического оператора* $\mathbf{A}$, *то всякий вектор* $\mathbf{l}_2$, *перпендикулярный вектору* $\mathbf{l}_1$, *переводится оператором* $\mathbf{A}$ *в вектор, снова перпендикулярный вектору* $\mathbf{l}_1$. В самом деле, если $\mathbf{A}\mathbf{l}_1 = \lambda_1\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_1\mathbf{l}_2 = 0$ то

$$\lambda\mathbf{l}_1\mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_2\mathbf{A}\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_1\mathbf{A}\mathbf{l}_2 = 0$$

и вектор $\mathbf{A}\mathbf{l}_2$ также перпендикулярен вектору $\mathbf{l}_1$.

Поэтому если вектор $\mathbf{l}_1$ n-пространства — собственный вектор симметрического оператора $\mathbf{A}$, то оператор $\mathbf{A}$ переводит в себя $(n-1)$-пространство, состоящее из векторов, перпендикулярных вектору $\mathbf{l}_1$.

Покажем, что *все собственные числа симметрического оператора вещественны*. Прежде всего покажем это для $n = 2$. В этом случае в прямоугольных координатах формулу (7.26) можно переписать в виде

$$a_{11}l^1 + a_{12}l^2 = \lambda l^1, \qquad a_{12}l^1 + a_{22}l^2 = \lambda l^2.$$

Поэтому собственные числа λ_1 и λ_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

и равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22} \pm \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}{2} = \\ = \frac{a_{11}+a_{22} \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}.$$

Так как под знаком радикала стоит неотрицательное число, то оба собственных числа λ_1 и λ_2 вещественны. Эти числа совпадают только в случае, когда $a_{11} = a_{22}$ и $a_{12} = 0$.

Предположим теперь, что $n > 2$ и оператор $\mathbf{A}$ обладает парой мнимо сопряженных собственных чисел λ_{n-1} и λ_n. Этим собственным числам соответствуют два мнимо сопряженных собственных вектора $\mathbf{l}_{n-1}$ и $\mathbf{l}_n$, определяющие вещественную 2-плоскость. Оператор $\mathbf{A}$ переводит эту 2-плоскость в себя, но в силу доказанного в этой 2-плоскости он обладает двумя вещественными собственными числа-

ми. Полученное противоречие показывает, что оператор **A** не может обладать мнимыми собственными числами.

Находя собственный вектор $\mathbf{l}_1$ оператора **A**, затем собственный вектор $\mathbf{l}_2$ этого оператора в $(n-1)$-плоскости, перпендикулярной к вектору $\mathbf{l}_1$, собственный вектор $\mathbf{l}_3$ этого оператора в $(n-2)$-плоскости, перпендикулярной векторам $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$, и т. д., мы построим n взаимно перпендикулярных собственных векторов $\mathbf{l}_i$ оператора **A**. Таким образом, *симметрический оператор* **A** *всегда обладает* n *взаимно перпендикулярными собственными векторами*. Эти векторы определены только с точностью до множителей, если все собственные числа λ_i этого оператора различны; если же $\lambda_i = \lambda_j$, то перпендикулярные векторы $\mathbf{l}_i$ и $\mathbf{l}_j$ можно заменить любыми их линейными комбинациями $\alpha\mathbf{l}_i + \beta\mathbf{l}_j$ и $\gamma\mathbf{l}_i + \delta\mathbf{l}_j$, перпендикулярными между собой.

Если $\mathbf{e}_i$ — взаимно перпендикулярные единичные собственные векторы симметрического оператора **A**, этот оператор можно записать в виде

$$\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n\cdot\mathbf{e}_n. \qquad (7.45)$$

7.2.2. Приведение к центру. В случае, когда начало координат выбрано в центре квадрики, будем называть уравнение этой квадрики *приведенным к центру*. В этом случае в формуле (7.20) $\mathbf{x}_0 = \mathbf{o}$, откуда вытекает, что в этом случае $\mathbf{b} = \mathbf{o}$. Обратно, если в уравнении квадрики $\mathbf{b} = \mathbf{o}$, то в силу (7.20) $\mathbf{x}_0 = \mathbf{o}$ и центр квадрики совпадает с началом координат. Поэтому *необходимым и достаточным условием того, что уравнение центральной квадрики приведено к центру, является равенство нулю коэффициентов* b_i *уравнения при первых степенях координат*.

7.2.3. Приведение к главным направлениям. В случае, когда оси прямоугольных координат направлены по главным направлениям квадрики, будем называть уравнение этой квадрики *приведенным к главным направлениям*. В этом случае оператор **A** принимает вид (7.45) и уравнение квадрики можно записать в виде

$$\mathbf{x}(\lambda_1\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_n\,\mathbf{e}_n\cdot\mathbf{e}_n)\mathbf{x} + 2\mathbf{b}\mathbf{x} + c = 0,$$

т. е., если обозначить $\lambda_i = a_{ii}$, в виде

$$a_{11}(x^1)^2 + \ldots + a_{nn}(x^n)^2 + 2b_ix^i + c = 0. \qquad (7.46)$$

Поэтому в этом случае все коэффициенты a_{ij} уравнения при $i \neq j$ равны нулю. Обратно, если все коэффициенты a_{ij} при $i \neq j$ равны нулю, в силу (7.3) мы получаем, что

$$\mathbf{e}_i \mathbf{A} \mathbf{e}_j = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \tag{7.47}$$

т. е. направления векторов $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$ при $i \neq j$ взаимно сопряжены. А так как эти направления, кроме того, перпендикулярны, то эти направления являются главными направлениями. Поэтому *необходимым и достаточным условием того, что уравнение квадрики в прямоугольных координатах приведено к главным направлениям, является равенство нулю коэффициентов* a_{ij} $(i \neq j)$ *при произведениях координат.*

Если уравнение центральной квадрики приведено одновременно к центру и главным направлениям, это уравнение принимает вид

$$a_{11}(x^1)^2 + \ldots + a_{nn}(x^n)^2 + c = 0, \tag{7.48}$$

где все числа a_{ii} отличны от нуля. Уравнение (7.48), очевидно, переходит в себя при отражении от каждой координатной оси, например, при отражении от i-й оси

$$'x^i = -x^i, \quad 'x^j = x^j \quad (j \neq i).$$

Поэтому координатные оси в этом случае называются *осями симметрии* квадрики, а уравнение (7.48) называется *приведенным к осям симметрии.*

7.2.4. Приведение к взаимно сопряженным направлениям. В случае, когда оси аффинных координат направлены к взаимно сопряженным направлениям квадрики, будем называть уравнение квадрики *приведенным к взаимно сопряженным направлениям.* Так как в этом случае для базисных векторов выполняется соотношение (7.47), все коэффициенты a_{ij} при $i \neq j$ здесь также обращаются в нуль и уравнение принимает вид (7.46). Так же, как в случае приведения к главным направлениям, показывается, что равенство нулю коэффициентов a_{ij} $(i \neq j)$ является необходимым и достаточным условием того, что уравнение квадрики в аффинных координатах приведено к взаимно сопряженным направлениям.

Если уравнение центральной квадрики приведено одновременно к центру и взаимно сопряженным направлениям, это уравнение принимает вид (7.48). Координатные оси в этом случае являются взаимно сопряженными диаметрами квадрики и уравнение (7.48) в аффинных координатах называется *приведенным к взаимно сопряженным диаметрам*.

7.2.5. Классификация центральных квадрик. В случае центральной квадрики с уравнением (7.48) определитель (7.39) равен

$$\Delta = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}c. \tag{7.49}$$

В этом случае определитель матрицы оператора **A** равен

$$\delta = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}. \tag{7.50}$$

Так как в случае центральной квадрики оператор **A** обладает обратным, *в случае центральной квадрики определитель* δ *всегда отличен от нуля*. Поэтому в том случае, когда центральная квадрика является невырожденной, т. е. определитель Δ также отличен от нуля, отличен от нуля и коэффициент $c = \frac{\Delta}{\delta}$.

В случае невырожденной центральной квадрики введем обозначение

$$a_i^2 = \left|\frac{c}{a_{ii}}\right|. \tag{7.51}$$

Тогда в случае, когда числа a_{ii} имеют одинаковые знаки, противоположные знаку c, уравнение (7.44) можно переписать в виде

$$\frac{(x^1)^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{(x^n)^2}{a_n^2} = 1. \tag{7.52}$$

Поверхность (7.52) называется *эллипсоидом* (при $n = 2$ уравнение (7.52) является уравнением *эллипса*, при $n = 3$ — уравнением *эллипсоида* 3-пространства)[6].

В случае, когда числа a_{ii} имеют одинаковые знаки, совпадающие со знаком c, уравнение (7.48) можно переписать в виде

$$\frac{(x^1)^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{(x^n)^2}{a_n^2} = -1. \tag{7.53}$$

Уравнению (7.53) не удовлетворяет ни одна вещественная точка пространства, вследствие чего это уравнение по аналогии с уравнением (7.52) называют уравнением *мнимого эллипсоида* (при $n = 2$ уравнение (7.53) является уравнением мнимого эллипса, при $n = 3$ — уравнением мнимого эллипсоида 3-пространства).

В случае, когда числа a_{ii} при $i \leqslant l$ имеют знаки, противоположные знаку c, а при $i > l$ имеют знаки, совпадающие со знаком c, уравнение (7.48) можно переписать в виде

$$\frac{(x^1)^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{(x^l)^2}{a_l^2} - \frac{(x^{l+1})^2}{a_{l+1}^2} - \ldots - \frac{(x^n)^2}{a_n^2} = 1. \qquad (7.54)$$

Поверхность (7.54) называется *гиперболоидом индекса* l (при $n = 2$ и $l = 1$ уравнение (7.54) является уравнением *гиперболы*, при $n = 3$ и $l = 2$ — уравнением *однополостного гиперболоида*, при $n = 3$ и $l = 1$ — уравнением *двуполостного гиперболоида*)[7].

В случае вырожденной центральной квадрики введем обозначения

$$a_i^2 = \left| \frac{1}{a_{ii}} \right|. \qquad (7.55)$$

Тогда в случае, когда числа a_{ii} имеют одинаковые знаки, уравнение (7.48) можно переписать в виде

$$\frac{(x^1)^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{(x^n)^2}{a_n^2} = 0. \qquad (7.56)$$

Уравнению (7.56) удовлетворяет только одна точка — начало $O(\mathrm{o})$. В случае, когда числа a_{ii} при $i \leqslant l$ имеют один знак, а при $i > l$ — другой знак, уравнение (7.48) можно переписать в виде

$$\frac{(x^1)^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{(x^l)^2}{a_l^2} - \frac{(x^{l+1})^2}{a_{l+1}^2} - \ldots - \frac{(x^n)^2}{a_n^2} = 0. \qquad (7.57)$$

Так как уравнение (7.57) однородно, то вместе с точкой $M(\mathrm{x})$ этому уравнению удовлетворяют все точки $N(\lambda\mathrm{x})$ при любом λ, поверхность (7.57) называют *конусом с вершиной в точке* $O(\mathrm{o})$; этот конус называется *конусом индекса* l, если $l \leqslant n - l$ (случай, когда $l > n - l$, приводится

к этому случаю умножением всех членов уравнения на -1) [8]. Уравнение (7.56) по аналогии с уравнением (7.57) называют уравнением *мнимого конуса с вершиной в точке* $O(\mathbf{o})$.

7.2.6. Конусы. Конусы (7.56) и (7.57) являются частными случаями *конуса с вершиной в точке* O ($\mathbf{o}$), определяемого векторным уравнением

$$\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0, \tag{7.58}$$

которому также вместе с точкой $M(\mathbf{x})$ удовлетворяют все точки $N(\lambda\mathbf{x})$ при любом λ. Уравнение (7.58) приводится к виду (7.56) и (7.57) в том случае, когда эта квадрика центральная, т. е. $\delta \neq 0$.

Квадрику общего вида в n-пространстве можно рассматривать как сечение конуса (7.58) *в* $(n+1)$*-пространстве n-плоскостью, не проходящей через его вершину.* В самом деле, уравнение (7.5) можно записать в виде

$$(\mathbf{x}\ 1)\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\\ \mathbf{b} & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ 1\end{pmatrix} = 0, \tag{7.59}$$

где $\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\\ \mathbf{b} & c\end{pmatrix}$ — матрица $(n+1)$-го порядка, встречавшаяся нам в уравнении (7.37), и, следовательно, квадрику (7.5) можно рассматривать как пересечение конуса

$$(\mathbf{x}\ x^{n+1})\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\\ \mathbf{b} & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ x^{n+1}\end{pmatrix} = 0 \tag{7.60}$$

в $(n+1)$-пространстве с n-плоскостью $x^{n+1} = 1$.

Заметим, что определитель Δ для квадрики (7.5) совпадает с определителем δ для конуса (7.60), т. е. *в том случае, когда конус* (7.60) *является центральной квадрикой, он высекает из плоскости $x^{n+1} = 1$ невырожденную квадрику* (7.5).

7.2.7. Эллипсоиды и гиперболоиды. *Эллипсоид можно поставить во взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие со сферой.* В самом деле, применяя к сфере

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 1 \tag{7.61}$$

аффинное преобразование

$$'x^1 = a_1 x^1, \ \ldots, \ 'x^n = a_n x^n, \tag{7.62}$$

мы получим эллипсоид (7.52). Преобразование (7.62) устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками сферы и эллипсоида, взаимно непрерывное в силу непрерывности зависимости координат $'x^i$ от x^i, и обратно по формулам (7.62).

Гиперболоид индекса l можно поставить во взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие с многообразием пар точек, одна из которых пробегает $(l-1)$-сферу, а другая $(n-l)$-плоскость. В самом деле, гиперболоид (7.54) находится во взаимно однозначном и взаимно непрерывном соответствии с гиперболоидом того же индекса

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^l)^2 - (x^{l+1})^2 - \ldots - (x^n)^2 = 1, \tag{7.63}$$

так как, применяя к гиперболоиду (7.60) аффинное преобразование (7.62), мы получим гиперболоид (7.54). Применим теперь к гиперболоиду (7.63) преобразование

$$'x^a = \frac{x^a}{(x^1)^2 + \ldots + (x^l)^2} \quad (a \leqslant l), \quad 'x^u = x^u \quad (u > l). \tag{7.64}$$

Это преобразование устанавливает взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между гиперболоидом (7.63) и *цилиндром* [9]

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^l)^2 = 1, \tag{7.65}$$

так как ставит в соответствие каждой точке M гиперболоида точку M' цилиндра, являющуюся точкой его пересечения с перпендикуляром, опущенным из точки M на $(n-l)$-плоскость $x^a = 0$. На рис. 7.2 изображено отображение (7.64) однополостного и двуполостного гиперболоидов 3-пространства на поверхности (7.65) в 3-пространстве: на рис. 7.2, *а* однополостный гиперболоид ($l = 2$) отображается на цилиндр $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1$, на рис. 7.2, *б* двуполостный гиперболоид ($l = 1$) отображается на пару плоскостей $(x^1)^2 = 1$.

С другой стороны, всякой точке M цилиндра (7.65) с координатами x^i можно поставить во взаимно однозначное

и взаимно непрерывное соответствие пару точек M_1 и M_2, из которых точка M_1 лежит на l-плоскости $x^u = 0$ и имеет координаты x^a, равные соответственным координатам точки M, а точка M_2 лежит на $(n - l)$-плоскости

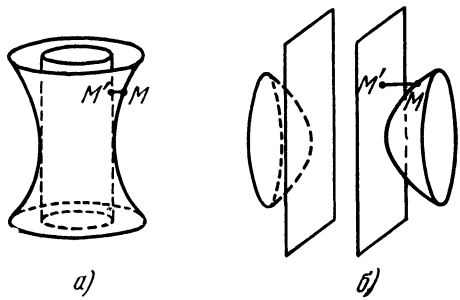

Рис. 7.2.

$x^a = 0$ и имеет координаты x^u, равные соответственным координатам точки M. Точки M_1 и M_2 являются прямоугольными проекциями точки M на указанные плоскости, пересекающиеся в единственной точке O (o) и вполне

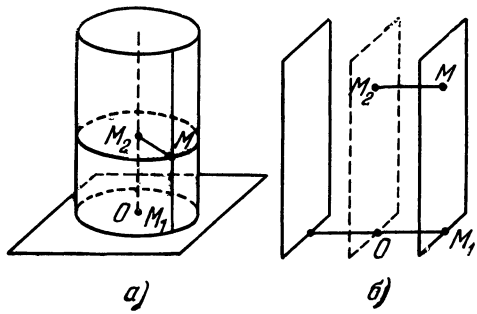

Рис. 7.3.

перпендикулярные друг другу (см. 3.3.16). Если точка M пробегает весь цилиндр (7.65), точка M_1 пробегает $(l - 1)$-сферу на l-плоскости $x^u = 0$ с тем же уравнением (7.65), а точка M_2 пробегает всю $(n - l)$-плоскость $x^a = 0$. Если мы зафиксируем точку M_2, а будем изменять только точ-

ку M_1, мы получим $(n-l)$-плоскость, целиком лежащую на цилиндре (7.65), т. е. $(n-l)$-плоскую образующую этого цилиндра, все эти $(n-l)$-плоскости параллельны $(n-l)$-плоскости $x^u=0$. Если мы зафиксируем точку M_1, а будем изменять только точку M_2, мы получим $(l-1)$-сферу, являющуюся пересечением цилиндра (7.65) с l-плоскостью, параллельной l-плоскости $x^u=0$. На рис. 7.3 изображены указанные $(l-1)$-сфера и $(n-l)$-плоскость для цилиндра и пары плоскостей, имеющих уравнение (7.65) при $n=3$ и $l=2$ и 1: на рис. 7.3, *а* $(l-1)$-сфера является окружностью, а $(n-l)$-плоскость — прямой, на рис. 7.3, *б* $(l-1)$-сфера является парой точек, а $(n-l)$-плоскость — 2-плоскостью.

7.2.8. **Асимптотический конус**. Будем называть *асимптотическим конусом* гиперболоида конус, все направления прямолинейных образующих которого являются асимптотическими направлениями гиперболоида, а вершина совпадает с центром гиперболоида. Очевидно, что направления прямолинейных образующих асимптотического конуса являются в то же время и асимптотическими направлениями этого конуса.

Уравнение асимптотического конуса гиперболоида (7.5) имеет вид

$$(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=0. \tag{7.66}$$

В частности, если в уравнении (7.5) $\mathbf{b}=\mathbf{o}$, т. е. в силу (7.20) $\mathbf{x}_0=\mathbf{o}$, уравнение (7.66) принимает вид (7.58). Так как в нашем случае $M_0(\mathbf{x}_0)$ — центр гиперболоида, то для всякой прямолинейной образующей конуса (7.66), уравнение которой можно записать в виде (7.10), выполняются условия (7.16) и (7.17) и, следовательно, *всякая прямолинейная образующая асимптотического конуса гиперболоида не имеет с этим гиперболоидом ни вещественных, ни мнимых общих точек.*

Всякая 2-плоскость, проходящая через центр гиперболоида, высекает из гиперболоида гиперболу, а из асимптотического конуса гиперболоида — асимптоты этой гиперболы, поэтому, так как точки гиперболы по мере удаления их в бесконечность неограниченно приближаются к точкам их асимптот, *точки гиперболоида по мере удаления*

их в бесконечность неограниченно приближаются к точкам их асимптотического конуса.

7.2.9. Плоские образующие гиперболоидов. Покажем, что *если гиперболоид* (7.5) *обладает m-плоскими образующими, то m-плоскими образующими обладает асимптотический конус* (7.66) *этого гиперболоида.* В самом деле, если m-плоскость (7.40), где $M_0(\mathbf{x}_0)$ — некоторая точка гиперболоида, является m-плоской образующей этого гиперболоида, то векторы $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{l}_a$, входящие в уравнение (7.40), удовлетворяют условиям (7.43), (7.44) и (7.18). Рассмотрим теперь параллельную этой m-плоскости m-плоскость с тем же уравнением (7.40), где $M_0(\mathbf{x}_0)$ — центр гиперболоида. Эта плоскость является m-плоской образующей конуса, так как условие (7.43) здесь совпадает с условием (7.43) для первой m-плоскости, поскольку оператор $\mathbf{A}$ для гиперболоида и конуса — один и тот же, условие (7.44) здесь выполняется, так как для центра гиперболоида в силу (7.19) $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b} = \mathbf{o}$, условие (7.18) здесь выполняется, так как вектор $\mathbf{x}_0$ удовлетворяет уравнению (4.66).

С другой стороны, *если гиперболоид* (7.5) *обладает m-плоскими образующими, то соответствующий ему конус* (7.60) *в $(n+1)$-пространстве обладает $(m+1)$-плоскими образующими.* В самом деле, так как гиперболоид (7.5) является пересечением плоскости $x^{n+1} = 1$ с конусом (7.60), то $(m+1)$-плоскость, проходящая через m-плоскую образующую гиперболоида и вершину конуса, является $(m+1)$-плоской образующей конуса.

Покажем, что *гиперболоид индекса l в n-пространстве при $l > \frac{n}{2}$ обладает плоскими образующими размерностей $m \leqslant n - l$, а при $l \leqslant \frac{n}{2}$ — плоскими образующими размерностей $m \leqslant l - 1$.* В самом деле, пусть гиперболоид индекса l при $l > \frac{n}{2}$ обладает m-плоскими образующими. В силу доказанного нами m-плоскими образующими обладает и асимптотический конус этого гиперболоида, который можно рассматривать как конус (7.60) для гиперболоида того же индекса в $(n-1)$-пространстве. Поэтому гиперболоид в $(n-1)$-пространстве в силу доказанного

нами обладает $(m-1)$-плоскими образующими. Повторяя этот процесс $n-l$ раз, мы получим квадрику в l-пространстве, являющуюся уже не гиперболоидом, а эллипсоидом, причем в силу нашего предположения этот эллипсоид должен обладать $(m-n+l)$-плоскими образующими. Но на эллипсоиде, как и на сфере, из которой его можно получить аффинным преобразованием, имеются точки, но нет прямолинейных образующих и, следовательно, $m-n+l \leqslant 0$, т. е. $m \leqslant n-l$. Аналогичное рассуждение для гиперболоида индекса l при $l \leqslant \frac{n}{2}$ показывает, что в этом случае $m \leqslant l-1$.

Примеры $(n-l)$-плоских образующих гиперболоида индекса l при $l > \frac{n}{2}$ и $(l-1)$-плоских образующих гиперболоида индекса l при $l \leqslant \frac{n}{2}$ мы получим, если запишем уравнение (7.54) гиперболоида при $l > \frac{n}{2}$ в виде

$$\left(\frac{x^1}{a_1}-\frac{x^{l+1}}{a_{l+1}}\right)\left(\frac{x^1}{a_1}+\frac{x^{l+1}}{a_{l+1}}\right)+\ldots+\left(\frac{x^{n-l}}{a_{n-l}}-\frac{x^n}{a_n}\right)\left(\frac{x^{n-l}}{a_{n-l}}+\frac{x^n}{a_n}\right)+$$
$$+\left(\frac{x^{n-l+1}}{a_{n-l+1}}-1\right)\left(\frac{x^{n-l+1}}{a_{n-l+1}}+1\right)+\frac{(x^{n-l+2})^2}{a_{n-l+2}^2}+\ldots+\frac{(x^l)^2}{a_l^2}=0, \tag{7.67}$$

а при $l \leqslant \frac{n}{2}$ — в виде

$$\left(\frac{x^1}{a_1}-\frac{x^{l+1}}{a_{l+1}}\right)\left(\frac{x^1}{a_1}+\frac{x^{l+1}}{a_{l+1}}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{x^{l-1}}{a_{l-1}}-\frac{x^{2l-1}}{a_{2l-1}}\right)\left(\frac{x^{l-1}}{a_{l-1}}+\frac{x^{2l-1}}{a_{2l-1}}\right)+$$
$$+\left(\frac{x^l}{a_l}-1\right)\left(\frac{x^l}{a_l}+1\right)-\frac{(x^{2l})^2}{a_{2l}^2}-\ldots-\frac{(x^n)^2}{a_n^2}=0. \tag{7.68}$$

В первом случае плоскость

$$\frac{x^1}{a_1}-\frac{x^{l+1}}{a_{l+1}}=\ldots=\frac{x^{n-l}}{a_{n-l}}-\frac{x^n}{a_n}=$$
$$=\frac{x^{n-l+1}}{a_{n-l+1}}-1=x^{n-l+2}=\ldots=x^l=0, \tag{7.69}$$

а во втором случае плоскость

$$\frac{x^1}{a_1} - \frac{x^{l+1}}{a_{l+1}} = \ldots = \frac{x^{l-1}}{a_{l-1}} - \frac{x^{2l-1}}{a_{2l-1}} = \frac{x^l}{a_l} - 1 = \\ = x^{2l} = \ldots = x^n = 0 \qquad (7.70)$$

являются плоскими образующими гиперболоида, так как всякая точка, удовлетворяющая уравнениям этих плоскостей, удовлетворяет уравнению (7.54) гиперболоида. Так как числа уравнений (7.67) и (7.68) соответственно равны l и $n - l + 1$, размерности этих плоскостей соответственно равны $n - l$ и $l - 1$.

В частности, однополостный гиперболоид 3-пространства $\left(n = 3,\ l = 2,\ l > \frac{n}{2}\right)$ обладает плоскими образующими размерности $\leqslant n - l = 1$, т. е. прямолинейными образующими и точками (рис. 7.4), а двуполостный гиперболоид 3-пространства $\left(n = 3,\ l = 1,\ l < \frac{n}{2}\right)$ обладает только плоскими образующими размерности $l - 1 = 0$, т. е. точками.

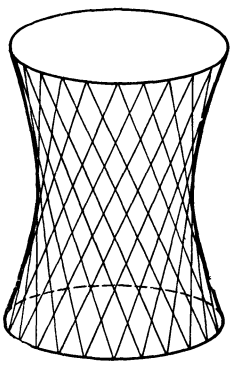

Рис. 7.4.

Так как всякую m-плоскую образующую квадрики (7.5) в n-пространстве можно рассматривать как пересечение n-плоскости $x^{n+1} = 1$ с $(m + 1)$-плоской образующей конуса (7.60) в $(n + 1)$-пространстве и всякая $(m + 1)$-плоская образующая конуса (7.60) высекает из плоскости $x^{n+1} = 1$ единственную m-плоскую образующую квадрики (7.5), изучение m-плоских образующих квадрик (7.5) в n-пространстве сводится к изучению $(m + 1)$-плоских образующих конуса (7.60) в $(n + 1)$-пространстве. Это взаимно однозначное соответствие, очевидно, взаимно непрерывно.

В том случае, когда квадрика (7.5) — гиперболоид (7.63), конус (7.60) определяется уравнением

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^l)^2 - (x^{l+1})^2 - \ldots - (x^n)^2 - (x^{n+1})^2 = 0. \qquad (7.71)$$

Конус (7.71) *представляет собой геометрическое место таких точек* M, *что векторы* $\overline{OM}$ *составляют угол* $\frac{\pi}{4}$ *с* l-*плоскостью* $x^u = 0$ $(u > l)$ *и* $(n+1-l)$-*плоскостью* $x^a = 0$ $(a \leqslant l)$, *пересекающимися в единственной точке* $O(\mathbf{o})$ *и вполне перпендикулярны друг другу*. В самом деле угол, составляемый вектором $\mathbf{x}$ $(n+1)$-пространства с m-плоскостью равен углу, составляемому этим вектором с его прямоугольной проекцией на эту плоскость. Так как прямоугольная проекция $\mathbf{x}_1$ вектора $\mathbf{x}$ с координатами x^i на l-плоскость $x^u = 0$ имеет координаты $x_1^a = x^a$, $x_1^u = 0$, скалярное произведение $\mathbf{x}\mathbf{x}_1$ в прямоугольных координатах равно $\mathbf{x}\mathbf{x}_1 = (x^1)^2 + \ldots + (x^l)^2$ и угол φ между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_1$ определяется соотношением

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{x}_1|} = \frac{(x^1)^2 + \ldots + (x^l)^2}{\sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2}\,\sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^l)^2}} = \frac{\sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^l)^2}}{\sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2}}. \qquad (7.72)$$

Так как прямоугольная проекция $\mathbf{x}_2$ вектора $\mathbf{x}$ на $(n+1-l)$-плоскость $x^a = 0$ имеет координаты $x_2^a = 0$, $x_2^u = x^u$, скалярное произведение $\mathbf{x}\mathbf{x}_2$ в тех же координатах равно $\mathbf{x}\mathbf{x}_2 = (x^{l+1})^2 + \ldots + (x^{n+1})^2$ и угол ψ между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}_2$ определяется соотношением

$$\cos\psi = \frac{\mathbf{x}\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{x}_2|} = \frac{(x^{l+1})^2 + \ldots + (x^{n+1})^2}{\sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2}\,\sqrt{(x^{l+1})^2 + \ldots + (x^{n+1})^2}} = \frac{\sqrt{(x^{l+1})^2 + \ldots + (x^{n+1})^2}}{\sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^{n+1})^2}}. \qquad (7.73)$$

Если $\varphi = \psi = \frac{\pi}{4}$ (в силу полной перпендикулярности плоскостей $x^a = 0$ и $x^u = 0$ сумма $\varphi + \psi$ должна быть равна $\frac{\pi}{2}$), приравнивая выражения для $\cos\varphi$ и $\cos\psi$, мы находим, что координаты x^i векторов $\mathbf{x}$, а значит, и точек M, связаны уравнением конуса (7.71).

Нетрудно проверить, что и обратно, всякая точка M конуса (7.71) обладает указанным свойством.

Найдем *размерность* $Q_{n,m}$ *многообразия* m*-плоских образующих гиперболоида, обладающего этими образующими*[10]. Каждая такая m-плоская образующая проходит через некоторую точку $M_0(\mathbf{x}_0)$, через точку $M_1(\mathbf{x}_1)$ пересечения гиперболоида с касательной плоскостью к нему в точке M_0, через точку $M_2(\mathbf{x}_2)$ пересечения гиперболоида с пересечением касательных плоскостей к нему в точках M_0 и M_1, ..., через точку $M_a(\mathbf{x}_a)$ пересечения гиперболоида с пересечением касательных плоскостей к нему в точках M_0, M_1, ..., M_{a-1}, ... и, наконец, через точку $M_m(\mathbf{x}_m)$ пересечения гиперболоида с пересечением касательных плоскостей к нему в точках M_0, M_1, ..., M_{m-1}. Число параметров, от которых зависит точка M_0, равно размерности гиперболоида, т. е. $n-1$, число параметров, от которых зависит точка M_a, равно размерности пересечения гиперболоида с a плоскостями, т. е. $n-a-1$, число параметров, от которых зависят все точки M_0, M_1, ..., M_m, равно сумме арифметической прогрессии

$$n-1)+(n-2)+\ldots+(n-m-1)=$$
$$=\frac{(n-1)+(n-m-1)}{2}(m+1)=\frac{2n-m-2}{2}(m+1).$$

Так как это число параметров равно сумме числа $Q_{n,m}$ параметров, от которых зависят m-плоские образующие, и числа $m(m+1)$ параметров, от которого зависят точки M_0, M_1, ..., M_m на m-плоскости, мы получаем, что

$$Q_{n,m}=\frac{2n-m-2}{2}(m+1)-m(m+1)=$$
$$=\frac{2n-3m-2}{2}(m+1),$$

т. е.

$$Q_{n,m}=\frac{(2n-3m-2)(m+1)}{2}. \qquad (7.74)$$

То же число (7.74) можно получить для гиперболоида индекса $m+1\leqslant\frac{n}{2}$ из следующих соображений: в силу взаимно однозначного и взаимно непрерывного соответст-

вия между m-плоскими образующими гиперболоида (7.63) в n-пространстве и конуса (7.71) в $(n+1)$-пространстве, размерность $Q_{n,m}$ равна размерности многообразия $(m+1)$-плоских образующих конуса (7.71). Но так как конус (7.71) является геометрическим местом точек M, для которых векторы $\overline{OM}$ составляют угол $\frac{\pi}{4}$ с $(m+1)$-плоскостью $x^u = 0$, то всякая $(m+1)$-плоская образующая конуса *изоклинна* (см. **3.3.16**) $(m+1)$-плоскости $x^u = 0$. Выберем на $(m+1)$-плоскости $x^u = 0$ $(m+1)$-симплекс $OM_0 \ldots M_m$, для которого векторы $\overline{OM_a}$ — взаимно перпендикулярные единичные векторы, и опустим перпендикуляры из точек M_a на некоторую $(m+1)$-плоскую образующую конуса; пусть основания этих перпендикуляров — точки P_a. Так как $(m+1)$-плоскости изоклинны, все углы M_aOP_a являются стационарными углами, поэтому из того, что векторы $\overline{OM_a}$ взаимно перпендикулярны, следует что векторы $\overline{OP_a}$ также взаимно перпендикулярны. Опустим, далее, перпендикуляры из точки P_a на $(n-m)$-плоскость $x^a = 0$; пусть основания этих перпендикуляров — точки N_a. Так как $(m+1)$-плоская образующая конуса и $(m+1)$-плоскость, являющаяся прямоугольной проекцией этой $(m+1)$-плоской образующей на $(n-m)$-плоскость $x^a = 0$ также изоклинны, все углы P_aON_a также являются стационарными углами и из того, что векторы $\overline{OP_a}$ взаимно перпендикулярны, следует, что векторы $\overline{ON_a}$ также взаимно перпендикулярны. Поэтому всякой $(m+1)$-плоской образующей нашего конуса соответствует система $m+1$ взаимно перпендикулярных единичных векторов $\mathbf{a}_a$, коллинеарных с векторами $\overline{ON_a}$. При этом одна и та же система $m+1$ взаимно перпендикулярных единичных векторов $\mathbf{a}_a$ на $(n-m)$-плоскости $x^a = 0$ соответствует 2^{m+1} $(m+1)$-плоским образующим нашего конуса, так как $(m+1)$-плоская образующая, соответствующая одной и той же системе векторов $\mathbf{a}_a$, пересекается с каждой из 2-плоскостей M_aON_a по биссектрисе этого или смежного с ним угла, а так как такие биссектрисы в каждой из $m+1$ 2-плоскостей M_aON_a можно выбирать двумя способами, полное число $(m+1)$-плоских

образующих, соответствующих одной системе векторов $\mathbf{a}_a$, равно 2^{m+1}. Поэтому размерность $Q_{n,m}$ равна размерности многообразия систем векторов $\mathbf{a}_a$. Так как всякая система векторов $\mathbf{a}_a$ лежит в некоторой $(m+1)$-плоскости, проходящей через точку O и лежащей в $(n-m)$-плоскости $x^a = 0$, то размерность многообразия систем векторов $\mathbf{a}_a$ равна сумме размерности многообразия $(m+1)$-плоскостей $(n-m)$-пространства, проходящих через одну точку, и размерности многообразия систем $m+1$ взаимно перпендикулярных единичных векторов в $(m+1)$-пространстве. Но размерность многообразия $(m+1)$-плоскостей $(n-m)$-пространства, проходящих через одну точку, равна размерности многообразия всех m-плоскостей $(n-m-1)$-пространства, т. е. в силу (3.111), равна $(m+1)(n-2m-1)$. С другой стороны, размерность многообразия систем $m+1$ взаимно перпендикулярных векторов в $(m+1)$-пространстве равна размерности группы ортогональных матриц $(m+1)$-го порядка, т. е. $\frac{m(m+1)}{2}$. Но сумма $(m+1)(n-2m-1)+\frac{m(m+1)}{2}$ равна числу $Q_{u,\,m}$.

7.2.10. Плоские образующие максимальной размерности. Максимальной размерностью плоских образующих обладают при нечетном n гиперболоиды индекса $\frac{n+1}{2}$, а при четном n — гиперболоиды индексов $\frac{n}{2}$ и $\frac{n}{2}+1$, так как размерность плоских образующих в первом случае $\leqslant \frac{n-1}{2}$, а во втором случае $\leqslant \frac{n}{2}-1$.

Формула (7.74) при

$$m=\frac{n+1}{2} \text{ и } m=\frac{n}{2}-1$$

дает нам

$$Q_{n,\,\frac{n-1}{2}}=\frac{\frac{n+1}{2}\left[2n-\frac{3}{2}(n-1)-2\right]}{2}=\frac{\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}{2}=$$

$$=\frac{n^2-1}{8} \quad (n \text{ — нечетное}) \qquad (7.75)$$

и

$$Q_{n,\frac{n}{2}-1} = \frac{\frac{n}{2}\left(2n - \frac{3}{2}n + 3 - 2\right)}{2} = \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2} = \\ = \frac{n(n+2)}{8} \quad (n \text{ — четное}). \quad (7.76)$$

Многообразие плоских образующих максимальной размерности гиперболоида в n-пространстве при четном n связно, а при нечетном n состоит из двух связных семейств. Для доказательства рассмотрим гиперболоид (7.63) при $l = \frac{n+1}{2}$, если n нечетно, и при $l = \frac{n}{2} + 1$, если n четно, и соответствующий конус (7.71) в $(n+1)$-пространстве. В первом случае и плоскость $x^u = 0$ и плоскость $x^a = 0$ $\frac{n+1}{2}$-мерны, во втором случае плоскость $x^u = 0$ $\left(\frac{n}{2} - 1\right)$-мерна, а плоскость $x^a = 0$ $\frac{n}{2}$-мерна. Если применить к одной плоской образующей максимальной размерности конуса все вращения $(n+1)$-пространства, переводящие в себя обе плоскости $x^u = 0$ и $x^a = 0$, мы получим все плоские образующие максимальной размерности конуса.

Покажем, далее, что если две плоские образующие переводятся друг в друга вращением из связной группы, эти плоские образующие принадлежат к одному связному семейству и обратно. В самом деле, всякое вращение из связной группы можно непрерывно перевести в тождественное преобразование, заменяя все стационарные углы φ_i произведениями $\varphi_i t$ и изменяя t от 1 до 0. При этом инвариантные плоскости всех вращений со стационарными углами $\varphi_i t$ совпадают, откуда следует, что если данное вращение переводило в себя плоскости $x^u = 0$ и $x_a = 0$, то эти плоскости переводятся в себя всеми вращениями со стационарными углами $\varphi_i t$. Поэтому каждое из этих вращений переводит одну из двух данных плоских образующих в некоторую плоскую образующую и полученные плоские образующие составляют непрерывное семейство плоских образующих, соединяющих две данные плоские образующие. С другой стороны, каждая плоская образующая нашего конуса переводится в себя при отражении от его вершины, независимо от того, входит ли это отражение в связную группу вращений или во вторую связную

компоненту этой группы. Поэтому всякому непрерывному семейству плоских образующих, соединяющих две данные плоские образующие, соответствует непрерывное семейство вращений, переводящих первую из данных плоских образующих во вторую, причем второй из данных плоских образующих соответствует вращение, переводящее первую плоскость во вторую, а первой плоской образующей соответствует тождественное преобразование, или семейство вращений, отличающееся от непрерывного семейства указанного вида умножением некоторых вращений этого семейства на отражение от вершины конуса.

Отсюда следует, что если две плоские образующие переводятся друг в друга вращением из второй связной компоненты группы вращений, эти плоские образующие принадлежат к одному связному семейству в случае, когда отражение от вершины конуса принадлежит ко второй связной компоненте группы вращений, и принадлежат к разным связным семействам в случае, когда указанное отражение принадлежит к связной группе движений. Поэтому многообразие плоских образующих максимальной размерности конуса и, следовательно гиперболоида, состоит из двух связных компонент в случае, когда указанное отражение принадлежит к связной группе движений, и это многообразие связно в случае, когда указанное отражение принадлежит ко второй связной компоненте группы движений. Но так как матрица отражений от вершины конуса имеет вид $(-\delta_j^i)$ ее определитель равен $+1$ в случае, когда ее порядок, равный $n+1$, четен, т. е. когда n нечетно, и равен -1 в случае, когда порядок этой матрицы нечетен, т. е. когда n четно; в первом случае отражение принадлежит к связной группе вращений и многообразие плоских образующих максимальной размерности гиперболоида состоит из двух связных компонент, а во втором случае отражение принадлежит ко второй связной компоненте группы вращений и многообразие плоских образующих связно.

В частности, многообразие прямолинейных образующих однополостного гиперболоида в 3-пространстве состоит из двух семейств (см. рис. 7.4), многообразие прямолинейных образующих гиперболоида индекса 2 в 4-пространстве связно, многообразие 2-плоских образующих гипер-

болоида индекса 3 в 5-пространстве состоит из двух семейств, многообразие 2-плоских образующих гиперболоида индекса 3 в 6-пространстве связно, многообразие 3-плоских образующих гиперболоида индекса 4 в 7-пространстве состоит из двух семейств.

Из этой теоремы вытекает, что *многообразия всех плоских образующих гиперболоидов, размерности которых меньше максимальной, связны*, так как через каждые две скрещивающиеся k-плоские образующие можно провести $(2k+2)$-плоскость, высекающую из данного гиперболоида гиперболоид, в котором многообразие k-плоских образующих связно.

Покажем, что *две непересекающиеся плоские образующие максимальной размерности гиперболоида в* $(2m+1)$-*пространстве принадлежат к одному семейству при нечетном* m *и к разным семействам при четном* m, *две плоские образующие максимальной размерности того же гиперболоида, пересекающиеся в точке, принадлежат к одному семейству при четном* m *и к разным семействам при нечетном* m, *две плоские образующие максимальной размерности того же гиперболоида, пересекающиеся по* k-*плоскости, принадлежат к одному семейству при четном* $m+k$ *и к разным семействам при нечетном* $m+k$; два первых утверждения можно рассматривать как частные случаи третьего утверждения соответственно при $k=-1$ и 0. Для доказательства рассмотрим гиперболоид (7.63) при $n=2m+1$ и $l=m+1$ и соответствующий конус (7.71) в $(2m+2)$-пространстве. В этом случае плоские образующие максимальной размерности гиперболоида m-мерны, а такие же плоские образующие конуса $(m+1)$-мерны; обе плоскости $x^u=0$ и $x^a=0$ в этом случае также $(m+1)$-мерны. Мы видели, что всякие две плоские образующие максимальной размерности можно перевести друг в друга вращением $(2m+2)$-пространства вокруг вершины конуса. С другой стороны, всякие две плоские образующие максимальной размерности можно перевести друг в друга косым или прямым отражением от некоторой $(m+k+2)$-плоскости, проходящей через вершину конуса, переводящим конус в себя: если в $(2m+2)$-пространстве выбрана система аффинных координат с такими базисными векторами $\mathbf{i}_i$, что векторы $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_{k+1}, \mathbf{i}_{k+2}, \ldots, \mathbf{i}_{m+1}$ направлены по

первой $(m+1)$-плоской образующей, а векторы $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_{k+1}, \mathbf{i}_{m+2}, \ldots, \mathbf{i}_{2m-k+1}$ направлены по второй $(m+1)$-плоской образующей, то отражение происходит от $(m+k+2)$-плоскости, проходящей через вершину конуса и имеющей направляющие векторы $\mathbf{i}_1, \ldots, \mathbf{i}_{k+1}, \mathbf{i}_{k+2}+\mathbf{i}_{m+2}, \ldots, \mathbf{i}_{m-1}+\mathbf{i}_{2m-k+1}, \mathbf{i}_{2m-k+2}, \ldots, \mathbf{i}_{2m+2}$ в направлении $(m-k)$-плоскости с направляющими векторами $\mathbf{i}_{k+2}-\mathbf{i}_{m+2}, \ldots, \mathbf{i}_{m+1}=\mathbf{i}_{2m-k+1}$. Произведем теперь аффинное преобразование, переводящее вершину конуса в себя, векторы $\mathbf{i}_1+\mathbf{i}_{2m-k+2}, \ldots, \mathbf{i}_{k+1}+\mathbf{i}_{2m+2}, \mathbf{i}_{k+2}+\mathbf{i}_{m+2}, \ldots, \mathbf{i}_{m+1}+\mathbf{i}_{2m-k+1}$ — соответственно в базисные векторы $\mathbf{e}_a$ системы прямоугольных координат, которой мы пользуемся, а векторы $\mathbf{i}_1-\mathbf{i}_{2m-k+2}, \ldots, \mathbf{i}_{k+1}-\mathbf{i}_{2m+2}, \mathbf{i}_{k+2}-\mathbf{i}_{m+2}, \ldots, \mathbf{i}_{m+1}-\mathbf{i}_{2m-k+1}$ — в базисные векторы $\mathbf{e}_u$ той же системы координат. Это аффинное преобразование переводит и весь конус в себя, а две данные $(m+1)$-плоские образующие конуса оно переведет в такие две его $(m+1)$-плоские образующие, которые переводятся друг в друга прямым отражением от $(m+k+2)$-плоскости, являющейся суммой плоскости $x^u=0$ и $(k+1)$-плоскости пересечения этих $(m+1)$-плоских образующих конуса. Но прямое отражение от $(m+k+2)$-плоскости принадлежит к связной группе вращений $(2m+2)$-пространства при четном $m+k$ и ко второй связной компоненте группы вращений этого пространства при нечетном $m+k$. Поэтому две $(m+1)$-плоские образующие конуса, пересекающиеся по $(k+1)$-плоскости, переводимые друг к друга прямым отражением от указанной $(m+k+2)$-плоскости, а следовательно, и две произвольные $(m+1)$-плоские образующие конуса, пересекающиеся по $(k+1)$-плоскости, принадлежат к одному семейству при четном $m+k$ и к разным семействам при нечетном $m+k$, откуда вытекает аналогичное утверждение для m-плоских образующих гиперболоида, пересекающихся по k-плоскости.

В частности, две непересекающиеся прямолинейные образующие однополостного гиперболоида в 3-пространстве принадлежат к одному семейству, а две пересекающиеся прямолинейные образующие того же гиперболоида принадлежат к разным семействам (см. рис. 7.4). Две непересекающиеся 2-плоские образующие гиперболоида индекса 2 в 5-пространстве и две 2-плоские образующие

того же гиперболоида, пересекающиеся по прямой, принадлежат к разным семействам, а две 2-плоские образующие того же гиперболоида, пересекающиеся в точке, принадлежат к одному семейству. Две непересекающиеся 3-плоские образующие гиперболоида индекса 3 в 7-пространстве и две 3-плоские образующие того же гиперболоида, пересекающиеся по прямой, принадлежат к одному семейству, а две 3-плоские образующие того же гиперболоида, пересекающиеся в точке и по 2-плоскости, принадлежат к разным семействам.

7.2.11. Параболоиды. Рассмотрим теперь невырожденные нецентральные квадрики. Нецентральная квадрика может быть невырожденной только в том случае, когда ранг матрицы оператора $\mathbf{A}$ равен $n-1$, так как ранг матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & c \end{pmatrix}$ не может быть отличен от нуля, если ранг матрицы оператора $\mathbf{A}$ меньше $n-1$.

Поэтому в этом случае в уравнении (7.46) квадрики, приведенном к главным направлениям, отличны от нуля $n-1$ из чисел a_{ii} и уравнение (7.46) можно переписать в виде

$$a_{11}(x^1)^2 + \ldots + a_{n-1,\,n-1}(x^{n-1})^2 + 2b_i x^i + c = 0. \qquad (7.77)$$

Вычитая из левой части уравнения (7.77) слагаемое $2b_n x^n$, мы получаем уравнение центральной $(n-2)$-квадрики в $(n-1)$-пространстве. Приводя уравнение этой $(n-2)$-квадрики к ее центру, мы преобразуем уравнение (7.77) к виду

$$a_{11}(x^{1'})^2 + \ldots + a_{n-1,\,n-1}(x^{n-1'})^2 + 2b_n x^{n'} + c' = 0.$$

Далее, перенос

$$x^{i'} = x^{i''} \quad (i < n), \qquad x^{n'} = x^{n''} - \frac{c'}{2b_n}$$

преобразует это уравнение к виду

$$a_{11}(x^{1''})^2 + \ldots + a_{n-1,\,n-1}(x^{n-1''})^2 + 2b_n x^{n''} = 0. \qquad (7.78)$$

Введем обозначения

$$p_i = \left| \frac{b_n}{a_{ii}} \right|. \qquad (7.79)$$

Тогда в случае, когда числа a_{ii} имеют одинаковые знаки, уравнение (7.78) можно переписать в виде

$$\frac{(x^1)^2}{p_1}+\ldots+\frac{(x^{n-1})^2}{p_{n-1}}=2x^n \tag{7.80}$$

или привести к этому виду изменением направления n-й координатной оси. Поверхность (7.80) называется *эллиптическим параболоидом* (при $n=2$ уравнение (7.80) является уравнением *параболы*, при $n=3$ — уравнением *эллиптического параболоида* 3-пространства) [11].

В случае, когда числа a_{ii} при $i\leqslant l$ имеют один знак, а при $i>l$ — другой знак, уравнение (7.79) можно переписать в виде

$$\frac{(x^1)^2}{p_1}+\ldots+\frac{(x^l)^2}{p_l}-\frac{(x^{l+1})^2}{p_{l+1}}-\ldots-\frac{(x^{n-1})^2}{p_{n-1}}=2x^n \tag{7.81}$$

или привести к этому виду изменением направления n-й координатной оси. Поверхность (7.81) называется *гиперболическим параболоидом индекса* l; всегда можно считать, что $l\leqslant\frac{n}{2}$, так как случай $l>\frac{n}{2}$ приводится к этому случаю умножением всех членов уравнения на -1 и изменением направлений n-й координатной оси (при $n=3$ и $l=1$ уравнение (7.81) является уравнением гиперболического параболоида 3-пространства).

Так как матрица $\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\\ \mathbf{b} & c\end{pmatrix}$ для параболоидов (7.80) и (7.81) имеет соответственно вид

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{p_1} & & & & & & \\ & \frac{1}{p_2} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \frac{1}{p_{n-1}} & & & \\ & & & & 0 & -1 & \\ & & & & -1 & 0 & \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}\frac{1}{p_1} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \frac{1}{p_l} & & & & & & \\ & & & -\frac{1}{p_{l+1}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -\frac{1}{p_{n-1}} & & & \\ & & & & & & 0 & -1 & \\ & & & & & & -1 & 0 & \end{pmatrix}$$

определитель Δ этой матрицы равен соответственно

$$\frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}} \quad \text{и} \quad \frac{(-1)^{n+l-1}}{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}},$$

т. е. $\Delta \neq 0$, и параболоиды действительно являются невырожденными квадриками.

Эллиптический параболоид (7.80) можно получить аффинным преобразованием из параболоида

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^{n-1})^2 = 2x^n, \tag{7.82}$$

а гиперболический параболоид (7.80) — из параболоида

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^l)^2 - (x^{l+1})^2 - \ldots - (x^{n-1})^2 = 2x^n, \tag{7.83}$$

так как применяя к параболоидам (7.82) и (7.83) аффинное преобразование

$$'x^1 = \sqrt{p_1}x^1, \ldots, 'x^{n-1} = \sqrt{p_{n-1}}\,x^{n-1}, \; 'x^n = x^n,$$

мы получим соответственно параболоиды (7.80) и (7.81).

Так как для всякой точки плоскости $x^n = 0$ с координатами x^i при $i < n$ формулы (7.80) и (7.81) дают нам значение координаты x^n единственной точки параболоидов с этими уравнениями, имеющей те же координаты x^i при $i < n$, и это соответствие взаимно непрерывно, *эллиптические и гиперболические параболоиды можно поставить во взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие с* $(n-1)$*-плоскостью*. На рис. 7.5 изображено отображение параболоидов 3-пространства на 2-плоскость $x^3 = 0$.

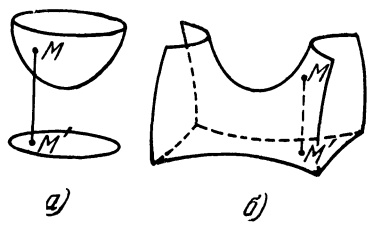

Рис. 7.5.

7.2.12. Плоские образующие гиперболических параболоидов. Параболоиды (7.80) и (7.81) также можно рассматривать как сечения конуса (7.60) в $(n+1)$-пространстве плоскостью $x^{n+1} = 1$, причем, так как параболоиды — невырожденные квадрики, конус (7.60) в этом случае

является центральной квадрикой. Так как конус (7.60) в случае гиперболического параболоида (7.83) имеет уравнение

$$(x^1)^2+\ldots+(x^l)^2-(x^{l+1})^2-\ldots-(x^{n-1})^2-2x^nx^{n+1}=0, \tag{7.84}$$

которое преобразованием координат $x^1=x^{1'},\ldots,x^{n-1}=x^{n-1'}$, $x^n=\dfrac{x^{n'}+x^{n+1'}}{\sqrt{2}}$, $x^{n+1}=\dfrac{-x^{n'}+x^{n+1'}}{\sqrt{2}}$ переводится в уравнение

$$(x^{1'})^2+\ldots+(x^{l'})^2-(x^{l+1'})^2-\ldots-(x^{n-1'})^2+ \\ +(x^{n'})^2-(x^{n+1'})^2=0, \tag{7.85}$$

а конус (7.85) высекает из плоскости $x^{n+1'}=1$ гиперболоид индекса $l+1$, *гиперболический параболоид индекса l обладает плоскими образующими той же размерности, что и гиперболоид индекса $l+1$*. Поэтому *гиперболический параболоид индекса l в n-пространстве обладает плоскими образующими размерностей $m\leqslant l$* или при $l=\frac{n}{2}$ — плоскими образующими размерности $m\leqslant l-1$ (первый случай соответствует случаю $l+1\leqslant\frac{n}{2}$, второй — случаю $l+1>\frac{n}{2}$). Примеры $(n-l+1)$-плоских образующих гиперболического параболоида индекса l при $l+1>\frac{n}{2}$ и l-плоских образующих гиперболического параболоида индекса l при $l+1\leqslant\frac{n}{2}$ мы получим, если запишем уравнение (7.80) параболоида при $l+1>\frac{n}{2}$ в виде

$$\left(\frac{x^1}{\sqrt{p_1}}-\frac{x^{l+1}}{\sqrt{p_{l+1}}}\right)\left(\frac{x^1}{\sqrt{p_1}}+\frac{x^{l+1}}{\sqrt{p_{l+1}}}\right)+\ldots \\ \ldots+\left(\frac{x^{n-l-1}}{\sqrt{p_{n-l-1}}}-\frac{x^{n-1}}{\sqrt{p_{n-1}}}\right)\left(\frac{x^{n-l-1}}{\sqrt{p_{n-l-1}}}+\frac{x^{n-1}}{\sqrt{p_{n-1}}}\right)+ \\ +\frac{(x^{n-l})^2}{p_{n-l}}+\ldots+\frac{x^l}{p_l}-2x^n=0, \tag{7.86}$$

а при $l+1 \leqslant \frac{n}{2}$ — в виде

$$\left(\frac{x^1}{\sqrt{p_1}}-\frac{x^{l+1}}{\sqrt{p_{l+1}}}\right)\left(\frac{x^1}{\sqrt{p_1}}+\frac{x^{l+1}}{\sqrt{p_{l+1}}}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{x^l}{\sqrt{p_l}}-\frac{x^{2l}}{\sqrt{p_{2l}}}\right)\left(\frac{x^l}{\sqrt{p_l}}+\frac{x^{2l}}{\sqrt{p_{2l}}}\right)-$$
$$-\frac{(x^{2l+1})^2}{p_{2l+1}}-\ldots-\frac{(x^{n+1})^2}{p_{n-1}}-2x^n=0. \quad (7.87)$$

В первом случае плоскость

$$\frac{x^1}{\sqrt{p_1}}-\frac{x^{l+1}}{\sqrt{p_{l+1}}}=\ldots=\frac{x^{n-l-1}}{\sqrt{p_{n-l-1}}}-\frac{x^{n-1}}{\sqrt{p_{n-1}}}=x^{n-l}=\ldots$$
$$\ldots=x^l=x^n=0, \quad (7.88)$$

а во втором случае плоскость

$$\frac{x^1}{\sqrt{p_1}}-\frac{x^{l+1}}{\sqrt{p_{l+1}}}=\ldots=\frac{x^l}{\sqrt{p_l}}-\frac{x^{2l}}{\sqrt{p_{2l}}}=x^{2l+1}=\ldots$$
$$\ldots=x^{n-1}=x^n=0 \quad (7.89)$$

являются плоскими образующими параболоида, так как всякая точка, удовлетворяющая уравнениям этих плоскостей, удовлетворяет уравнению (7.81) параболоида. Так как числа уравнений (7.88) и (7.89) соответственно равны $l+1$ и $n-l$, размерности этих плоскостей соответственно равны $n-l-1$ и l. В частности, гиперболический параболоид 3-пространства $\left(n=3,\ l=1,\ l+1>\frac{n}{2}\right)$ обладает плоскими образующими размерности $\leqslant n-l-1=1$, т. е. прямолинейными образующими и точками.

Из того, что конус (7.85) высекает из плоскости $x^{n+1'}=1$ гиперболоид индекса $l+1$, вытекает также, что *размерность многообразия m-плоских образующих гиперболического параболоида, обладающего этими образующими в n-пространстве, равно тому же числу* (7.74), *что и для многообразия m-плоских образующих гиперболоида, что максимальной размерностью плоских образующих при нечетном n обладают гиперболические параболоиды индекса* $\frac{n-1}{2}$, *а при четном n — гиперболические параболоиды*

индексов $\frac{n}{2}-1$ *и* $\frac{n}{2}$, *что многообразие плоских образующих максимальной размерности гиперболического параболоида в n-пространстве связно или состоит из двух связных семейств в тех же случаях, что и многообразие таких же плоских образующих гиперболоида, и что две плоские образующие максимальной размерности гиперболического параболоида в* $(2m+1)$*-пространстве принадлежат к одному или разным семействам в тех же случаях, что и такие же плоские образующие гиперболоида.* В частности, многообразие прямолинейных образующих гиперболического параболоида в 3-пространстве состоит из двух семейств, причем непересекающиеся прямолинейные образующие принадлежат к одному семейству, а две пересекающиеся прямолинейные образующие принадлежат к разным семействам.

7.2.13. Вырожденные квадрики. В общем случае вырожденная квадрика является нецентральной поверхностью и матрица ее оператора **A** имеет ранг $r<n$. В этом случае в уравнении (7.46) квадрики, приведенном к главным направлениям, отличны от нуля $r<n$ чисел a_{ii} и уравнение (7.46) можно переписать в виде

$$a_{11}(x^1)^2+\ldots+a_{rr}(x^r)^2+2b_ix^i+c=0. \qquad (7.90)$$

Вычитая из левой части уравнения (7.90) слагаемые $2b_{r+1}x^{r+1}+\ldots+2b_nx^n$, мы получим уравнение центральной $(r-1)$-квадрики в r-пространстве. Приводя уравнение этой $(r-1)$-квадрики к ее центру, мы преобразуем уравнение (7.90) к виду

$$a_{11}(x^{1'})^2+\ldots+a_{rr}(x^{r'})^2+2b_{r+1}x^{r+1'}+\ldots+2b_nx^{n'}+c'=0. \qquad (7.91)$$

Если хотя бы один из коэффициентов b_j отличен от нуля, перенос

$$x^{i'}=x^{i''}\ (i\neq j),\quad x^{j'}=x^{j''}-\frac{c'}{2b_j}$$

преобразует уравнение к виду

$$a_{11}(x^{1'})^2+\ldots+a_{rr}(x^{r'})^2+2b_{r+1}x^{r+1'}+\ldots+2b_nx^{n'}=0. \qquad (7.92)$$

Далее поворот в $(n-r)$-плоскости $x^1 = \ldots = x^r = 0$, переводящий вектор с координатами $b_{r+1}, \ldots, b_n$ в вектор с координатами $b, 0, \ldots, 0$, переводит уравнение (7.92) в уравнение

$$a_{11}(x^{1''})^2 + \ldots + a_{rr}(x^{r''})^2 + 2bx^{r+1''} = 0. \qquad (7.93)$$

Так как в уравнение (7.93) не входят координаты $x^{r+2''}, \ldots, x^{n''}$, это уравнение является уравнением *цилиндра*; так как уравнение (7.93) является уравнением параболоида в $(r+1)$-плоскости $x^{r+2''} = \ldots = x^{n''} = 0$, то поверхность (7.93) называется *параболическим цилиндром с r-мерным основанием* или, короче, *с r-основанием*; в случае, когда параболоид в $(r+1)$-плоскости эллиптический, будем называть цилиндр *параболическим цилиндром индекса* 0, в случае, когда параболоид в $(r+1)$-плоскости — гиперболический индекса l, будем называть цилиндр *параболическим цилиндром индекса* l (при $n = 3$ уравнение (7.92) является уравнением параболического цилиндра 3-пространства).

В случае, когда в уравнении (7.91) все коэффициенты b_i равны нулю, это уравнение принимает вид

$$a_{11}(x^{1'})^2 + \ldots + a_{rr}(x^{r'})^2 + c' = 0. \qquad (7.94)$$

Так как в уравнение (7.94) не входят координаты $x^{r+1'}, \ldots, x^{n'}$, это уравнение также является уравнением *цилиндра*. В случае, когда $c' \neq 0$, и уравнение (7.94) является уравнением эллипсоида в r-плоскости $x^{r+1'} = \ldots = x^{n'} = 0$, поверхность (7.94) называется *эллиптическим цилиндром с* $(r-1)$-*основанием* в случае, когда уравнение (7.94) является уравнением гиперболоида в той же r-плоскости, поверхность (7.94) называется *гиперболическим цилиндром с* $(r-1)$-*основанием*, причем в случае, когда гиперболоид в r-плоскости — гиперболоид индекса l, цилиндр называется *гиперболическим цилиндром индекса* l, в случае, когда уравнение (7.94) является уравнением мнимого эллипсоида в той же r-плоскости, уравнение (7.94) называется уравнением *мнимого цилиндра с* $(r-1)$-*основанием* (при $n = 3$ и $r = 2$ уравнение (7.94) в первых двух случаях является уравнением эллиптического и гиперболического цилиндров 3-пространства).

При $c' \neq 0$ и $r = 1$ уравнение (7.94) принимает вид

$$a_{11}(x^1)^2 + c' = 0,$$

что можно переписать при $\frac{c'}{a_{11}} < 0$ в виде

$$(x^1)^2 = a^2, \tag{7.95}$$

а при $\frac{c'}{a_{11}} > 0$ — в виде

$$(x^1)^2 = -a^2. \tag{7.96}$$

Уравнение (7.95) является совместным уравнением *пары параллельных плоскостей* $x^1 = \pm a$, уравнение (7.96) по аналогии называется уравнением *пары мнимых параллельных плоскостей* $x^1 = \pm ia$.

В случае, когда $c' = 0$, и уравнение (7.94) является уравнением мнимого конуса в r-плоскости $x^{r+1'} = \ldots = x^{n'} = 0$, этому уравнению удовлетворяют только точки $(n-2)$-плоскости $x^{1'} = \ldots = x^{r'} = 0$. В случае, когда $c' = 0$, и уравнение (7.94) является уравнением конуса в той же r-плоскости, поверхность (7.94) называют *конусом с* $(n-r)$*-мерной вершиной* или, короче, с $(n-r)$*-вершиной*; в предыдущем случае это уравнение по аналогии с этим случаем называют уравнением *мнимого конуса с* $(n-r)$*-вершиной*; конус называется *конусом индекса* l, если $l \leqslant r - l$ (случай, когда $l \geqslant r - l$, приводится к этому случаю умножением всех членов уравнения на -1). При $r = n$, когда вершиной конуса является точка, будем называть конус *конусом с точечной вершиной*.

При $c' = 0$ и $r = 2$ уравнение (7.94) принимает вид

$$a_{11}(x^{1'})^2 + a_{22}(x^{2'})^2 = 0, \tag{7.97}$$

т. е. в первом случае его можно переписать в виде

$$\frac{(x^1)^2}{a_1^2} + \frac{(x^2)^2}{a_2^2} = 0, \tag{7.98}$$

а во втором случае — в виде

$$\frac{(x^1)^2}{a_1^2} - \frac{(x^2)^2}{a_2^2} = 0. \tag{7.99}$$

Уравнение (7.99) является совместным уравнением *пары пересекающихся плоскостей*

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^1}{a_1} - \frac{x^2}{a_2} = 0, \\ \frac{x^1}{a_1} + \frac{x^2}{a_2} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.100}$$

уравнение (7.98) по аналогии называется уравнением *пары мнимых пересекающихся плоскостей*

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^1}{a_1} - i\,\frac{x^2}{a_2} = 0, \\ \frac{x^1}{a_1} + i\,\frac{x^2}{a_2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.101}$$

При $c' = 0$ и $r = 1$ уравнение (7.94) принимает вид

$$(x^1)^2 = 0, \tag{7.102}$$

т. е. является уравнением *пары слившихся плоскостей*. Роль плоской вершины при $r = 2$ играет $(n-2)$-плоскость пересечения плоскостей (в случае пар плоскостей (7.98) и (7.99) — $(n-2)$-плоскость $x^1 = x^2 = 0$), при $r = 1$ — плоскость, совпадающая со сливающимися плоскостями (в случае пары плоскостей (7.102) — плоскость $x^1 = 0$).

7.2.14. Обзор типов квадрик. Приведем таблицу типов квадрик с их простейшими уравнениями.

Таблица 7.1

$a_{11}(x^1)^2 + \ldots + a_{nn}(x^n)^2 + c = 0$	эллипсоиды и гиперболоиды
$a_{11}(x^1)^2 + \ldots + a_{nn}(x^n)^2 = 0$	конусы с точечной вершиной
$a_{11}(x^1)^2 + \ldots + a_{n-1,\,n-1}(x^{n-1})^2 + 2b_n x^n = 0$	параболоиды
$a_{11}(x^1)^2 + \ldots + a_{n-1,\,n-1}(x^{n-1})^2 + c = 0$	эллиптические и гиперболические цилиндры с $(n-2)$-основанием

Продолжение табл. 7.1

$a_{11}(x^1)^2+\ldots+a_{n-1,\,n-1}(x^{n-1})^2=0$	конусы с 1-вершиной
$a_{11}(x^1)^2+\ldots+a_{n-2,\,n-2}(x^{n-2})^2+$ $+2b_{n-1}x^{n-1}=0$	параболические цилиндры с $(n-2)$-основанием
$a_{11}(x^1)^2+\ldots+a_{n-2,\,n-2}(x^{n-2})^2+$ $+c=0$	эллиптические и гиперболические цилиндры с $(n-3)$-основанием
$a_{11}(x^1)^2+\ldots+a_{n-2,\,n-2}(x^{n-2})^2=0$	конусы с 2-вершиной
. . . . .	. . . . .
$a_{11}(x^1)^2+\ldots+a_{rr}(x^r)^2+$ $+2b_{r+1}x^{r+1}=0$	параболические цилиндры с r-основанием
$a_{11}(x^1)^2+\ldots+a_{rr}(x^r)^2+c=0$	эллиптические и гиперболические цилиндры с $(r-1)$-основанием
$a_{11}(x^1)^2+\ldots+a_{rr}(x^r)^2=0$	конусы с $(n-r)$-вершиной
. . . . .	. . . . .
$a_{11}(x^1)^2+a_{22}(x^2)^2+2b_3x^3=0$	параболические цилиндры с 2-основанием
$a_{11}(x^1)^2+a_{22}(x^2)^2+c=0$	эллиптические и гиперболические цилиндры с 1-основанием
$a_{11}(x^1)^2+a_{22}(x^2)^2=0$	пары пересекающихся плоскостей
$a_{11}(x^1)^2+2b_2x^2=0$	параболические цилиндры с 1-основанием
$a_{11}(x^1)^2+c=0$	пары параллельных плоскостей
$a_{11}(x^1)^2=0$	пары совпавших плоскостей

В частности, для $n = 2$ приведенная нами таблица принимает вид:

Таблица 7.2

$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + c = 0$	эллипсы и гиперболы
$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 = 0$	пары пересекающихся прямых
$a_{11}(x^1)^2 + 2b_2x^2 = 0$	параболы
$a_{11}(x^1)^2 + c = 0$	пары параллельных прямых
$a_{11}(x^1)^2 = 0$	пары совпавших прямых

Для $n = 3$ эта таблица принимает вид

Таблица 7.3

$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + c = 0$	эллипсоиды и параболоиды
$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 = 0$	конусы
$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + 2b_3x^3 = 0$	параболоиды
$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + c = 0$	эллиптические и гиперболические цилиндры
$a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 = 0$	пары пересекающихся плоскостей
$a_{11}(x^1)^2 + 2b_2x^2 = 0$	параболические цилиндры
$a_{11}(x^1)^2 + c = 0$	пары параллельных плоскостей
$a_{11}(x^1)^2 = 0$	пары совпавших плоскостей

Так как в случае, когда оператор **A** обладает r ненулевыми собственными числами при $1 \leqslant r \leqslant n - 1$, имеется 3 типа квадрик, а при $r = n$ 2 типа квадрик, *в n-пространстве имеется* $3n - 2$ *типов квадрик*; каждый из этих типов

подразделяется на классы, соответствующие подразделению центральных невырожденных квадрик на мнимые и вещественные эллипсоиды и гиперболоиды различных индексов, параболоидов — на эллиптические и гиперболические параболоиды различных индексов, цилиндров — на мнимые эллиптические, гиперболические и параболические цилиндры различных индексов и конусов — на мнимые и вещественные конусы различных индексов.

§ 3. Аффинные преобразования и движения квадрик

7.3.1. Аффинные преобразования квадрик. Так как аффинные преобразования n-пространства выражаются в аффинных координатах теми же формулами, что и преобразования аффинных координат, а при преобразованиях аффинных координат в силу их линейности уравнение второй степени переходит в уравнение той же степени, *аффинные преобразования переводят квадрики в квадрики.*

Если аффинное преобразование, которое мы здесь запишем в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}'\mathbf{x} + \mathbf{a}, \tag{7.103}$$

применено к квадрике (7.5), то эта квадрика перейдет в квадрику $('\mathbf{x}\mathbf{U}^{\mathrm{T}} + \mathbf{a})\mathbf{A}\,(\mathbf{U}'\mathbf{x} + \mathbf{a}) + 2\,(\mathbf{U}'\mathbf{x} + \mathbf{a})\mathbf{b} + c = 0$, уравнение которой можно переписать в виде

$$'\mathbf{x}\,(\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{U})'\mathbf{x} + 2\,(\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{U}'\mathbf{x} + \mathbf{a}\mathbf{A}\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\mathbf{a} + c = 0, \tag{7.104}$$

т. е., если мы запишем это уравнение в виде

$$'\mathbf{x}\mathbf{A}''\mathbf{x} + 2\mathbf{b}''\mathbf{x} + c' = 0, \tag{7.105}$$

оператор $\mathbf{A}'$, вектор $\mathbf{b}'$ и свободный член c' этого уравнения связаны с оператором $\mathbf{A}$ вектором $\mathbf{b}$ и свободным членом c уравнения (7.5) соотношениями

$$\mathbf{A}' = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{U}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{b}), \qquad c' = \mathbf{a}\mathbf{A}\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\mathbf{a} + c. \tag{7.106}$$

Так как всякий эллипсоид (7.52) можно получить аффинным преобразованием (7.62) из сферы (7.61), а произвольный эллипсоид можно получить из эллипсоида (7.52) движением, то *всякие два эллипсоида можно перевести друг*