

Скользящие векторы

§ 1. Скользящие векторы в пространстве

8.1.1. Свободные и скользящие векторы. В главе I мы определили эквивалентность ориентированных отрезков на прямой и в пространстве, причем, как мы видели, каждому классу эквивалентных ориентированных отрезков в пространстве соответствует вектор. В настоящей главе мы будем называть обычные векторы, задание которых равносильно заданию ориентированного отрезка с точностью до эквивалентности в пространстве, т. е. с точностью до перевноса в любую точку пространства, *свободными векторами*,

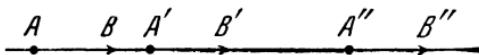


Рис. 8.1.

а ориентированные отрезки, определенные с точностью до эквивалентности на прямой, т. е. с точностью до скольжения вдоль прямой,— *скользящими векторами*.

На рис. 8.1 изображены три эквивалентных скользящих вектора \overrightarrow{AB} , $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{A''B''}$.

Различие между свободными и скользящими векторами имеет важное значение в теоретической механике, так как механическая сила, действие которой не изменяется только при скольжении вдоль линии ее действия, и угловая скорость вращения вокруг некоторой оси, описываются скользящими векторами, а момент силы относительно точки и поступательная скорость описываются свободными векторами.

Будем обозначать скользящие векторы, определенные с точностью до эквивалентности, малыми латинскими буквами жирного шрифта с чертой сверху: \bar{a} , \bar{b} , ...

8.1.2. Эквивалентные системы скользящих векторов.

Будем рассматривать конечные системы скользящих векторов. Две такие системы будем называть *эквивалентными*, если одна из них может быть получена из другой с помощью следующих четырех операций:

- 1°. Перенос скользящего вектора вдоль его прямой.
- 2°. Сложение скользящих векторов с общим началом по правилу параллелограмма.
- 3°. Разложение скользящего вектора на несколько скользящих векторов с общим началом по тому же правилу.
- 4°. Прибавление нулевого вектора с началом в любой точке пространства ¹.

В настоящей главе мы найдем необходимое и достаточное условие эквивалентности двух систем скользящих векторов в n -пространстве.

8.1.3. Скользящие векторы на сфере. По аналогии со скользящими векторами в пространстве можно определить *скользящие векторы на сфере*, т. е. ориентированные дуги больших окружностей сферы, определенные с точностью до скольжения вдоль большой окружности. Будем называть *эквивалентными* скользящими векторами на сфере такие скользящие векторы на сфере, которые находятся на одной большой окружности и имеют равные длины и совпадающие направления на большой окружности.

Будем обозначать скользящий вектор на сфере с началом в точке A и с концом в точке B символом \bar{AB} , а скользящие векторы на сфере с точностью до эквивалентности — малыми латинскими буквами жирного шрифта с дугой сверху \bar{a} , \bar{b} , ...

На рис. 8.2 изображены три эквивалентных скользящих вектора \bar{AB} , $\bar{A'B'}$ и $\bar{A''B''}$ на сфере.

Определим сумму двух скользящих векторов \bar{OA} и \bar{OB} на сфере, имеющих общее начало, как такой скользящий

вектор \overrightarrow{OC} на сфере с тем же началом O , конец C которого является точкой пересечения больших окружностей AB' и BA' ,

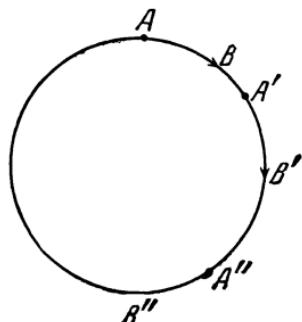


Рис. 8.2.

соединяющих концы A и B данных векторов с точками B' и A' больших окружностей векторов \overrightarrow{OB} и \overrightarrow{OA} , находящихся от точки O на расстоянии четверти окружности (рис. 8.3, а). Заметим, что векторы \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} , $\overrightarrow{AB'}$ и $\overrightarrow{BA'}$ проектируются из центра S сферы на касательную плоскость к сфере в точке O соответственно в отрезки \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} и лучи \overline{AC} и \overline{BC} , параллельные отрезкам \overline{OB}

и \overline{OA} , откуда следует, что отрезок \overline{OC} является диагональю параллелограмма, построенного на отрезках \overline{OA} и \overline{OB} (рис. 8.3, б). Обозначим сумму скользящих векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} через $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ и будем называть скользящий вектор $\overrightarrow{OO'}$,

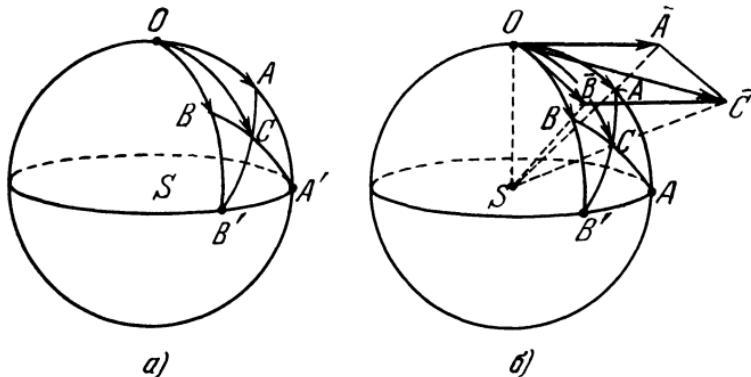


Рис. 8.3.

конец которого совпадает с началом, нулевым вектором $\mathbf{0}$. Скользящий вектор \overrightarrow{OD} , расположенный на окружности вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ и обладающий тем свойством,

что точка O — середина дуги \widetilde{AD} , будем обозначать $-\check{\mathbf{a}}$. Тогда сложение скользящих векторов на сфере будет удовлетворять тем же аксиомам сложения векторов, что и сложение ориентированных отрезков по правилу параллелограмма, определенным нами в 1.2.2, т. е.

1°. Каждым двум векторам $\check{\mathbf{a}}$ и $\check{\mathbf{b}}$ поставлен в соответствие определенный вектор

$$\check{\mathbf{c}} = \check{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{b}}. \quad (8.1)$$

2°. Сложение векторов *коммутативно*, т. е.

$$\check{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{b}} = \check{\mathbf{b}} + \check{\mathbf{a}}, \quad (8.2)$$

3°. Сложение векторов *ассоциативно*, т. е.

$$(\check{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{b}}) + \check{\mathbf{c}} = \check{\mathbf{a}} + (\check{\mathbf{b}} + \check{\mathbf{c}}), \quad (8.3)$$

4°. Существует *нулевой вектор* $\check{\mathbf{o}}$ такой, что для всякого вектора $\check{\mathbf{a}}$

$$\check{\mathbf{a}} + \check{\mathbf{o}} = \check{\mathbf{a}}. \quad (8.4)$$

5°. Для всякого вектора $\check{\mathbf{a}}$ имеется *противоположный вектор* $-\check{\mathbf{a}}$, для которого

$$\check{\mathbf{a}} + (-\check{\mathbf{a}}) = \check{\mathbf{o}}. \quad (8.5)$$

Две копечные системы скользящих векторов на сфере мы будем называть *эквивалентными*, если одна из них может быть получена из другой с помощью следующих четырех операций.

1°. Поворот скользящего вектора на сфере по его большой окружности.

2. Сложение скользящих векторов на сфере с общим началом по указанному выше правилу.

3°. Разложение скользящего вектора на сфере на несколько скользящих векторов на сфере с общим началом по тому же правилу.

4°. Прибавление нулевого вектора с началом в любой точке сферы².

Будем называть *модулем* $|\check{\mathbf{a}}|$ скользящего вектора $\check{\mathbf{a}} = \widetilde{AB}$ длину дуги \widetilde{AB} . В дальнейшем будем считать радиус сферы равным 1. Поэтому модуль $|\check{\mathbf{a}}|$ вектора $\check{\mathbf{a}}$ связан

с модулем вектора \bar{a} , являющегося проекцией вектора \dot{a} из центра сферы на касательную плоскость к сфере в начале вектора \dot{a} , соотношением

$$|\bar{a}| = \operatorname{tg} |\dot{a}|. \quad (8.6)$$

8.1.4. Теоремы о скользящих векторах. Будем называть пару скользящих векторов пространства с равными длинами и противоположными направлениями *парой векторов*. Расстояние между прямыми двух векторов пары будем называть *плечом пары*.

Для скользящих векторов в пространстве имеют место следующие три теоремы, доказывающиеся точно так же, как аналогичные теоремы для сил в теоретической механике.

1°. Система, состоящая из двух параллельных скользящих векторов, эквивалентна одному скользящему вектору, приложенному в точке отрезка, соединяющего точки

приложения векторов, делящей этот отрезок в отношении, обратном отношению величин этих векторов (внутренним образом, если векторы направлены в одну сторону, и внешним образом, если векторы направлены в противоположные стороны).

2°. Пара векторов эквивалентна другой, полученной из первой пары поворотом этой пары в ее плоскости или переносом этой пары в параллельную плоскость.

3°. Пара векторов эквивалентна другой паре векторов, векторы которой получены из векторов первой пары умножением на какое-нибудь положительное число, а плечо которой получено из плеча первой пары делением на это же число³.

Из правила сложения векторов на сфере и из теоремы 2° следует, что задание скользящего вектора \overrightarrow{AB} на сфере равносильно заданию пары скользящих векторов пространства, состоящей из проекции вектора \overrightarrow{AB} из центра сферы на касательную плоскость и из противоположного вектора, приложенного в центре сферы (рис. 8.4): в силу

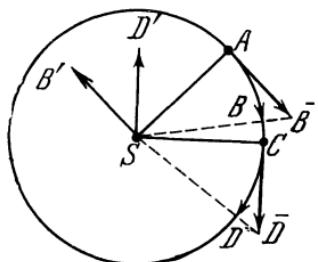


Рис. 8.4.

правила сложения векторов на сфере сумме векторов на сфере соответствует сумма соответствующих векторов пар, а в силу теоремы 2°, эквивалентным векторам \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} , соответствуют эквивалентные пары векторов.

§ 2. Эквивалентность систем скользящих векторов

8.2.1. Главный вектор и главный момент системы. Рассмотрим систему скользящих векторов \bar{a}_α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) n -пространства с началами в точках $A_\alpha(x_\alpha)$. Каждому скользящему вектору \bar{a}_α соответствует свободный вектор a_α , определяемый всеми ориентированными отрезками, эквивалентными этому скользящему вектору.

Будем называть *главным вектором* системы скользящих векторов вектор

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_N = \sum_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha}. \quad (8.7)$$

Так как векторы \mathbf{a}_α и, следовательно, вектор \mathbf{a} — свободные векторы, они не зависят от начальной точки O векторов $x_\alpha = \overline{OA}_\alpha$.

Будем называть *главным моментом* системы линейный оператор

$$\mathbf{M} = \sum_{\alpha} (\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\alpha - \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\alpha). \quad (8.8)$$

Главный момент системы, очевидно, зависит от выбора точки O и при переходе от точки O к точке $O'(x)$ преобразуется по закону:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}. \quad (8.9)$$

В самом деле, при переходе от точки O к точке O' радиус-векторы \mathbf{x}_α следует заменить радиус-векторами $\mathbf{x}'_\alpha = \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}$ и

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &= \sum_{\alpha} (\mathbf{x}'_\alpha \cdot \mathbf{a}_\alpha - \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x}'_\alpha) = \sum_{\alpha} ((\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}_\alpha - \mathbf{a}_\alpha \cdot (\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x})) = \\ &= \sum_{\alpha} (\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\alpha - \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\alpha) - \mathbf{x} \cdot \sum_{\alpha} \mathbf{a}_\alpha + \sum_{\alpha} \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{M} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (8.10)$$