

правила сложения векторов на сфере сумме векторов на сфере соответствует сумма соответствующих векторов пар, а в силу теоремы 2°, эквивалентным векторам  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$ , соответствуют эквивалентные пары векторов.

## § 2. Эквивалентность систем скользящих векторов

**8.2.1. Главный вектор и главный момент системы.** Рассмотрим систему скользящих векторов  $\bar{a}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, N$ )  $n$ -пространства с началами в точках  $A_\alpha(x_\alpha)$ . Каждому скользящему вектору  $\bar{a}_\alpha$  соответствует свободный вектор  $a_\alpha$ , определяемый всеми ориентированными отрезками, эквивалентными этому скользящему вектору.

Будем называть *главным вектором* системы скользящих векторов вектор

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_N = \sum_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha}. \quad (8.7)$$

Так как векторы  $\mathbf{a}_\alpha$  и, следовательно, вектор  $\mathbf{a}$  — свободные векторы, они не зависят от начальной точки  $O$  векторов  $x_\alpha = \overline{OA}_\alpha$ .

Будем называть *главным моментом* системы линейный оператор

$$\mathbf{M} = \sum_{\alpha} (\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\alpha - \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\alpha). \quad (8.8)$$

Главный момент системы, очевидно, зависит от выбора точки  $O$  и при переходе от точки  $O$  к точке  $O'(x)$  преобразуется по закону:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}. \quad (8.9)$$

В самом деле, при переходе от точки  $O$  к точке  $O'$  радиус-векторы  $\mathbf{x}_\alpha$  следует заменить радиус-векторами  $\mathbf{x}'_\alpha = \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}$  и

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &= \sum_{\alpha} (\mathbf{x}'_\alpha \cdot \mathbf{a}_\alpha - \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x}'_\alpha) = \sum_{\alpha} ((\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}_\alpha - \mathbf{a}_\alpha \cdot (\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x})) = \\ &= \sum_{\alpha} (\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\alpha - \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\alpha) - \mathbf{x} \cdot \sum_{\alpha} \mathbf{a}_\alpha + \sum_{\alpha} \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x} = \mathbf{M} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Будем называть точку  $O$ , для которой вычислен оператор  $M$ , точкой отнесения главного момента.

При переходе от системы векторов к эквивалентной системе главный вектор и главный момент системы не изменяются. В самом деле, при переносе векторов  $\bar{a}_\alpha$  вдоль их прямых и при сложении и разложении этих векторов сумма  $a$  векторов  $a_\alpha$  не изменяется.

С другой стороны, при переносе скользящего вектора  $\bar{a}_\alpha$  вдоль его прямой оператор  $x_\alpha \cdot a_\alpha - a_\alpha \cdot x_\alpha$  заменяется на оператор  $(x_\alpha + t a_\alpha) \cdot a_\alpha - a_\alpha \cdot (x_\alpha + t a_\alpha)$ , но, так как  $t a_\alpha \cdot a_\alpha = a_\alpha \cdot t a_\alpha$ , этот оператор равен оператору  $x_\alpha \cdot a_\alpha - a_\alpha \cdot x_\alpha$ .

Далее, так как

$$x_\alpha \cdot (a_\alpha + b_\alpha) - (a_\alpha + b_\alpha) \cdot x_\alpha = x_\alpha \cdot a_\alpha - a_\alpha \cdot x_\alpha + x_\alpha \cdot b_\alpha - b_\alpha \cdot x_\alpha, \quad (8.11)$$

при сложении или разложении скользящих векторов  $\bar{a}_\alpha$  происходит соответственное сложение или разложение операторов  $x_\alpha \cdot a_\alpha - a_\alpha \cdot x_\alpha$ .

Поэтому при переносе скользящих векторов вдоль их прямых и при сложении и разложении этих векторов оператор  $M$ , равный сумме операторов  $x_\alpha \cdot a_\alpha - a_\alpha \cdot x_\alpha$ , не изменяется.

И, наконец, прибавление к системе нулевого вектора не изменяет главного вектора, а, так как момент нулевого вектора является нулевым оператором, прибавление к системе нулевого вектора не изменяет и главного момента.

В случае 3-пространства задание линейного оператора  $x_\alpha \cdot a_\alpha - a_\alpha \cdot x_\alpha$  равносильно заданию вектора  $[x_\alpha a_\alpha]$ . Поэтому в этом случае роль оператора  $M$  играет вектор  $m = \sum_\alpha [x_\alpha a_\alpha]$ , также называемый *главным моментом системы скользящих векторов*<sup>4</sup>.

**8.2.2. Главный момент системы скользящих векторов на сфере.** Рассмотрим теперь систему скользящих векторов  $\bar{a}_\alpha (\alpha = 1, 2, \dots, N)$  на сфере с началами в точках  $A_\alpha (x_\alpha)$ . За начальную точку  $O$  векторов  $x_\alpha = \overline{OA}_\alpha$  будем считать центр сферы. Каждому скользящему вектору  $\bar{a}_\alpha$  на сфере соответствует скользящий вектор  $\bar{a}_\alpha$  пространства,

являющийся проекцией вектора  $\bar{a}_\alpha$  из центра сферы на касательную плоскость в точке  $A_\alpha$  сферы и свободный вектор  $a_\alpha$ , определяемый всеми ориентированными отрезками, эквивалентными вектору  $\bar{a}_\alpha$ . Для системы скользящих векторов на сфере также можно определить оператор (8.8), который мы будем называть *главным моментом* системы скользящих векторов на сфере.

*При переходе от системы скользящих векторов на сфере к эквивалентной системе главный момент системы не изменяется.* В самом деле, при повороте вектора  $\bar{a}_\alpha$  вдоль его большой окружности на сферическое расстояние  $\varphi_\alpha$  векторы  $a_\alpha$  и  $x_\alpha$  перейдут, соответственно, в векторы

$$\overset{\circ}{a}_\alpha = |a_\alpha| \left( \frac{\overset{\circ}{a}_\alpha}{|a_\alpha|} \cos \varphi_\alpha + x_\alpha \sin \varphi_\alpha \right) \quad (8.12)$$

и

$$\overset{\circ}{x}_\alpha = - \frac{\overset{\circ}{a}_\alpha}{|a_\alpha|} \sin \varphi_\alpha + x_\alpha \cos \varphi_\alpha. \quad (8.13)$$

Но

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{x}_\alpha \cdot \overset{\circ}{a}_\alpha - \overset{\circ}{a}_\alpha \cdot \overset{\circ}{x}_\alpha &= - a_\alpha \cdot \frac{a_\alpha}{|a_\alpha|} \cos \varphi_\alpha \sin \varphi_\alpha - a_\alpha \cdot x_\alpha \sin^2 \varphi_\alpha + \\ &\quad + x_\alpha \cdot a_\alpha \cos^2 \varphi_\alpha + |a_\alpha| x_\alpha \cdot x_\alpha \cos \varphi_\alpha \sin \varphi_\alpha + \\ &+ a_\alpha \cdot \frac{a_\alpha}{|a_\alpha|} \cos \varphi_\alpha \sin \varphi_\alpha + x_\alpha \cdot a_\alpha \sin^2 \varphi_\alpha - a_\alpha \cdot x_\alpha \cos^2 \varphi_\alpha - \\ &- x_\alpha \cdot |a_\alpha| x_\alpha \cos \varphi_\alpha \sin \varphi_\alpha = x_\alpha \cdot a_\alpha (\cos^2 \varphi_\alpha + \sin^2 \varphi_\alpha) - \\ &- a_\alpha \cdot x_\alpha (\cos^2 \varphi_\alpha + \sin^2 \varphi_\alpha) = x_\alpha \cdot a_\alpha - a_\alpha \cdot x_\alpha. \end{aligned} \quad (8.14)$$

С другой стороны, как мы видели, при сложении или разложении векторов  $\bar{a}_\alpha$  происходит, соответственно, сложение или разложение векторов  $\bar{a}_\alpha$ , а при сложении или разложении векторов  $\bar{a}_\alpha$  происходит сложение или разложение операторов  $x_\alpha \cdot a_\alpha - a_\alpha \cdot x_\alpha$ .

**8.2.3. Главная ось системы.** *Геометрическое место точек  $n$ -пространства, обладающих тем свойством, что при выборе этих точек в качестве точек отнесения главного момента, главный вектор системы является собственным вектором главного момента системы, соответствующим нулевому собственному числу, является прямой линией.*

Найдем сначала точку  $O'$  ( $x_0$ ), обладающую указанным свойством, для которой вектор  $x_0$  перпендикулярен вектору  $a$ .

Тогда

$$M'a = (M - x_0 \cdot a + a \cdot x_0)a = Ma - x_0 \cdot a^2 = \mathbf{0} \quad (8.15)$$

и, следовательно,

$$x_0 = \frac{Ma}{a^2}. \quad (8.16)$$

Если мы сместим точку  $O$  в направлении вектора  $a$ , то главный момент  $M$  не изменится, так как при  $x=ta$  главный момент  $M$  перейдет в  $M' = M - ta \cdot a + a \cdot ta = M$ . Поэтому при смещении из найденной нами точки  $O'$  в направлении вектора  $a$  оператор  $M$  не изменится и во всех этих точках  $M'a = \mathbf{0}$ .

Таким образом, указанным свойством обладают все точки прямой  $x = x_0 + ta$ .

Если бы некоторая точка, не лежащая на этой прямой, обладала бы указанным свойством, то, проводя через эту точку прямую в направлении  $a$ , мы получили бы прямую, состоящую из точек, обладающих указанным свойством. На этой прямой также имеется точка, радиус-вектор которой перпендикулярен вектору  $a$ , отличная от найденной нами точки  $O'(x_0)$ . Но, как мы видели, точка  $O'(x_0)$  — единственная точка с радиус-вектором  $x$ , перпендикулярным вектору  $a$ , обладающая указанным свойством.

Найденная нами прямая называется *главной осью* системы.

**8.2.4. Геометрический смысл оператора главного момента.** Выберем некоторую точку  $O$  и заменим каждый скользящий вектор  $\bar{a}_\alpha$  эквивалентной ему системой, состоящей из равного ему вектора, с началом в точке  $O$ , и из пары векторов, состоящей из данного вектора, и вектора с началом в точке  $O$ .

Далее преобразуем все полученные пары в эквивалентные им пары, состоящие из скользящих векторов с началами в точке  $O$  и из скользящих векторов с началами в точках сферы единичного радиуса с центром в точке  $O$ , направленных по касательным к этой сфере. Наша система скользящих векторов перейдет в эквивалентную систему, если

поворнуть каждую из этих пар на произвольный угол в ее плоскости. При этом вектор пары, находящийся на сфере, будет поворачиваться вдоль большой окружности, которой он касается.

Если на сфере задана точка  $A(x)$ , то нашу систему можно преобразовать в эквивалентную ей систему следующим образом: каждую пару векторов можно повернуть таким образом, чтобы вектор этой пары, находящийся на сфере, был бы приложен в некоторой точке диаметральной плоскости, перпендикулярной вектору  $x$ ; далее векторы этой пары представляются в виде суммы вектора, касательного к большой окружности, проходящей через точку  $A$ , и перпендикулярного ему вектора, расположенного в диаметральной плоскости.

Далее пары векторов, содержащие векторы, касающиеся больших окружностей, проходящих через точку  $A$ , повернем таким образом, чтобы векторы этих пар, касающиеся сферы, имели бы начало в точке  $A$ .

Сумму этих векторов с началом в точке  $A$  будем называть результатом приведения нашей системы к точке  $A$  и обозначать через  $a_A$ .

*Геометрический смысл оператора главного момента системы  $M$  состоит в том, что результат приведения системы к точке  $A(x)$  сферы выражается через результат применения оператора  $M$  к вектору  $x$  по формуле*

$$a_A = -Mx. \quad (8.17)$$

В самом деле, пусть скользящий вектор  $\bar{a}_\alpha$  нашей системы имеет начало в точке  $A_\alpha(x_\alpha)$  сферы. Тогда большая окружность, которой касается вектор  $a_\alpha$ , высекается из сферы 2-плоскостью, определяемой векторами  $x_\alpha$  и  $a_\alpha$  (рис. 8.5).

Если повернуть эту большую окружность на угол  $\varphi_\alpha$ , то векторы  $a_\alpha$  и  $x_\alpha$  перейдут соответственно в векторы (8.12)

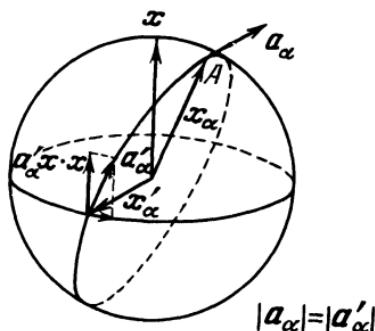


Рис. 8.5.

и (8.13). Выберем угол  $\varphi_\alpha$  таким образом, чтобы вектор  $\mathbf{x}'_\alpha$  был бы перпендикулярен вектору  $\mathbf{x}$ . Этот угол удовлетворяет условию

$$\mathbf{x}'_\alpha \cdot \mathbf{x} = -\frac{\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{a}_\alpha|} \sin \varphi_\alpha + \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x} \cos \varphi_\alpha = 0, \quad (8.18)$$

из которого находим

$$\operatorname{tg} \varphi_\alpha = \frac{\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{a}_\alpha|} \cdot |\mathbf{a}_\alpha| \quad (8.19)$$

и, следовательно,

$$\sin \varphi_\alpha = \frac{\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x} \cdot |\mathbf{a}_\alpha|}{\sqrt{(\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x})^2 |\mathbf{a}_\alpha|^2 + (\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x})^2}}, \quad \cos \varphi_\alpha = \frac{\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x}}{\sqrt{(\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x})^2 |\mathbf{a}_\alpha|^2 + (\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x})^2}}. \quad (8.20)$$

Подставляя полученные значения  $\sin \varphi_\alpha$  и  $\cos \varphi_\alpha$  в формулы (8.12) и (8.13), мы перепишем их в виде

$$\mathbf{a}'_\alpha = \frac{\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_\alpha + \mathbf{a}_\alpha^2 \cdot \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\alpha}{\sqrt{(\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x})^2 |\mathbf{a}_\alpha|^2 + (\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x})^2}} \quad (8.21)$$

и

$$\mathbf{x}'_\alpha = \frac{-\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x}}{\sqrt{(\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x})^2 |\mathbf{a}_\alpha|^2 + (\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x})^2}}. \quad (8.22)$$

Составляющая вектора  $\mathbf{a}'_\alpha$ , касающаяся большой окружности, проходящей через точку  $A$ , равная прямогульной проекции вектора  $\mathbf{a}'_\alpha$  на направление вектора  $\mathbf{x}$ , имеет вид

$$\mathbf{a}'_\alpha \cdot \mathbf{x} = \frac{(\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x})^2 + \mathbf{a}_\alpha^2 \cdot (\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x})^2}{\sqrt{(\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x})^2 |\mathbf{a}_\alpha|^2 + (\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x})^2}} \cdot \mathbf{x} = \sqrt{(\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x})^2 |\mathbf{a}_\alpha|^2 + (\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x})^2} \cdot \mathbf{x}. \quad (8.23)$$

Поворачивая большую окружность, которой касается последний вектор, на прямой угол, мы переведем этот вектор в вектор  $\bar{\mathbf{a}}_{\alpha A}$  с началом в точке  $A$ .

Вектор  $\mathbf{a}_{\alpha A}$  имеет ту же длину, что и вектор  $\mathbf{a}'_\alpha \cdot \mathbf{x}$ , но направлен по прямой вектора  $\mathbf{x}'_\alpha$  в направлении, противоположном направлению вектора  $\mathbf{x}'_\alpha$  (рис. 8.6). Поэтому  $\mathbf{a}_{\alpha A} = -\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'_\alpha = -\mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}$ . Результат приведения

нашей системы в точку  $A$  равен сумме векторов  $\mathbf{a}_{\alpha A}$ , т. е.

$$\mathbf{a}_A = \sum_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha A} = \sum_{\alpha} (-\mathbf{x}_{\alpha} \cdot \mathbf{a}_{\alpha} \mathbf{x} + \mathbf{a}_{\alpha} \cdot \mathbf{x}_{\alpha} \mathbf{x}).$$

Но этот вектор совпадает с вектором  $-\mathbf{Mx}$ .

Аналогичный смысл имеет главный момент системы скользящих векторов на сфере. Если на  $n$ -сфере задана точка  $A(x)$ , то систему скользящих векторов на сфере можно преобразовать в эквивалентную ей систему следующим образом: каждый вектор на сфере можно сместить по его большой окружности таким образом, чтобы его началом была точка большой  $(n - 1)$ -сферы, полярной точке  $A$ . Далее этот вектор на сфере представляется в виде суммы векторов на сфере, большая окружность которого проходит через точку  $A$  и перпендикулярного ему вектора, расположенного на большой  $(n - 1)$ -сфере, полярной точке  $A$ .

Далее векторы, расположенные на больших окружностях, проходящих через точку  $A$ , смещаются вдоль них таким образом, чтобы началом этих векторов была точка  $A$ .

Сумму этих скользящих векторов на сфере с началом в точке  $A$  будем называть *результатом приведения нашей системы к точке  $A$*  и обозначать через  $\bar{\mathbf{a}}_A$ , а соответственный скользящий вектор в плоскости, касающейся сферы в точке  $A$ , будем обозначать через  $\bar{\mathbf{a}}_A$ .

Так же как в случае скользящих векторов пространства, доказывается, что *геометрический смысл оператора главного момента  $\mathbf{M}$  системы скользящих векторов на сфере состоит в том, что вектор  $\mathbf{a}_A$ , соответствующий результату приведения системы скользящих векторов на сфере к точке  $A(x)$  сферы, выражается через результат применения оператора  $\mathbf{M}$  и вектору по формуле (8.17) <sup>5</sup>.*

**8.2.5. Собственные векторы кососимметрического оператора.** Для того чтобы для всякой системы скользящих

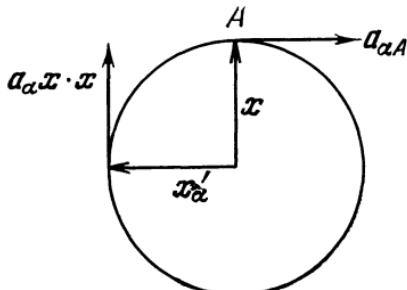


Рис. 8.6.

векторов пространства или на сфере построить наиболее простую эквивалентную ей систему скользящих векторов, так называемую *каноническую систему*, нам необходимо изучить свойства собственных векторов кососимметрического оператора.

Заметим, что *квадрат*  $\mathbf{A}^2$  *кососимметрического оператора*  $\mathbf{A}$  *является симметрическим оператором*, так как из  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$  следует, что  $(\mathbf{A}^2)^T = (\mathbf{A}^T)^2 = (-\mathbf{A})^2 = \mathbf{A}^2$ .

Из того, что кососимметрический оператор  $\mathbf{A}$  обладает свойством (2.53), вытекает, что для любого вектора  $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}\mathbf{Ax} = 0. \quad (8.24)$$

Покажем, что *если кососимметрический оператор*  $\mathbf{A}$  *имеет вещественное собственное число, то оно равно нулю*. В самом деле, пусть  $\mathbf{Al} = \lambda \mathbf{l}$ , где  $\mathbf{l}$  — вещественный ненулевой вектор, а  $\lambda$  — вещественное число. Тогда в силу (8.24)  $|\mathbf{l}\mathbf{Al}| = \lambda |\mathbf{l}|^2 = 0$  и, так как  $|\mathbf{l}|^2 \neq 0$ , отсюда следует, что  $\lambda = 0$ .

Из того, что квадрат кососимметрического оператора является симметрическим оператором, следует, что *если кососимметрический оператор*  $\mathbf{A}$  *имеет комплексное собственное число, то оно чисто мнимо*. В самом деле, собственные числа оператора  $\mathbf{A}^2$  являются квадратами собственных чисел оператора  $\mathbf{A}$ . Но, как мы видели в седьмой главе, все собственные числа симметрического оператора вещественны, а квадрат комплексного числа, не являющегося вещественным числом, веществен только в том случае, когда комплексное число чисто мнимо.

Поэтому ненулевые собственные числа кососимметрического оператора имеют вид  $\pm i\lambda_a$  ( $a = 1, 2, \dots, m$ ), где  $\lambda_a$  — вещественные числа, и если собственное число  $i\lambda_a$  соответствует собственному вектору  $\mathbf{l}_{2a-1} + i\mathbf{l}_{2a}$ , мы получаем, что

$$\mathbf{A}(\mathbf{l}_{2a-1} + i\mathbf{l}_{2a}) = i\lambda_a(\mathbf{l}_{2a-1} + i\mathbf{l}_{2a}), \quad (8.25)$$

что равносильно двум вещественным равенствам

$$\mathbf{Al}_{2a-1} = -\lambda_a \mathbf{l}_{2a}, \quad \mathbf{Al}_{2a} = \lambda_a \mathbf{l}_{2a-1}. \quad (8.26)$$

Векторы  $\mathbf{l}_{2a-1}$  и  $\mathbf{l}_{2a}$  являются вещественными векторами. Эти векторы перпендикулярны, так как в силу (8.24)

$$\mathbf{l}_{2a}\mathbf{Al}_{2a} = \lambda_a \mathbf{l}_{2a-1}\mathbf{l}_{2a} = 0. \quad (8.27)$$

Эти векторы имеют равные модули, так как из равенств

$$\mathbf{l}_{2a-1}\mathbf{Al}_{2a} = -\mathbf{l}_{2a}\mathbf{Al}_{2a-1} = \lambda_a \mathbf{l}_{2a-1}^2 = \lambda_a \mathbf{l}_{2a}^2 \quad (8.28)$$

следует равенство  $\mathbf{l}_{2a-1}^2 = \mathbf{l}_{2a}^2$ .

Из равенств (8.26) следует, что оператор  $\mathbf{A}$  переводит всякую линейную комбинацию векторов  $\mathbf{l}_{2a-1}$  и  $\mathbf{l}_{2a}$  в некоторую другую линейную комбинацию этих же векторов, т. е. векторы  $\mathbf{l}_{2a-1}$  и  $\mathbf{l}_{2a}$  определяют инвариантную 2-плоскость оператора  $\mathbf{A}$ .

Из равенств (8.26) следует, что

$$\mathbf{A}^2\mathbf{l}_{2a-1} = -\lambda_a^2\mathbf{l}_{2a-1}, \quad \mathbf{A}^2\mathbf{l}_{2a} = -\lambda_a^2\mathbf{l}_{2a}, \quad (8.29)$$

т. е. векторы  $\mathbf{l}_{2a-1}$  и  $\mathbf{l}_{2a}$ , а следовательно, и все их линейные комбинации являются собственными векторами оператора  $\mathbf{A}^2$ . Поэтому, в силу свойств собственных векторов симметрических векторов, инвариантные 2-плоскости кососимметрического оператора, соответствующие неравным числам  $\lambda_a$ , вполне перпендикулярны.

Действие оператора  $\mathbf{A}$  в этой инвариантной плоскости состоит в том, что вектор  $\alpha\mathbf{l}_{2a-1} + \beta\mathbf{l}_{2a}$  переходит в вектор

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{l}_{2a-1} + \beta\mathbf{l}_{2a}) = \alpha\mathbf{Al}_{2a-1} + \beta\mathbf{Al}_{2a} = \lambda_a(\beta\mathbf{l}_{2a-1} - \alpha\mathbf{l}_{2a}). \quad (8.30)$$

Так как  $(\alpha\mathbf{l}_{2a-1} + \beta\mathbf{l}_{2a})(\beta\mathbf{l}_{2a-1} - \alpha\mathbf{l}_{2a}) = \alpha\beta(\mathbf{l}_{2a-1}^2 - \mathbf{l}_{2a}^2) = 0$ ,

это действие представляет собой произведение поворота векторов на прямой угол в направлении от  $\mathbf{l}_{2a}$  к  $\mathbf{l}_{2a-1}$  и умножения векторов на  $\lambda_a$ .

Из этих свойств вытекает, что если  $\mathbf{e}_{2a-1}$  и  $\mathbf{e}_{2a}$  — взаимно перпендикулярные единичные векторы, обладающие тем свойством, что комплексные векторы  $\mathbf{e}_{2a-1} \pm i\mathbf{e}_{2a}$  являются собственными векторами кососимметрического оператора  $\mathbf{A}$ , этот оператор можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = & \lambda_1(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1) + \lambda_2(\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_3) + \dots \\ & \dots + \lambda_m(\mathbf{e}_{2m-1} \cdot \mathbf{e}_{2m} - \mathbf{e}_{2m} \cdot \mathbf{e}_{2m-1}). \end{aligned} \quad (8.31)$$

**8.2.6. Каноническая система векторов.** Рассмотрим систему пар скользящих векторов с началами в точках сферы и в ее центре, оставшуюся после выделения из нашей системы результата ее приведения к точке  $A(\mathbf{x})$ .

Все векторы оставшейся системы расположены в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{x}$ .

Для того чтобы результат приведения оставшейся системы к точке  $B(y)$ , являющейся одной из точек пересечения плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{x}$  с большой окружностью, которой касается результат приведения системы к точке  $A(x)$ , был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы вектор  $\mathbf{x}$  находился бы в инвариантной 2-плоскости оператора  $M$ .

В самом деле, для того чтобы получить главный момент оставшейся системы, достаточно вычесть из главного момента  $M$  всей системы главный момент пары векторов, состоящей из вектора  $a_A$  с началом в точке  $A$  и вектора  $-a_A$  с началом в центре  $O$  сферы.

Момент этой пары относительно точки  $O$  равен  $\mathbf{x} \cdot a_A - -a_A \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x} \cdot M\mathbf{x} + M\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ . Поэтому главный момент оставшейся системы равен  $M + \mathbf{x} \cdot M\mathbf{x} - M\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ .

За радиус-вектор точки  $B$  можно принять единичный вектор, коллинеарный с вектором  $a_A$ . Поэтому условие равенства нулю результата приведения оставшейся системы в точку  $B$  имеет вид

$$(M + \mathbf{x} \cdot M\mathbf{x} - M\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})M\mathbf{x} =$$

$$= M^2\mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot (M\mathbf{x})^2 - M\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}M\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (8.32)$$

или, так как  $\mathbf{x}M\mathbf{x} = 0$ , это условие имеет вид

$$M^2\mathbf{x} = - (M\mathbf{x})^2\mathbf{x}, \quad (8.33)$$

вектор  $\mathbf{x}$  должен быть собственным вектором оператора  $M^2$ , т. е. должен лежать в инвариантной 2-плоскости оператора  $M$ .

Обратно, если вектор  $\mathbf{x}$  лежит в инвариантной 2-плоскости оператора  $M^2$ , то  $M\mathbf{x} = -\lambda\mathbf{y}$ ,  $M\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$  и, следовательно,  $M^2\mathbf{x} = -\lambda M\mathbf{y} = -\lambda^2\mathbf{x}$  и  $|M\mathbf{x}| = |-\lambda\mathbf{y}| = \lambda$ , т. е. и вектор  $M^2\mathbf{x}$  и вектор  $-(M\mathbf{x})^2\mathbf{x}$  равны вектору  $-\lambda^2\mathbf{x}$ . Поэтому в этом случае  $(M + \mathbf{x} \cdot M\mathbf{x} - M\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , т. е. результат приведения оставшейся системы в точку  $B$  равен нулю.

Докажем теперь, что всякая система скользящих векторов  $n$ -пространства эквивалентна некоторой канонической системе, состоящей из вектора, равного главному вектору канонической системы, направленного по главной оси данной системы, и из пар векторов, расположенных во вполне

ортогональных 2-плоскостях, вполне ортогональных главной оси системы.

В самом деле, выберем некоторую точку  $O$  на главной оси данной системы, заменим каждый скользящий вектор  $\bar{a}_\alpha$  данной системы системой, состоящей из равного ему скользящего вектора с началом в точке  $O$ , и из пары векторов, состоящей из данного вектора и вектора с началом в точке  $O$ .

Складывая все векторы  $\bar{a}_\alpha$  с началом в точке  $O$ , мы получим вектор  $a$ , равный главному вектору системы  $a$ , направленный по главной оси системы.

Далее преобразуем все полученные пары в эквивалентные им пары, состоящие из векторов с началами в точке  $O$  и в точках сферы единичного радиуса с центром в точке  $O$ .

Приводя систему этих пар векторов к точке  $A(x)$  сферы, расположенной на большой окружности, являющейся пересечением сферы с инвариантной 2-плоскостью оператора  $M$ , проходящей через точку  $O$ , мы получим пару векторов с началами в точках  $A$  и  $O$ .

Так как результат приведения системы к точке  $B(y)$ , расположенной на той же большой окружности в точке пересечения этой окружности с плоскостью, перпендикулярной вектору  $x$ , равен нулю, оставшаяся система векторов целиком расположена в  $(n - 2)$ -плоскости, перпендикулярной обоим векторам  $x$  и  $y$ , т. е. вполне перпендикулярной инвариантной 2-плоскости оператора  $M$ , определяемой векторами  $x$  и  $y$ .

Повторяя этот процесс, мы получим другую пару векторов в одной из инвариантных 2-плоскостей оператора  $M$ . Будем повторять этот процесс до тех пор, пока не исчерпаем эти инвариантные 2-плоскости.

Так как вектор  $a$  является собственным вектором оператора  $M$ , соответствующим нулевому собственному числу, он перпендикулярен всем его инвариантным 2-плоскостям.

Максимальное число инвариантных 2-плоскостей, вполне перпендикулярных друг другу, при нечетном  $n$  равно  $\frac{n-1}{2}$ , а при четном  $n$  в случае, когда  $a \neq o$ , равно  $\frac{n}{2} - 1$ , в случае же, когда  $a = o$ , равно  $\frac{n}{2}$ .

Заметим, что величины векторов, составляющих пары векторов, входящих в каноническую систему, равны модулям ненулевых собственных чисел главного момента системы. В самом деле, если мы обозначим векторы построенных нами пар через  $\bar{\mathbf{a}}_1, -\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, -\bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_m, -\mathbf{a}_m$ , причем векторы  $\bar{\mathbf{a}}_a$  имеют начала в точках  $M_a(\mathbf{x}_a)$  сферы, а векторы  $-\bar{\mathbf{a}}_a$  имеют общее начало в центре  $O$  этой сферы, мы можем записать оператор  $\mathbf{M}$  в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_m \cdot \mathbf{a}_m - \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x}_m. \quad (8.34)$$

Эта форма оператора  $\mathbf{M}$  совпадает с канонической формой (8.31) кососимметрического оператора, если положить  $\mathbf{x}_a = \mathbf{e}_{2a-1}$ ,  $\mathbf{a}_a = \lambda_a \mathbf{e}_{2a}$ . Отсюда видно, что  $|\mathbf{a}_a| = |\lambda_a|$ .

Аналогично доказывается, что всякая система скользящих векторов на сфере эквивалентна некоторой канонической системе, состоящей из скользящих векторов на сфере, расположенных на больших окружностях, высекаемых из сферы вполне перпендикулярными 2-плоскостями.

В частности, всякая система скользящих векторов на 2-плоскости в случае, когда главный вектор системы отличен от нуля, эквивалентна одному скользящему вектору, направленному по главной оси системы, а в случае, когда главный вектор системы равен нулю — эквивалентна паре векторов, всякая система скользящих векторов в 3-пространстве в общем случае эквивалентна скользящему вектору, направленному по главной оси системы и паре векторов в плоскости, перпендикулярной главной оси, всякая система скользящих векторов в 4-пространстве в случае, когда главный вектор системы отличен от нуля, эквивалентна канонической системе скользящих векторов 3-пространства в некоторой 3-плоскости, а в случае, когда главный вектор системы равен нулю, эквивалентна двум парам векторов в двух вполне перпендикулярных 2-плоскостях. Точно так же всякая система скользящих векторов на 2-сфере эквивалентна одному скользящему вектору, а всякая система скользящих векторов на 3-сфере и на 4-сфере эквивалентна двум скользящим векторам, направленным по двум большим окружностям

сферы, высекаемым из нее двумя вполне перпендикулярными диаметральными плоскостями.

**8.2.7. Условие эквивалентности систем скользящих векторов.** Теперь мы можем сформулировать условие эквивалентности двух систем скользящих векторов: *необходимым и достаточным условием эквивалентности двух систем скользящих векторов в  $n$ -пространстве является равенство их главных векторов и главных моментов*<sup>6</sup>.

Необходимость этого условия была доказана выше. Достаточность этого условия следует из того, что у двух систем скользящих векторов с равными главными векторами  $\mathbf{a}$  и операторами  $M$  совпадают главные оси системы, определяющиеся вектором  $\mathbf{a}$  и оператором  $M$ . С другой стороны, равенство операторов  $M$  у двух систем векторов влечет за собой совпадение инвариантных 2-плоскостей этих операторов и эквивалентность пар векторов  $\bar{\mathbf{a}}_a, -\bar{\mathbf{a}}_a$  в этих 2-плоскостях, входящих в состав канонической формы (8.34) оператора  $M$ . Так как обе данные системы скользящих векторов эквивалентны построенной канонической системе, они эквивалентны между собой, и наша теорема полностью доказана.

Аналогично доказывается, что *необходимым и достаточным условием эквивалентности систем скользящих векторов на сфере  $n$ -пространства является равенство их главных моментов*.