ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

Проективные преобразования

§ 1. Проективное пространство

9.1.1. Центральное проектирование. Рассмотрим центральное проектирование аффинного n-пространства, погруженного в аффинное $(n+1)$-пространство в виде его плоскости α на другую плоскость α', того же $(n+1)$-пространства, т.е. такое соответствие между плоскостями α и α', при котором точка A плоскости α соответствует такой точке A' плоскости α', что прямая AA' проходит через некоторую фиксированную точку S, называемую *центром проекции* (рис. 9.1).

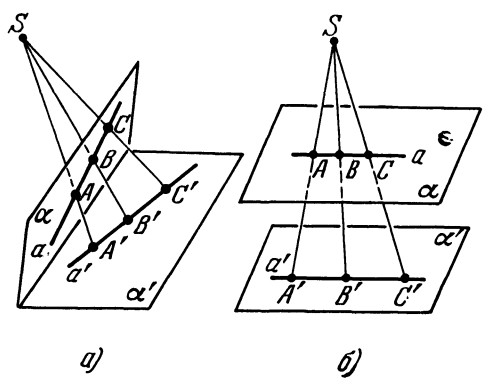

Рис. 9.1.

Центральное проектирование представляет собой отображение плоскости α на плоскость α', причем если точка A плоскости α проектируется в точку A' плоскости α', точка A переходит только в одну точку плоскости α', а точка A' получается только из одной точки плоскости α. Если

точки A, B, C плоскости α лежат на одной прямой a, прямые SA, SB, SC лежат в одной 2-плоскости, вследствие чего точки A', B', C', соответствующие точкам A, B, C, лежат на одной прямой a' плоскости α', т. е. *при центральном проектировании прямые плоскости α переходят в прямые плоскости α'*. Однако это отображение не взаимно однозначно, так как на плоскости α имеются точки M, не переходящие ни в одну точку плоскости α', а на плоскости α' имеются точки N', не получающиеся ни из одной точки плоскости α: точки M таковы, что прямые SM параллельны плоскости α', а точки N' таковы, что прямые SN' параллельны плоскости α. На плоскостях α и α' имеется по $(n-1)$-плоскости, в которых нарушается взаимная однозначность нашего отображения: это $(n-1)$-плоскость плоскости α, высекаемая из нее плоскостью, проведенной через точку S параллельно плоскости α', и $(n-1)$-плоскость плоскости α', высекаемая из нее плоскостью, проведенной через точку S параллельно плоскости α.

Центральное проектирование одной плоскости на другую является взаимно однозначным отображением только в том случае, когда эти плоскости параллельны между собой (рис. 9.1, *б*).

9.1.2. Проективное n-пространство. Рассмотрим k центральных проектирований, при первом из которых плоскость α $(n+1)$-пространства проектируется из точки S на плоскость α', при втором плоскость α' проектируется из точки S' на плоскость α'' и т. д. и при последнем плоскость $\alpha^{(k-1)}$ проектируется из точки $S^{(k-1)}$ на исходную плоскость α. В результате этих проектирований мы получаем отображение аффинного n-пространства на себя, при котором прямые этого пространства переходят в прямые. В этом случае, когда все плоскости $\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(k-1)}$ параллельны между собой, это отображение пространства на себя взаимно однозначно и представляет собой аффинное преобразование n-пространства. В случае же, когда не все плоскости $\alpha, \alpha', \ldots, \alpha^{(k-1)}$ параллельны, определенное нами преобразование, которое мы будем называть *коллинеацией*, уже не будет взаимно однозначным.

Будем называть множество всех прямых аффинного n-пространства, проходящих через точку этого пространства, *n-связкой* прямых с центром в данной точке.

Для того чтобы сделать коллинеации аффинного n-пространства взаимно однозначными, следует дополнить это n-пространство новыми точками, находящимися во взаимно однозначном соответствии с прямыми $(n+1)$-связки с центром, не лежащим на плоскости α; при этом всякой точке A плоскости α взаимно однозначно соответствует прямая SA $(n+1)$-связки с центром S, а новым точкам соответствуют прямые $(n+1)$-связки, составляющие n-связку в плоскости β, проведенной через точку S параллельно плоскости α (рис. 9.2).

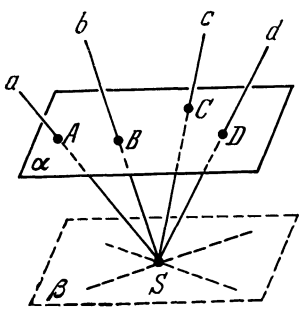

Рис. 9.2.

Так как при предельном переходе точек A_k плоскости α к точке A этой плоскости соответственные прямые SA_k $(n+1)$-связки стремятся к прямой SA этой же $(n+1)$-связки, то естественно считать, что добавляемые точки получены предельным переходом из тех точек плоскости α, которые соответствуют прямым $(n+1)$-связки, стремящимся к прямым, соответствующим добавляемым точкам.

Указанное дополнение аффинного n-пространства новыми точками приводит нас к новому пространству, которое мы определим следующим образом: будем называть *проективным n-пространством* множество элементов, называемых *точками*, находящихся во взаимно однозначном и взаимно непрерывном соответствии с прямыми $(n+1)$-связки аффинного $(n+1)$-пространства. Будем называть *m-плоскостями* проективного n-пространства множество точек этого пространства, соответствующие прямым $(m+1)$-связки, лежащим в $(m+1)$-плоскостях, проходящих через центр $(n+1)$-связки; при $m=1$ будем называть m-плоскости *прямыми*, а при $m=n-1$ — *плоскостями*. Так как множество прямых $(n+1)$-связки, лежащих в $(m+1)$-плоскости, проходящей через ее центр, является $(m+1)$-связкой, *m-плоскости проективного*

n-пространства являются проективными m-пространствами, и, в частности, прямые проективного n-пространства являются *проективными прямыми*.

Из определения проективного n-пространства видно, что *проективное пространство*, в отличие от аффинного пространства, *замкнуто*; и что из любой бесконечной последовательности точек проективного пространства можно выделить сходящуюся подпоследовательность, т. е. *проективное пространство компактно*.

Так как при приближении прямой $(n+1)$-связки к прямой параллельной плоскости α точка пересечения прямой $(n+1)$-связки с плоскостью α удаляется в бесконечность, точки плоскости α, приближающиеся к добавляемым точкам, удаляются в бесконечность. Поэтому точки, дополняющие обычное пространство до проективного, называют *бесконечно удаленными точками*. Так как бесконечно удаленные точки n-пространства находятся во взаимно однозначном соответствии с прямыми n-связки, эти точки составляют *бесконечно удаленную плоскость* n-пространства.

Из определения бесконечно удаленных точек видно, что *две параллельные прямые или m-плоскости аффинного n-пространства при его дополнении до проективного n-пространства пересекаются в бесконечно удаленных точках* [1].

Так как при изображении проективного n-пространства $(n+1)$-связкой прямых плоскости проективного пространства изображаются n-связками прямых, состоящими из прямых, лежащих в n-плоскостях, проходящих через центр связки, а каждая прямая связки, не лежащая в такой n-плоскости, пересекает эту n-плоскость только в центре связки, и каждая из n-связок прямых, изображающих плоскости проективного n-пространства, не делит $(n+1)$-связку прямых на две части, *проективное n-пространство*, в отличие от аффинного n-пространства, *не делится плоскостью на две области*; всякие две точки аффинного n-пространства, находящиеся по разные стороны от плоскости, соединяются отрезком проективной прямой, содержащим бесконечно удаленную точку.

Заметим, что если аффинная 2-плоскость является двусторонней поверхностью, т. е. поверхностью, с одной стороны которой в окрестности каждой ее точки нельзя

непрерывным образом перейти на другую сторону этой поверхности в окрестности той же точки, *проективная 2-плоскость является односторонней поверхностью*, т. е. поверхностью, с одной стороны которой в окрестности каждой ее точки можно непрерывным образом перейти на другую сторону этой поверхности в окрестности той же точки.

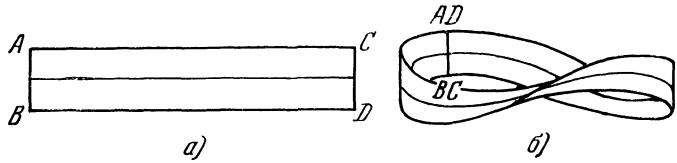

Рис. 9.3.

Простейшим примером односторонней поверхности является *лист Мёбиуса*[2], получающийся из прямоугольника $ABCD$ на аффинной плоскости (рис. 9.3, *а*) склеиванием двух его противоположных сторон AB и CD таким образом, что склеиваются противоположные углы A и D, B и C (рис. 9.3, *б*).

Для доказательства односторонности проективной 2-плоскости рассмотрим изображающую эту 2-плоскость

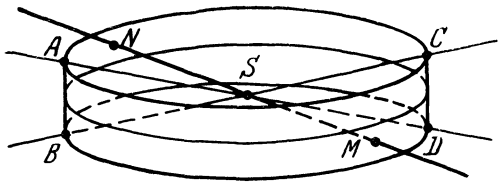

Рис. 9.4.

взаимно однозначно и взаимно непрерывно 3-связку прямых с центром S и построим прямой круговой цилиндр $ABCD$, для которого точка S служит серединой оси (рис. 9.4). Тогда каждая прямая связки пересекается в одной точке с каждым из двух оснований цилиндра или пересекается в двух точках с боковой поверхностью цилиндра. Так как точки проективной 2-плоскости взаимно однозначно изображаются прямыми 3-связки, точки проективной 2-плос-

кости взаимно однозначно изображаются парами точек пересечения прямых 3-связки с поверхностью цилиндра. Поэтому проективная 2-плоскость взаимно однозначно изображается поверхностью нашего цилиндра, если каждую пару точек этой поверхности, в которых с ней пересекается одна прямая связки, считать за одну точку, т. е., как говорят, эти пары точек поверхности цилиндра *отождествлены*. При этом отождествлении оба основания цилиндра отождествляются друг с другом, т. е. превращаются в один круг. У боковой поверхности цилиндра один из кривых четырехугольников $ABCD$ отождествляется с другим, а противоположные стороны AB и CD этих четырехугольников отождествляются таким образом, что отождествляются пары противоположных точек A и D, B и C, т. е. при нашем отождествлении боковая поверхность превращается в лист Мёбиуса. Поэтому вся поверхность нашего цилиндра при отождествлении превращается в лист Мёбиуса, склеенный своим краем с окружностью круга и в силу односторонности листа Мёбиуса поверхность, изображающая проективную 2-плоскость, является односторонней поверхностью.

9.1.3. Проективные координаты точек. Точки аффинного n-пространства можно характеризовать n аффинными координатами x^i, определяемыми выбором начала координат O и базисных векторов $\mathbf{e}_i$ по формуле

$$\overline{OM} = x^i \mathbf{e}_i. \tag{9.1}$$

Для того чтобы охарактеризовать числами все точки проективного n-пространства, поступают следующим образом: в $(n+1)$-пространстве, одна из плоскостей которого дополнена до проективного n-пространства, выбирается произвольно система аффинных координат с началом в точке S, не лежащей на этой плоскости. Тогда каждой точке проективного n-пространства взаимно однозначно соответствует прямая связки с центром в точке S (рис. 9.5). Поэтому каждую точку M нашего проективного n-пространства можно характеризовать направляющим вектором $\mathbf{x}$ соответственной прямой SM этой $(n+1)$-связки, причем вектор $\mathbf{x}$ определен с точностью до ненулевого вещественного множителя, или координатами этого вектора.

Будем называть этот вектор $\mathbf{x}$ $(n+1)$-пространства вектором, *представляющим* точку M проективного n-пространства. Координаты x^i вектора $\mathbf{x}$, представляющего точку M, также определенные с точностью до ненулевого вещественного множителя, называются *проективными координатами точки* M n-пространства. Точки E_i, в которых прямые базисных векторов $\mathbf{e}_i$ пересекаются с данной n-плоскостью, называются *базисными точками* системы проективных координат, а прямые E_iE_j называются *координатными осями* этой системы [3]. Таким образом, проективные координаты точки M n-пространства определяются вектором $\mathbf{x}$ и базисными векторами $\mathbf{e}_i$ по формуле

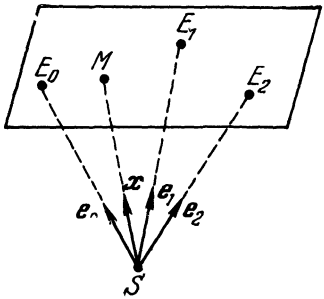

Рис. 9.5.

$$\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i. \tag{9.2}$$

Аффинные координаты точки проективного n-пространства совпадают с проективными координатами x^i этой точки при $i > 0$, определяемыми базисными векторами, из которых векторы $\mathbf{e}_i$ при $i > 0$ совпадают с одноименными базисными векторами аффинного n-пространства, а вектор $\mathbf{e}_0$ равен вектору $\overline{SO}$ (рис. 9.6), так как в этом случае формула (9.2) принимает вид

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_0 + x^i\mathbf{e}_i \quad (i > 0), \tag{9.3}$$

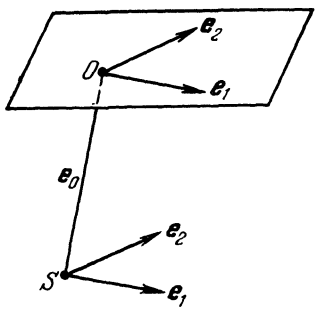

Рис. 9.6.

т. е. $x^0 = 1$, а проективные координаты x^i при $i > 0$ совпадают с одноименными аффинными координатами. Поэтому в общем случае, когда все проективные координаты x^i умножены на произвольный ненулевой вещественный

множитель, аффинные координаты X^i точки M связаны с проективными координатами x^i той же точки соотношениями

$$X^i = \frac{x^i}{x^0}. \tag{9.4}$$

В этом случае точка O совпадает с базисной точкой E_0, а базисная точка E_i является бесконечно удаленной точкой координатной линии $E_0 E_i$.

Для задания проективных координат в проективном n-пространстве достаточно задать $n+1$ базисных точек E_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) и единичную точку E, все координаты которой равны 1. В самом деле, если мы направим вектор $\mathbf{e}$ по прямой SE, а $\mathbf{e}_i$ — произвольные векторы, направленные по прямым SE_i (рис. 9.7), то вектор $\mathbf{e}$ всегда можно представить в виде $\mathbf{e} = x^i \mathbf{e}_i$. Если мы выберем векторы $\mathbf{e}_i$ на прямых SE_i таким образом, чтобы коэффициенты x^i были бы равны 1, т. е. чтобы имело место равенство $\mathbf{e} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{e}_n$, то в системе проективных координат, определяемой этими векторами, точка $\mathbf{e}$ будет иметь все координаты, равные 1. Полученные таким образом векторы $\mathbf{e}_i$ определены с точностью до ненулевого множителя, на который можно умножать вектор $\mathbf{e}$, но, так как проективные координаты также определены с точностью до такого множителя, система проективных координат определяется заданием точек E_i и E однозначно.

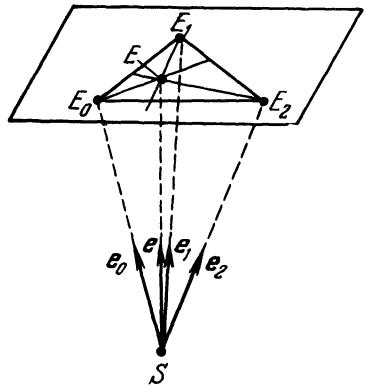

Рис. 9.7.

В том случае, когда вектор $\mathbf{x}$, представляющий точку M проективного n-пространства, является линейной комбинацией векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$, представляющих точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$ этого пространства, будем говорить, что точка M является *линейной комбинацией* точек

$M_1, M_2, \ldots, M_k$. В частности, каждая точка n-пространства является линейной комбинацией базисных точек E_i, а точки m-плоскости пространства являются линейными комбинациями $(m+1)$ точек, которые можно назвать *базисными точками m-плоскости*. Если базисные точки m-плоскости представляются векторами $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, то произвольная точка m-плоскости представляется вектором

$$\mathbf{x} = t^a \mathbf{x}_a \quad (a = 0, 1, \ldots, m). \tag{9.5}$$

Если рассматривать m-плоскость проективного n-пространства как проективное m-пространство, параметры t^a играют роль проективных координат точек этого m-пространства. При $m = 1$ формула (9.5) принимает вид

$$\mathbf{x} = t^0 \mathbf{a}_0 + t^1 \mathbf{a}_1. \tag{9.6}$$

Формула (9.5) представляет собой *параметрическое уравнение m-плоскости*, а формула (9.6) — *параметрическое уравнение прямой.*

9.1.4. Двойное отношение четырех точек. Если на прямой M_1M_2 заданы четыре точки, из которых первые две

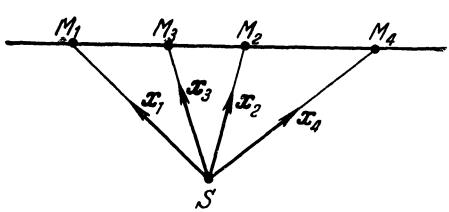

Рис. 9.8.

точки M_1 и M_2 представляются векторами $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, то последние две точки M_3 и M_4 (рис. 9.8) представляются линейными комбинациями этих векторов

$$\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2 \text{ и } \gamma \mathbf{x}_1 + \delta \mathbf{x}_2, \tag{9.7}$$

и тогда число

$$\overline{M_1M_2, M_3M_4} = \frac{\delta}{\gamma} : \frac{\beta}{\alpha} \tag{9.8}$$

называется *двойным отношением*[4] точек

$$M_1,\ M_2,\ M_3 \text{ и } M_4.$$

Двойное отношение $\overline{M_1M_2,\ M_3M_4}$ *не зависит от выбора векторов, представляющих точки* M_1, M_2, M_3 *и* M_4, так как при умножении векторов $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ соответственно на k и l числа α и γ умножаются на $\frac{1}{k}$, а числа β и δ умножаются на $\frac{1}{l}$ и число $\frac{\delta}{\gamma} : \frac{\beta}{\alpha}$ не изменяется, а при умножении векторов $\mathbf{x}_3$ и $\mathbf{x}_4$ соответственно на k и l числа α и β умножаются на k, а числа γ и δ умножаются на l и число $\frac{\delta}{\gamma} : \frac{\beta}{\alpha}$ снова не изменяется. *Двойное отношение не зависит от выбора точки* S, так как, принимая за векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_4$, соответственно, векторы $\overline{SM_1}, \overline{SM_2}, \overline{SM_3}, \overline{SM_4}$ (рис. 9.9) и представляя векторы $\overline{SM_3}$ и $\overline{SM_4}$ в виде линейных комбинаций (9.7), мы получим, что $\overline{SM_{13}} = \alpha\overline{SM_1}$, $\overline{SM_{23}} = \beta\overline{SM_2}$, $\overline{SM_{14}} = \gamma\overline{SM_1}$, $\overline{SM_{24}} = \delta\overline{SM_2}$, откуда вытекает, что

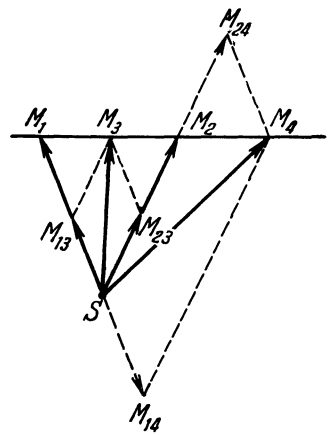

Рис. 9.9.

$$\overline{M_1M_2,\ M_3M_4} = \frac{\delta}{\gamma} : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\beta} : \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\overline{SM_{24}}}{\overline{SM_{23}}} : \frac{\overline{SM_{14}}}{\overline{SM_{13}}}. \quad (9.9)$$

Но так как прямая SM_1 параллельна прямым M_3M_{23} и M_4M_{24}, а прямая SM_2 параллельна прямым M_3M_{13} и M_4M_{14},

$$\frac{\overline{SM_{24}}}{\overline{SM_{23}}} = \frac{\overline{M_1M_4}}{\overline{M_1M_3}}, \quad \frac{\overline{SM_{14}}}{\overline{SM_{13}}} = \frac{\overline{M_2M_4}}{\overline{M_2M_3}} \quad (9.10)$$

и

$$\overline{M_1M_2,\ M_3M_4} = \frac{\overline{M_1M_4}}{\overline{M_1M_3}} : \frac{\overline{M_2M_4}}{\overline{M_2M_3}}, \quad (9.11)$$

т. е. двойное отношение $\overline{M_1M_2, M_3M_4}$ равно отношению двух отношений ориентированных отрезков прямой M_1M_2.

Если точки прямой M_1M_2 определяются аффинной координатой X, причем координата точки M_α равна X_α, то формулу (9.11) можно переписать в виде

$$\overline{M_1M_2, M_3M_4} = \frac{X_4 - X_1}{X_3 - X_1} : \frac{X_4 - X_2}{X_3 - X_2}. \qquad (9.12)$$

Из формулы (9.11) видно, что в том случае, когда пары точек M_1, M_2 и M_3, M_4 разделяют друг на друга, т. е. одна из точек M_3, M_4 лежит на отрезке M_1M_2, а другая — вне его, двойное отношение $\overline{M_1M_2, M_3M_4}$ отрицательно, а в том случае, когда эти пары не разделяют друг друга, т. е. обе точки M_3, M_4 лежат на отрезке M_1M_2 или вне его, это двойное отношение положительно: в первом случае три ориентированных отрезка, входящих в правую часть формулы (9.11), направлены в одну сторону и четвертый из этих отрезков направлен в другую сторону (рис. 9.10, *а*), а во втором случае все четыре этих отрезка направлены в одну сторону (рис. 9.10, *б*) или два из них направлены в одну сторону и два — в другую (рис. 9.10, *в*).

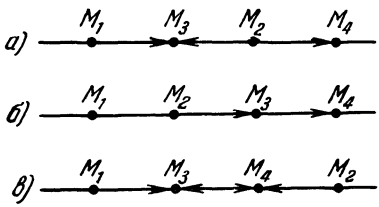

Рис. 9.10.

Если точки M_3 и M_4 делят отрезок M_1M_2 внутренним и внешним образом в одном и том же отношении, то двойное отношение $\overline{M_1M_2, M_3M_4} = \frac{\overline{M_1M_4}}{\overline{M_2M_4}} : \frac{\overline{M_1M_3}}{\overline{M_2M_3}}$ равно -1. В этом случае четверка точек называется *гармонической четверкой* и говорят, что пара точек M_3, M_4 *гармонически делит* пару точек M_1, M_2. На рис. 9.11 изображена гармоническая четверка точек, из которых точка M_3 делит отрезок M_1M_2 в отношении 2 : 1 внутренним образом, а точка M_4 делит тот же отрезок в том же отношении внешним образом.

Двойное отношение четырех точек не изменяется при проектировании: если точки N_1, N_2, N_3, N_4 прямой N_1N_2

получены из точек M_1, M_2, M_3, M_4 прямой M_1M_2 проектированием из точки O, то мы можем представить как точ-

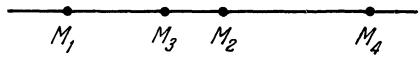

Рис. 9.11.

ки M_α, так и точки N_α одними и теми же векторами $\overline{OM_\alpha}$ или $\overline{ON_\alpha}$, направленными по одним и тем же прямым $(n+1)$-связки с центром O (рис. 9.12).

Так как двойное отношение не изменяется при проектировании, двойное отношение точек пересечения четырех прямых m_1, m_2, m_3, m_4, пересекающихся в одной точке любой прямой, одно и то же. Поэтому это двойное отношение называется *двойным отношением четырех прямых пучка* и обозначается $\overline{m_1, m_2; m_3, m_4}$.

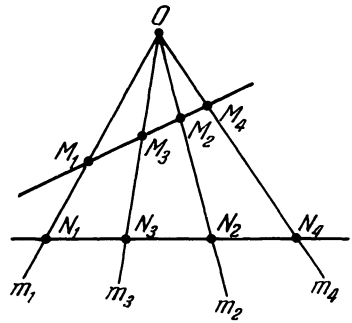

Рис. 9.12.

9.1.5. Плоскости. Так как уравнение n-плоскости $(n+1)$-пространства, проходящей через центр $(n+1)$-связки, который в нашем случае является началом координат, имеет вид

$$u_i x^i = 0 \tag{9.13}$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{u}\mathbf{x} = 0, \tag{9.14}$$

уравнение (9.13) является *уравнением плоскости* проективного n-пространства в проективных координатах, а уравнение (9.14) является векторным уравнением той же плоскости. Коэффициенты u_i и вектор $\mathbf{u}$ $(n+1)$-пространства, входящие в эти уравнения, так же как проективные координаты точки проективного n-пространства, и вектор,

представляющий точку этого пространства, определены с точностью до умножения на ненулевой вещественный множитель. Поэтому коэффициенты u_i называются *проективными координатами плоскости*, а вектор $\mathbf{u}$ называется *вектором, представляющим плоскость проективного n-пространства*.

9.1.6. Уравнение плоскости по n точкам. Плоскость в проективном n-пространстве определяется n линейно независимыми точками $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$. Поэтому за вектор, представляющий плоскость $M_0 M_1 \ldots M_{n-1}$, может быть принято векторное произведение векторов $\mathbf{x}_a$, представляющих точки M_a, т. е.

$$\mathbf{u} = [\mathbf{x}_0\, \mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1}]. \tag{9.15}$$

Если $n+1$ точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$ лежат на одной плоскости, то вектор $\mathbf{x}_n$ удовлетворяет уравнению (9.14), где вектор $\mathbf{u}$ имеет вид (9.15), т. е. это условие имеет вид

$$\{\mathbf{x}_0\, \mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n\} = 0. \tag{9.16}$$

Обратно, если векторы $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ удовлетворяют условию (9.16), они линейно зависимы и точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$ лежат в одной плоскости.

9.1.7. Принцип двойственности. Так как векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$, представляющие точку M и плоскость (9.14), входят в условие (9.14) принадлежности точки M плоскости α равноправно, за вектор, представляющий точку пересечения n плоскостей $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, представляемых линейно независимыми векторами $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}$, может быть принято векторное произведение

$$\mathbf{x} = [\mathbf{u}_0\, \mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_{n-1}]\,, \tag{9.17}$$

а условие того, что $n+1$ плоскостей $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ проходят через одну точку, имеет вид

$$\{\mathbf{u}_0\, \mathbf{u}_1 \ldots \mathbf{u}_n\} = 0. \tag{9.18}$$

Условия (9.17) и (9.18) называются *двойственными* условиям (9.15) и (9.16). Из полной равноправности векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$, представляющих точки и плоскости проективного n-пространства, вытекает, что каждой теореме геометрии проективного n-пространства соответствует

новая теорема, полученная из первой теоремы заменой слова «точка» на слово «плоскость», выражения «точка лежит на плоскости» на выражение «плоскость проходит через точку» и т. д. Этот принцип геометрии проективного n-пространства носит название *принципа двойственности*[5].

По принципу двойственности *m-плоскость*, определяемая $m+1$ линейно независимыми точками, соответствует пересечению $m+1$ плоскостей с линейно независимыми уравнениями, т. е. *$(n-m-1)$-плоскости*, в частности, *прямая* соответствует $(n-2)$-плоскости. Предложения, соответствующие друг другу по принципу двойственности, называются *двойственными* предложениями. Приведем примеры двойственных друг другу предложений:

Всякие две точки определяют проходящую через них прямую.	Всякие две плоскости пересекаются по $(n-2)$-плоскости.
Две прямые, лежащие в одной 2-плоскости, имеют общую точку.	Две $(n-2)$-плоскости, пересекающиеся по $(n-3)$-плоскости, лежат в одной плоскости.

Принцип двойственности показывает, что *многообразие плоскостей проективного n-пространства образует модель этого пространства*, причем m-плоскости этого пространства изображаются многообразиями плоскостей, проходящих через $(n-m-1)$-плоскость.

9.1.8. Двойное отношение двух точек и двух плоскостей. Пусть даны две точки $M_1(\mathbf{x}_1)$ и $M_2(\mathbf{x}_2)$ и две плоскости α_1 и α_2, то двойное отношение точек M_1 и M_2 и точек пересечения прямой M_1M_2 с плоскостями α_1 и α_2 (рис. 9.13, *а*) мы будем называть *двойным отношением точек M_1 и M_2 и плоскостей α_1 и α_2* и обозначать $\overline{M_1M_2, \alpha_1\alpha_2}$. Если точки пересечения прямой M_1M_2 с плоскостями α_1 и α_2 — точки $M_3(\mathbf{x}_1+\lambda\mathbf{x}_2)$ и $M_4(\mathbf{x}_1+\mu\mathbf{x}_2)$, то $\overline{M_1M_2, \alpha_1\alpha_2}=\frac{\mu}{\lambda}$. С другой стороны, так как плоскости α_1 и α_2 представляются векторами $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$, числа λ и μ удовлетворяют условиям

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}_1+\lambda\mathbf{x}_2)=\mathbf{u}_2(\mathbf{x}_1+\mu\mathbf{x}_2)=0,$$

т. е.

$$\lambda = -\frac{\mathbf{u}_1\mathbf{x}_1}{\mathbf{u}_1\mathbf{x}_2}, \quad \mu = -\frac{\mathbf{u}_2\mathbf{x}_1}{\mathbf{u}_2\mathbf{x}_2}$$

и

$$\overline{M_1M_2,\ \alpha_1\alpha_2} = \frac{\mathbf{u}_1\mathbf{x}_2\cdot\mathbf{u}_2\mathbf{x}_1}{\mathbf{u}_1\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{u}_2\mathbf{x}_2}. \tag{9.19}$$

Совершенно аналогично определению двойного отношения четырех прямых пучка определяется *двойное отношение четырех плоскостей пучка* $\overline{\alpha_1\alpha_2,\ \alpha_3\alpha_4}$, равное двойному отношению точек пересечения этих плоскостей с

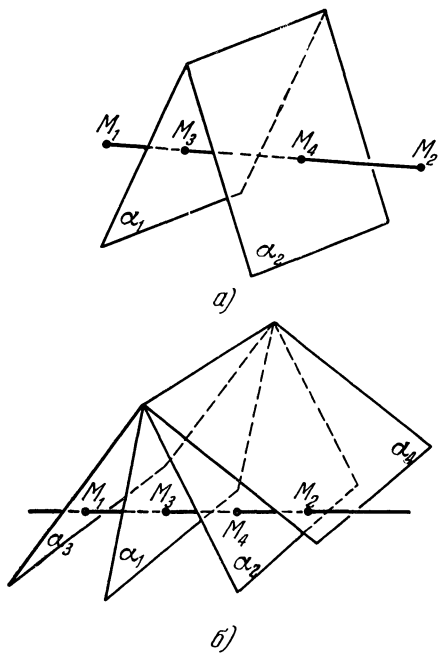

Рис. 9.13.

любой прямой. Если прямая M_1M_2 пересекает плоскости $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, соответственно, в точках M_3, M_4, M_1, M_2 (рис. 9.13, *б*), то легко проверить, что двойное отношение $\overline{\alpha_1\ \alpha_2,\ \alpha_3\ \alpha_4}$ равно двойному отношению (9.19).