

вещественных параметров, что и группа коллинеаций этого пространства.

Покажем, что при корреляциях проективного n -пространства сохраняются двойные отношения двух точек и двух плоскостей. В самом деле, если при корреляции (9.32) точки $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ переходят в плоскости $\alpha'_1('u_1)$ и $\alpha'_2('u_2)$, а плоскости $\alpha_1(u_1)$ и $\alpha_2(u_2)$ переходят в точки $M'_1('x_1)$ и $M'_2('x_2)$, то двойные отношения этих пар точек и пар прямых соответственно равны (9.19) и

$$\overline{M'_1 M'_2, \alpha'_1 \alpha'_2} = \frac{'u_1' x_2 \cdot 'u_2' x_1}{'u_1' x_1 \cdot 'u_2' x_2}.$$

Но в силу (9.32) и (9.37)

$$'u_1 = Ax_1, \quad 'u_2 = Ax_2, \\ 'x_1 = (A^T)^{-1} u_1, \quad 'x_2 = (A^T)^{-1} u_2$$

и

$$'u_1' x_2 = Ax_1(A^T)^{-1} u_2 = x_1 A^T (A^T)^{-1} u_2 = x_1 u_2, \\ 'u_2' x_1 = Ax_2(A^T)^{-1} u_1 = x_2 A^T (A^T)^{-1} u_1 = x_2 u_1, \\ 'u_1' x_1 = Ax_1(A^T)^{-1} u_1 = x_1 A^T (A^T)^{-1} u_1 = x_1 u_1, \\ 'u_2' x_2 = Ax_2(A^T)^{-1} u_2 = x_2 A^T (A^T)^{-1} u_2 = x_2 u_2,$$

откуда вытекает, что

$$\overline{M_1 M_2, \alpha_1 \alpha_2} = \overline{M'_1 M'_2, \alpha'_1 \alpha'_2} \quad (9.39)$$

§ 3. Конфигурационные теоремы

9.3.1. Конфигурации. Будем называть условие того, что m -плоскость проективного n -пространства целиком лежит в l -плоскости этого пространства ($m < l$), условием *инцидентности* этих плоскостей, а геометрические фигуры этого пространства, состоящие из нескольких точек, прямых и m -плоскостей различных размерностей, связанных некоторыми условиями инцидентности, будем называть *конфигурациями* проективного n -пространства. Две конфигурации называются *двойственными*, если каждой точке, плоскости и m -плоскости одной из этих конфигураций отвечает, соответственно, плоскость, точка и $(n - m - 1)$ -плоскость второй конфигурации, причем

пересечению двух элементов одной конфигурации отвечает сумма соответственных элементов другой конфигурации.

Простейшие двойственные конфигурации: k точек, лежащих на m -плоскости, и k плоскостей, проходящих через $(n - m - 1)$ -плоскость. На рис. 9.15 изображены две

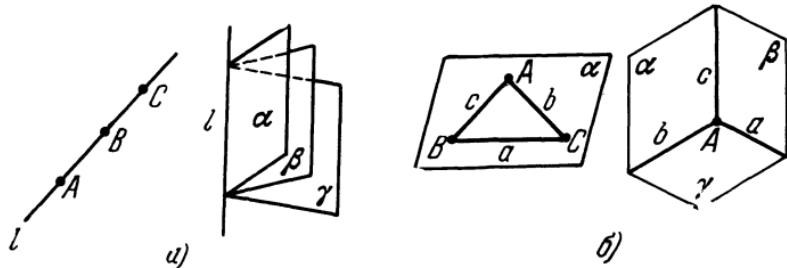


Рис. 9.15.

пары двойственных конфигураций 3-пространства — 3 точки A, B, C на прямой и 3 плоскости α, β, γ , проходящие через прямую (рис. 9.15, а), треугольник ABC со

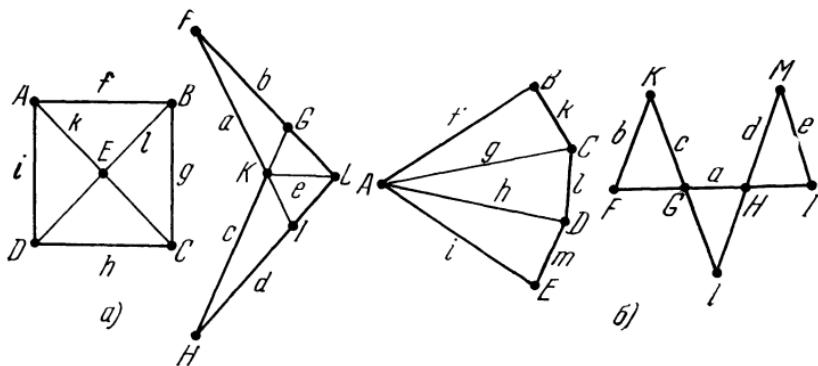


Рис. 9.16.

сторонами a, b, c на плоскости α и трехгранный угол с гранями α, β, γ , ребрами a, b, c и вершиной A (рис. 9.15, б). Двойственными конфигурациями являются также конфигурации, состоящие из вершин и m -плоскостей, содержащих m -грани двух взаимных правильных n -многогранников (см. 5.5.9).

На рис. 9.16 изображены две более сложные пары двойственных конфигураций на 2-плоскости, соответст-

венные точки и прямые которых обозначены соответственными большими и малыми латинскими буквами.

Существуют конфигурации, двойственные сами себе, например, точка и плоскость, проходящая или не проходящая через нее, или конфигурация, состоящая из точек и m -плоскостей n -симплекса, или при $n = 4$ — правильного многогранника $\{4, 3, 4\}$.

Рассмотрим несколько *конфигурационных теорем* на 2-плоскости, т. е. таких теорем, согласно которым из задания всех условий инцидентности некоторой конфигурации, кроме одного, вытекает это последнее условие.

9.3.2. Теорема Паппа⁸. У шестиугольника, вписанного в пару прямых, точки пересечения пар противоположных сторон лежат на одной прямой. Например, если шестиугольник $ABCDEF$ вписан в пару прямых a и b , то согласно этой теореме точка P пересечения противоположных

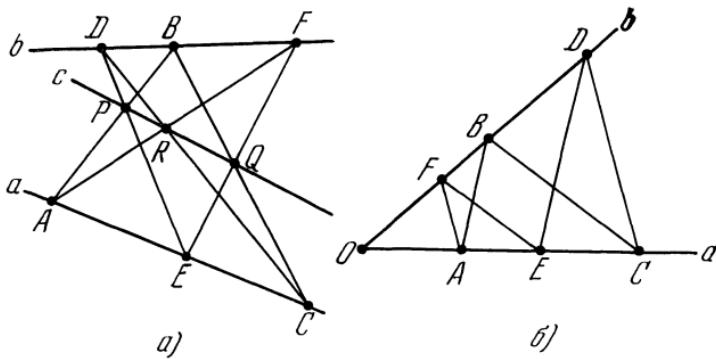


Рис. 9.17.

сторон AB и DE , точка Q пересечения противоположных сторон BC и EF и точка R пересечения противоположных сторон CD и FA лежат на одной прямой c (рис. 9.17, а).

Докажем прежде всего частный случай этой теоремы, когда прямая PQ — бесконечно удаленная прямая при дополнении обычной 2-плоскости до проективной 2-плоскости: если у шестиугольника, вписанного в пару пересекающихся прямых, две пары противоположных сторон параллельны, третья пара противоположных сторон также параллельна (рис. 9.17, б).

В самом деле, в силу параллельности прямых AF и CD имеет место пропорция $\frac{OF}{OD} = \frac{OA}{OC}$, в силу параллельности прямых AB и ED имеет место пропорция $\frac{OD}{OB} = \frac{OE}{OA}$. Из этих двух пропорций вытекает пропорция $\frac{OF}{OB} = \frac{OE}{OC}$, из чего следует параллельность прямых BC и FE .

Для доказательства общего случая теоремы Паппа достаточно произвести коллинеацию, при которой конфигурация этой теоремы преобразуется таким образом, что прямая PR переходит в бесконечно удаленную прямую $P'R'$. Тогда пары прямых AB и ED , AF и CD переходят в пары параллельных прямых $A'B'$ и $E'D'$, $A'F'$ и $C'D'$ и в силу доказанного частного случая прямые $B'C'$ и $F'E'$ также параллельны, т.е. бесконечно удаленная точка Q' пересечения этих прямых лежит на бесконечно удаленной прямой $P'R'$. Так как точки P, Q, R при этой коллинеации переходят в три точки P', Q', R' , лежащие на одной прямой, эти три точки необходимо сами лежат на одной прямой.

9.3.3. Двойственная теорема Паппа. Применяя к теореме Паппа принцип двойственности 2-плоскости, мы получим двойственную теорему Паппа: *у шестиугольника, противоположные стороны которого или продолжения этих сторон проходят через две точки, прямые, соединяющие противоположные вершины, проходят через одну точку*. Например, если противоположные стороны a, c, e и b, d, f шестиугольника проходят через точки A и B , прямые p, q, r , соединяющие противоположные вершины этого шестиугольника, проходят через точку C (рис. 9.18).

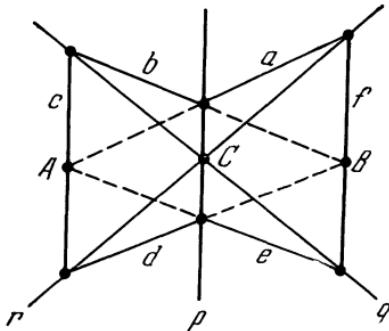


Рис. 9.18.

9.3.4. Теорема Дезарга⁹. *Если все три пары соответственных сторон двух треугольников пересекаются на одной прямой, то прямые, соединяющие их соответствен-*

ные вершины, пересекаются в одной точке, а если прямые, соединяющие соответственные вершины двух треугольников, пересекаются в одной точке, то все три пары соответственных сторон двух треугольников пересекаются на одной прямой.

Например, если соответственные стороны двух треугольников ABC и DEF пересекаются в точках P, Q, R , лежащих на одной прямой, прямые AD, BE, CF , соединяющие соответственные вершины, проходят через одну точку O , а если прямые AD, BE, CF , соединяющие соответственные вершины двух треугольников ABC и DEF , проходят через одну точку, соответственные стороны этих треугольников пересекаются в точках P, Q, R одной прямой (рис. 9.19, а).

Докажем прежде всего частный случай этой теоремы, когда прямая PQ является бесконечно удаленной прямой при дополнении обычной 2-плоскости до проективной 2-плоскости: *если все три пары соответственных сторон двух треугольников параллельны, то прямые, соединяющие их соответственные вершины, параллельны или пересекаются в одной точке, а если прямые, соединяющие соответственные вершины двух треугольников пересекаются в одной точке и две пары соответственных сторон параллельны, третья пара соответственных сторон также параллельна* (рис. 9.19, б).

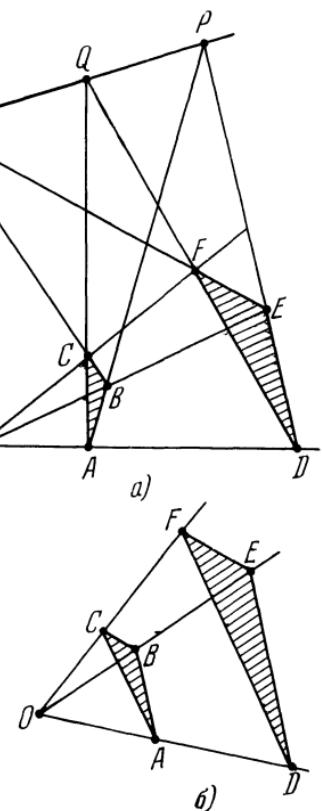


Рис. 9.19.

ответственных сторон двух треугольников параллельны, то прямые, соединяющие их соответственные вершины, параллельны или пересекаются в одной точке, а если прямые, соединяющие соответственные вершины двух треугольников пересекаются в одной точке и две пары соответственных сторон параллельны, третья пара соответственных сторон также параллельна (рис. 9.19, б).

В самом деле, если стороны треугольника ABC соответственно параллельны сторонам треугольника DEF ,

эти треугольники получаются друг из друга переносом или гомотетией, в первом случае прямые AD , BE и CF параллельны, во втором случае эти прямые пересекаются в центре гомотетии O .

С другой стороны, если прямые AD , BE и CF пересекаются в точке O , в силу параллельности прямых AB и DE имеет место пропорция $\frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OE}$, в силу параллельности прямых BC и EF имеет место пропорция $\frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OF}$. Из этих двух пропорций вытекает пропорция $\frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OF}$, из чего следует параллельность прямых AC и DF .

Для доказательства общего случая теоремы Дезарга достаточно произвести коллинеацию, при которой конфигурация этой теоремы преобразуется таким образом, что прямая PQ переходит в бесконечно удаленную прямую $P'Q'$. Тогда пары прямых AB и DE , AC и DF переходят в пары параллельных прямых $A'B'$ и $D'E'$, $A'C'$ и $D'F'$ и в силу доказанного частного случая из параллельности прямых $B'C'$ и $E'F'$ следует, что прямые $A'D'$, $B'E'$, $C'F'$ пересекаются в обычной или в бесконечно удаленной точке, а из того, что прямые $A'D'$, $B'E'$, $C'F'$ пересекаются в одной точке, следует, что прямые $B'C'$ и $E'F'$ параллельные, т. е. бесконечно удаленная точка R' пересечения этих прямых лежит на бесконечно удаленной прямой $P'Q'$. Так как точки P , Q , R при этой коллинеации переходят в три точки P' , Q' , R' , лежащие на одной прямой, эти три точки необходимо сами лежат на одной прямой.

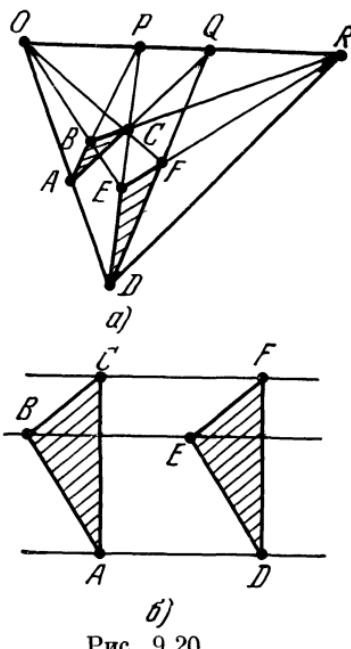


Рис. 9.20.

Теорема Дезарга двойственна сама себе.

Частный случай теоремы Дезарга, когда точка O пересечения прямых, соединяющих соответственные вершины треугольников, лежит на прямой PQR (рис. 9.20, a), называют *малой теоремой Дезарга*. В случае, когда прямая PQR — бесконечно удаленная прямая при дополнении 2-плоскости до проективной 2-плоскости, рассматриваемые треугольники получаются друг из друга переносом (рис. 9.20, b).

9.3.5. Теорема о полном четырехстороннике. Будем называть *полным четырехсторонником* совокупность 4 прямых, пересекающихся попарно в 6 точках; прямые называются *сторонами*, а точки — *вершинами* полного четырехсторонника. Три прямые, соединяющие пары вершин

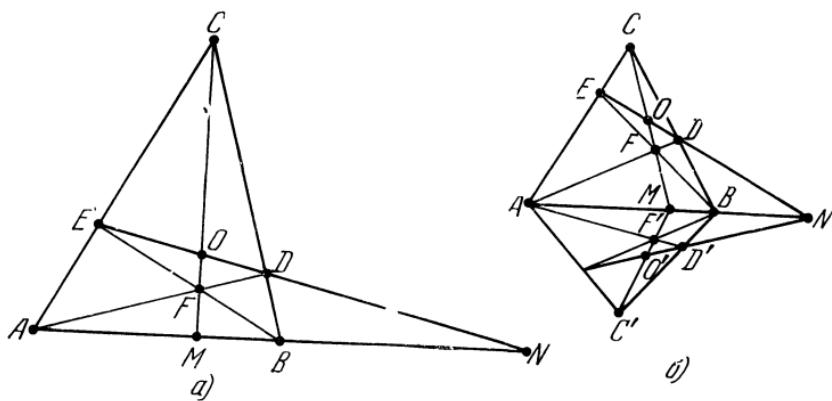


Рис. 9.21.

полного четырехсторонника, не лежащие на одной стороне, называются *диагоналями*. Теорема о *полном четырехстороннике*¹⁰ состоит в том, что *точки пересечения двух диагоналей полного четырехсторонника с его третьей диагональю гармонически делят пару вершин четырехсторонника, расположенных на этой диагонали*. На рис. 9.21, a изображен полный четырехсторонник $ABCDEF$, диагонали CF и ED которого высекают из диагонали AB пару точек M, N , гармонически делящую пару вершин A, B . Эту теорему можно рассматривать как конфигурацион-

ную теорему: если у двух полных четырехсторонников с общей диагональю две другие диагонали пересекаются в точке общей диагонали, третий диагонали четырехсторонников также пересекаются в точке общей диагонали (рис. 9.21, б). Для доказательства обозначим точку пересечения диагоналей ED и CF полного четырехсторонника, изображенного на рис. 9.21, а, через O . Тогда, проектируя точки A, M, B, N из точки C на диагональ ED , мы получим четверку точек E, O, D, N . Проектируя эту четверку точек из точки F обратно на прямую AB , мы получим четверку точек B, M, A, N . Поэтому в силу того, что двойное отношение не изменяется при проектировании, мы получаем, что $\overline{AB}, \overline{MN} = \overline{ED}$, $\overline{ON} = \overline{BA}$, \overline{MN} . Но из определения двойного отношения следует, что $\frac{1}{\overline{BA}, \overline{MN}} = \frac{1}{\overline{AB}, \overline{MN}}$. Поэтому в данном случае $\overline{AB}, \overline{MN} = \pm 1$. Но случай $\overline{AB}, \overline{MN} = 1$ соответствует совпадению точек M, N , откуда видно, что $\overline{AB}, \overline{MN} = -1$.

9.3.6. Теорема о полном четырехугольнике. Будем называть *полным четырехугольником* совокупность шести прямых, каждая из которых соединяет две из четырех точек, называемых вершинами полного четырехугольника, сами прямые называются сторонами полного четырехугольника. Через каждую из вершин полного четырехугольника проходят три его стороны и каждая сторона полного четырехугольника пересекается с четырьмя другими сторонами в двух вершинах, через которые она проходит; стороны полного четырехугольника, не пересекающиеся ни в одной из его вершин, называются противоположными сторонами полного четырехугольника. На рис. 9.22, а изображен полный четырехугольник $ABCD$ с противоположными сторонами a и b , c и f , d и e . Полный четырехугольник получается из обычного четырехугольника добавлением его диагоналей.

Полный четырехугольник представляет собой фигуру, двойственную полному четырехстороннику. Поэтому из теоремы о полном четырехстороннике по принципу двойственности мы получаем теорему о полном четырехугольнике: *прямые, соединяющие точку пересечения двух*

противоположных сторон полного четырехугольника с двумя другими точками пересечения его противоположных сторон, гармонически делят стороны полного четырехугольника, проходящие через точку их пересечения (рис. 9.22, б).

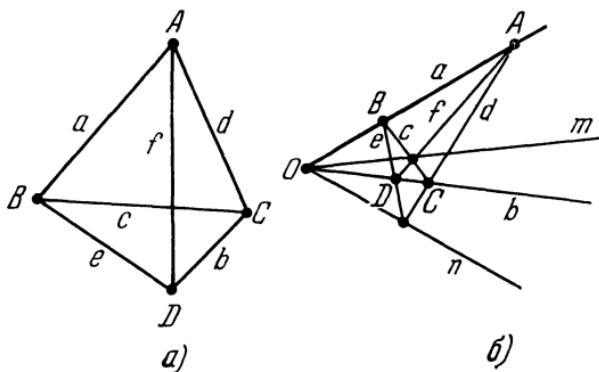


Рис. 9.22.

9.3.7. Гомологии. Назовем *гомологией* проективного n -пространства коллинеацию этого пространства, обладающую точечно неподвижной плоскостью, называемой *плоскостью гомологии* (при $n = 2$ гомология обладает точечно неподвижной прямой, называемой *осью гомологии*)¹¹.

Покажем, что *прямые, соединяющие точки, переводящиеся друг в друга гомологией, проходят через одну точку*. В самом деле, пусть при гомологии точки A, B, C , не лежащие на плоскости гомологии, переходят соответственно в точки A', B', C' . Если прямые AB, BC, CA пересекают плоскость гомологии соответственно в точках P, Q, R , то эти точки остаются неподвижными при гомологии и поэтому через эти точки проходят соответственно прямые $A'B', B'C', C'A'$. Поэтому треугольники ABC и $A'B'C'$ удовлетворяют условию теоремы Дезарга и в силу этой теоремы прямые AA', BB', CC' проходят через одну точку. Эта точка вполне определяется двумя парами соответственных точек A и A' , B и B' и через эту точку проходит прямая CC' при любом положении точки C в проективном n -пространстве.

Точка, через которую проходят все прямые, соединяющие точки, переводящиеся друг в друга гомологией, на-

зывают *центром гомологии*. Из доказанной теоремы следует, что *все прямые, проходящие через центр гомологии, являются инвариантными прямыми*.

По принципу двойственности этой теореме соответствует теорема: *если все прямые, соединяющие точки, переводящиеся друг в друга некоторой коллинеацией, проходят через одну точку, эта коллинеация является гомологией*.

Фигуры, переводящиеся друг в друга гомологией, называются *гомологичными*. Так как треугольники, входящие в конфигурацию теоремы Дезарга, являются гомологичными, эту теорему часто называют *теоремой о гомологичных треугольниках*.

Будем называть гомологии с центром, не лежащим на оси гомологии, *невырожденными гомологиями*, а гомологии с центром, лежащим на оси, *вырожденными гомологиями*. Вырожденные гомологии называют также *элациями*.

В том случае, когда центром невырожденной гомологии является базисная точка E_n , а ее плоскостью — плоскость $E_0 E_1 \dots E_{n-1}$, невырожденная гомология имеет вид

$$'x^i = \lambda x^i \quad (i < n), \quad 'x^n = \mu x^n. \quad (9.40)$$

В том случае, когда центром вырожденной гомологии является точка E_{n-1} , а ее плоскостью — плоскость $E_0 E_1 \dots E_{n-1}$, вырожденная гомология имеет вид

$$'x^i = \lambda x^i \quad (i \neq n-1), \quad 'x^{n-1} = \lambda x^{n-1} + x^n. \quad (9.41)$$

Невырожденная гомология (9.40) является частным случаем коллинеации (9.30), где $\lambda_i = \lambda$ при $i < n$, вырожденная гомология (9.41) является частным случаем коллинеации (9.31), где $\lambda_i = \lambda$ при всех значениях i .

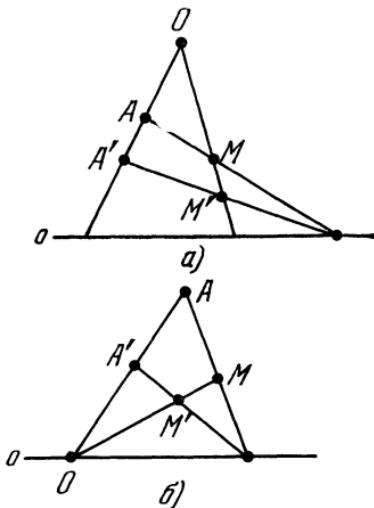


Рис. 9.23.

На рис. 9.23 изображено построение точки M' , гомологичной точке M при гомологии на 2-плоскости с центром O и осью o в случае невырожденной (рис. 9.23, а) и вырожденной гомологии (рис. 9.23, б).

9.3.8. Аффинные гомологии. Рассмотрим гомологии n -пространства, дополненного до проективного n -пространства, при которых бесконечно удаленная плоскость переходит в себя и которые поэтому определяют аффинные преобразования n -пространства. Будем называть такие гомологии *аффинными гомологиями*.

Так как бесконечно удаленная плоскость является инвариантной плоскостью, она должна совпадать с плоскостью гомологии или должна проходить через центр гомологии. Поэтому возможны четыре вида аффинных гомологий: невырожденные гомологии с бесконечно удаленной плоскостью, невырожденные гомологии с бесконечно удаленным центром, вырожденные гомологии с бесконечно удаленной плоскостью и вырожденные гомологии с бесконечно удаленным центром и с не бесконечно удаленной плоскостью.

В первом случае, приняв за бесконечно удаленную плоскость $E_0 E_1 \dots E_{n-1}$ и положив в (9.40) невырожденной гомологии $X^i = \frac{x^{i-1}}{x^n}$, мы получим преобразование

$$'X^i = \lambda X^i, \quad (9.42)$$

являющееся *гомотетией* (см. 4.1.10). Центром этой гомотетии является центр E_n гомологии.

Во втором случае, приняв за бесконечно удаленную плоскость плоскость $E_0 E_1 \dots E_{n-1}$ и положив в формуле (9.40) невырожденной гомологии $X^i = \frac{x^i}{x^0}$ и $k = \frac{\mu}{\lambda}$, мы получим преобразование

$$'X^i = X^i \quad (i < n), \quad 'X^n = k X^n, \quad (9.43)$$

являющееся *преобразованием родства* (см. 4.1.9). Плоскостью родства этого преобразования является плоскость $E_0 E_1 \dots E_{n-1}$ гомологии, а направлением родства является направление, определяемое центром E_n гомологии.

В третьем случае, приняв за бесконечно удаленную плоскость плоскость $E_0 E_1 \dots E_{n-1}$ и положив в формуле

$$(9.41) \quad \text{вырожденной гомологии } X^i = \frac{x^{i-1}}{x^{n-1}} \quad (i \neq n-1),$$

$X^n = \frac{x^n}{x^{n-1}}$, мы получим преобразование

$$'X^i = X^i \quad (i < n), \quad 'X^n = X^n + \lambda, \quad (9.44)$$

являющееся *переносом*. Направление этого переноса определяется центром E_{n-1} гомологии.

В четвертом случае, приняв за бесконечно удаленную плоскость плоскость $E_0 E_1 \dots E_{n-1}$ и положив в формуле (9.41) вырожденной гомологии $'X^i = \frac{x^i}{x^0}$ и $\frac{1}{\lambda} = l$, мы получим преобразование

$$'X^i = X^i \quad (i \neq n-1), \quad 'X^{n-1} = X^{n-1} + lX^n, \quad (9.45)$$

называемое *сдвигом*.

Таким образом, *аффинные преобразования*, определяющие при дополнении n -пространства до проективного n -пространства гомологии в этом n -пространстве, представляют собой *гомотетии*, *преобразования родства*, *переносы* и *сдвиги*.

В частности, отсюда следует, что *всякое аффинное преобразование с точечно неподвижной плоскостью является преобразованием родства или сдвигом*.

9.3.9. Перспективное отображение плоскостей. Отображение плоскости α проективного n -пространства на плоскость α' того же пространства, устанавливаемое центральным проектированием точек плоскости α на плоскость α' из точки S , не лежащей на этих плоскостях, называется *перспективным отображением*¹² плоскости α на плоскость α' (рис. 9.24, a). Центр проектирования в этом случае называют *центром перспективы* плоскостей.

Необходимое и достаточное условие того, что проективное отображение друг на друга двух плоскостей в n -пространстве является перспективным отображением, состоит в том, что точки $(n-2)$ -плоскости пересечения этих плоскостей соответствуют сами себе. Необхо-

димость этого условия очевидна, так как если данная плоскость α проектируется на плоскость α' из точки S и плоскости α и α' пересекаются по $(n - 2)$ -плоскости a , каждая точка O этой $(n - 2)$ -плоскости, рассматриваемая как точка плоскости α , проектируется из точки S в себя. Для доказательства достаточности рассмотрим коллинеарное отображение плоскости α на плоскость α' , при котором $(n - 2)$ -плоскость α пересечения этих плоскостей

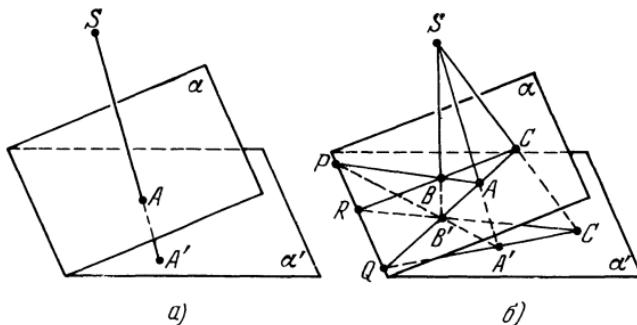


Рис. 9.24.

переходит в себя, а точки A, B, C плоскости α соответственно переходят в точки A', B', C' плоскости α' (рис. 9.24, б). Обозначим точки пересечения прямых AB, AC, BC с $(n - 2)$ -плоскостью a соответственно через P, Q, R . Так как точки P, Q, R при отображении плоскостей переходят в себя, эти точки лежат соответственно на прямых $A'B', A'C', B'C'$. Так как прямые AB и $A'B'$ пересекаются в точке P , они лежат в одной 2-плоскости, поэтому прямые AA' и BB' , лежащие в этой 2-плоскости, пересекаются. Обозначим точку пересечения прямых AA' и BB' через S . Точно так же из того, что прямые AC и $A'C'$ пересекаются в точке Q , вытекает, что прямая CC' пересекается с прямой AA' , а из того, что прямые BC и $B'C'$ пересекаются в точке R вытекает, что прямая CC' пересекается с прямой BB' . Так как прямая CC' не лежит в 2-плоскости прямых AA' и BB' , отсюда следует, что эта прямая пересекает обе прямые AA' и BB' в одной и той же точке — в точке S пересечения этих прямых. Спроектируем теперь плоскость α на плоскость α' из точки S . При этом проектировании точки A, B, C и все точки

$(n - 2)$ -плоскости a соответственно переходят в точки A', B', C' и те же точки $(n - 2)$ -плоскости a . Так как и при данном коллинеарном отображении и при отображении, устанавливаемом проектированием из точки S точки A, B, C и точки $(n - 2)$ -плоскости a соответственно переходят в точки A', B', C' и те же точки $(n - 2)$ -плоскости a , а коллинеарное отображение двух плоскостей n -пространства вполне определяется $n + 1$ парами соответственных точек, не лежащих по n на одной $(n - 2)$ -плоскости, эти два коллинеарных отображения совпадают, т. е. данное отображение устанавливается проектированием из точки S .

Если совместить плоскость α' с плоскостью α поворотом вокруг $(n - 2)$ -плоскости a пересечения этих плоскостей, мы получим преобразование плоскости α в себя, являющееся гомологией. В самом деле, в силу коллинеарности отображения плоскости α на плоскости α' наше преобразование плоскости является коллинеацией. Так как точки $(n - 2)$ -плоскости a переходят в себя как при проектировании, так и при повороте, они являются неподвижными точками этой коллинеации. Поэтому эта коллинеация является гомологией.

9.3.10. Невырожденные m -гомологии. Будем называть *невырожденной m -гомологией* коллинеацию пространства, обладающую точечно неподвижными непересекающимися m -плоскостью и $(n - m - 1)$ -плоскостью, называемыми m -плоскостью и $(n - m - 1)$ -плоскостью m -гомологии. Невырожденная гомология является частным случаем невырожденной m -гомологии при $m = 0$ и $m = n - 1$.

В том случае, когда m -плоскостью и $(n - m - 1)$ -плоскостью невырожденной гомологии являются плоскости $E_0 E_1 \dots E_m$ и $E_{m+1} \dots E_n$, невырожденная m -гомология имеет вид

$$'x^a = \lambda x^a \quad (a \leq m), \quad 'x^u = \mu x^u \quad (u > m). \quad (9.46)$$

Невырожденная m -гомология является частным случаем коллинеации (9.29), где $\lambda_a = \lambda$, $\lambda_u = \mu$.

В том случае, когда m -плоскость невырожденной m -гомологии лежит в бесконечно удаленной плоскости

n -пространства при его дополнении до проективного n -пространства, m -гомология является частным случаем аффинного преобразования, называемым *преобразованием m -родства* (см. 4.1.11).

9.3.11. Инволюционные коллинеации. Найдем *инволюционные коллинеации* n -пространства, т. е. такие коллинеации, которые совпадают с обратными им коллинеациями, или, что равносильно этому, коллинеации, квадраты которых являются тождественным преобразованием. Поэтому если мы запишем инволюционную коллинеацию в виде ' $x = Ax$, то ее квадрат должен иметь вид

$$'x = A^2x = \lambda x, \quad (9.47)$$

т. е. квадрат оператора A должен иметь вид λI . Так как матрица оператора λI — диагональная матрица вида $(\lambda \delta_{ij}^2)$, а квадраты неособенных матриц, не приводимых к диагональному виду, являются матрицами, также не приводимыми к диагональному виду, матрица оператора A инволюционной коллинеации приводится к диагональному виду. Так как собственные числа оператора A^2 равны квадратам собственных чисел оператора A , а собственные числа оператора A^2 равны λ , собственные числа оператора A равны $\pm \sqrt{\lambda}$. Если мы потребуем, чтобы определители матриц инволюционных коллинеаций были бы равны ± 1 , мы получим, что собственные числа оператора могут принимать значения $+1$ или -1 , если $\lambda > 0$, и i или $-i$, если $\lambda < 0$. В первом случае инволюционная коллинеация имеет вид

$$'x^a = x^a \quad (a \leq m), \quad 'x^u = -x^u \quad (u > m), \quad (9.48)$$

т. е. является невырожденной m -гомологией, при $m = 0$ или $n - 1$ — невырожденной гомологией. Поэтому будем называть инволюционную коллинеацию в этих случаях *инволюционной m -гомологией* или *инволюционной гомологией*; при $n = 2m + 1$ инволюционную m -гомологию называют *гиперболической инволюцией*.

Во втором случае инволюционной коллинеации собственных чисел i должно быть столько же, сколько собственных чисел $-i$, вследствие чего этот случай может иметь место только при нечетном n . В этом случае инво-

люционная коллинеация может быть записана в виде

$$'x^{2i} = -x^{2i+1}, \quad 'x^{2i+1} = x^{2i}. \quad (9.49)$$

Инволюционную коллинеацию этого типа называют *эллиптической инволюцией*.

Точечно неподвижные m -плоскость и $(n-m-1)$ -плоскость инволюционной m -гомологии (9.48) определяются уравнениями $x^u = 0$ и $x^a = 0$. Если инволюционная гомология (9.48) переводит точку $M(x)$ в точку $M'('x')$, то прямая MM' пересекает m -плоскость $x^u = 0$ в точке $P(z)$ с координатами $z^a = x^a, z^u = 0$, а $(n-m-1)$ -плоскость $x^a = 0$ в точке $Q(w)$ с координатами $w^a = 0, w^u = x^u$. Так как формула (9.48) равносильна формулам

$$x = z + w, \quad 'x = z - w, \quad (9.50)$$

мы находим, что двойное отношение $\overline{PQ, MM'}$ равно -1 . Таким образом, при инволюционной m -гомологии всякая точка n -пространства переходит в такую точку M' , что точки M и M' гармонически делят точки пересечения прямой MM' с m -плоскостью и $(n-m-1)$ -плоскостями этой m -гомологии. Такое же рассуждение при $m=0$ или $n-1$ показывает, что при инволюционной гомологии всякая точка M n -пространства переходит в такую точку M' , что точки M и M' гармонически делят центр этой гомологии и точку пересечения прямой MM' с плоскостью этой гомологии. Это же видно и из того, что если при

инволюционной гомологии точки A и B переходят соответственно в точки A' и B' , то прямые AA' и BB' пересекаются в центре O гомологии, а прямые AB и $A'B'$ и прямые AB' и $A'B$ пересекаются в точках P и Q плоскости гомологии (рис. 9.25). Поэтому если рассматривать прямые $AB, A'B', AB'$ и $A'B$ как четыре прямые полного

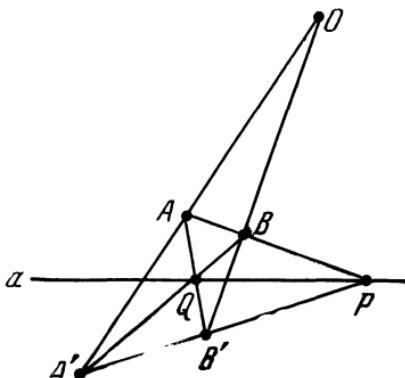


Рис. 9.25.

четырехсторонника, диагоналями этого четырехсторонника являются прямые AA' , BB' и прямая PQ на плоскости гомологии, но точки пересечения двух диагоналей полного четырехсторонника с его третьей диагональю гармонически делят пару вершин четвертого четырехсторонника, расположенных на этой диагонали.

Если мы условимся называть конфигурацию, состоящую из непересекающихся m -плоскости и $(n - m - 1)$ -плоскости m -парой, а конфигурацию, состоящую из точки и плоскости, не проходящей через точку, 0 -парой, мы можем называть инволюционную m -гомологию *отражением от m -пары*, а инволюционную гомологию — *отражением от 0 -пары*.

Заметим, что прямое и косое отражение от m -плоскости (см. 4.1.9) является частным случаем отражения от m -пары, а отражение от точки и прямое и косое отражение от плоскости являются частными случаями отражения от 0 -пары¹³.

Эллиптическая инволюция (9.49) обладает двумя мнимо-сопряженными точечно неподвижными $\frac{n-1}{2}$ -плоскостями

$$x^{2j} + ix^{2j+1} = 0 \text{ и } x^{2j} - ix^{2j+1} = 0$$

(названия «эллиптическая инволюция» и «гиперболическая инволюция» подчеркивают аналогию между эллиптической инволюцией, обладающей указанными мнимыми точечно неподвижными $\frac{n-1}{2}$ -плоскостями и гиперболической инволюцией, обладающей двумя вещественными точечно неподвижными $\frac{n-1}{2}$ -плоскостями). Так же как для инволюционной m -инволюции показывается, что при эллиптической инволюции всякая точка M n -пространства переходит в такую точку M' , что точки M и M' гармонически делят две мнимо-сопряженные точки пересечения прямой MM' с мнимыми точечно неподвижными $\frac{n-1}{2}$ -плоскостями эллиптической инволюции. Поэтому эллиптическую инволюцию называют *отражением от мнимой $\frac{n-1}{2}$ -пары*.