§ 4. Геометрия m-плоскостей

9.4.1. Пересечение и сумма m-плоскости и l-плоскости. В 3.3.11 мы видели, что размерности m и l пересекающихся m-плоскости и l-плоскости n-пространства связаны с размерностью d их пересечения и с размерностью s их суммы соотношением (3.88), т. е.

$$m + l = s + d. \tag{9.51}$$

Так как каждая m-плоскость проективного n-пространства изображается $(m+1)$-плоскостью, проходящей через центр $(n+1)$-связки прямых в $(n+1)$-пространстве, мы находим, что для m-плоскости и l-плоскости проективного n-пространства, пересекающихся по d-плоскости и имеющих своей суммой s-плоскость, имеет место соотношение

$$(m+1) + (l+1) = (s+1) + (d+1).$$

Так как это соотношение равносильно соотношению (9.51), мы получаем, что *размерности m-плоскости и l-плоскости проективного n-пространства связаны с размерностью d их пересечения и с размерностью s их суммы соотношением* (9.51).

9.4.2. Проективные операторные координаты m-плоскости. Если m-плоскость проективного n-пространства задана $m+1$ линейно независимыми точками M_a $(\mathbf{x}_a)$ $(a, b, \ldots = 0, 1, \ldots, m)$ этой m-плоскости или $n-m$ линейно независимыми плоскостями $\alpha^u(\mathbf{u}^u)$ $(u, v, \ldots = m+1, \ldots, n)$, пересекающимися по этой m-плоскости, то координаты x_a^i и u_i^u точек M_a и плоскостей α^u можно рассматривать как матрицы прямоугольных операторов

$$\mathbf{X} = (x_a^i), \qquad \mathbf{U} = (u_i^u). \tag{9.52}$$

Будем называть операторы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{U}$ *проективными операторными координатами m-плоскости* [14] и обозначать m-плоскость p с операторными координатами $\mathbf{X}$ и $\mathbf{U}$ соответственно $p(\mathbf{X})$ и $p(\mathbf{U})$.

Если перейти от точек M_a к другой системе линейно независимых точек N_a (y_a) m-плоскости, а от плоскостей

α^u к другой системе линейно независимых плоскостей $\beta^u(\mathbf{v}^u)$, пересекающихся по m-плоскости, векторы $\mathbf{y}_a$ и $\mathbf{v}^u$ являются линейными комбинациями соответственно векторов $\mathbf{x}_a$ и $\mathbf{u}^u$

$$\mathbf{y}_a = \mathbf{x}_b k_a^b, \qquad \mathbf{v}^u = l_v^u \mathbf{u}^v. \tag{9.53}$$

Соотношения (9.53) можно переписать в операторной форме в виде

$$\mathbf{Y} = \mathbf{XK}, \qquad \mathbf{V} = \mathbf{LU}, \tag{9.54}$$

где $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ — квадратные операторы соответственно $(m+1)$-пространства и $(n-m)$-пространства. Таким образом, *операторные координаты* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{U}$ *m-плоскости определены с точностью, соответственно, до умножения справа на квадратный оператор $(m+1)$-пространства и до умножения слева на квадратный оператор $(n-m)$-пространства.*

При $m = 0$ матрица оператора $\mathbf{X}$ состоит из одного столбца, элементы которого являются проективными координатами точки проективного n-пространства, а при $m = n - 1$ матрица оператора $\mathbf{U}$ состоит из одной строки, элементы которой являются проективными координатами плоскости n-пространства. Поэтому при $m = 0$ оператор $\mathbf{X}$ можно рассматривать как вектор $\mathbf{x}$, представляющий точку, а при $n = m - 1$ оператор $\mathbf{U}$ можно рассматривать как вектор $\mathbf{u}$, представляющий плоскость; в этих двух случаях операторы $\mathbf{K}$ и $\mathbf{L}$ являются числами. Таким образом, проективные операторные координаты m-плоскостей являются обобщениями проективных координат точек и плоскостей.

Заметим, что так как координаты x_a^i точек M_a, лежащих на m-плоскости, и координаты u_i^u плоскостей α^u, проходящих через m-плоскость, связаны соотношениями

$$u_i^u x_a^i = 0, \tag{9.55}$$

операторные координаты $\mathbf{X}$ и $\mathbf{U}$ одной и той же m-плоскости связаны соотношением

$$\mathbf{UX} = \mathbf{O}. \tag{9.56}$$

9.4.3. Проективные преобразования в проективных операторных координатах. При коллинеации $'\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, при которой в силу формулы (9.25) векторы $\mathbf{u}$, представляющие плоскости, преобразуются по закону $'\mathbf{u} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{A}^{-1}$, векторы $\mathbf{x}_a$ и $\mathbf{u}^u$ преобразуются по законам

$$'\mathbf{x}_a = \mathbf{A}\mathbf{x}_a, \quad '\mathbf{u}^u = \mathbf{u}^u\mathbf{A}^{-1} \tag{9.57}$$

и, следовательно, операторы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{U}$ преобразуются по законам

$$'\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad '\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{A}^{-1}. \tag{9.58}$$

При корреляции $'\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, при которой в силу формулы (9.36) векторы $\mathbf{u}$, представляющие плоскости, преобразуются по закону $'\mathbf{x} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathbf{A}^{-1}$, векторы $\mathbf{x}_a$ и $\mathbf{u}^u$ преобразуются по законам

$$'\mathbf{u}^a = \mathbf{A}\mathbf{x}_a, \quad '\mathbf{x}_u = \mathbf{u}^u\mathbf{A}^{-1} \tag{9.59}$$

и, следовательно, операторы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{U}$ преобразуются по законам

$$'\mathbf{U} = (\mathbf{A}\mathbf{X})^{\mathrm{T}} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}, \quad '\mathbf{X} = (\mathbf{U}\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}. \tag{9.60}$$

9.4.4. Размерность пересечения m-плоскостей в проективных операторных координатах. Из определения операторных координат $\mathbf{X}$ и $\mathbf{U}$ m-плоскости проективного n-пространства видно, что они совпадают с операторами, определяющими операторные уравнения (3.59) и (3.60) $(m+1)$-плоскости, проходящей через центр $(n+1)$-связки в $(n+1)$-пространстве и изображающей m-плоскость проективного n-пространства. Пусть теперь m-плоскость p проективного n-пространства определяется операторными координатами $\mathbf{X}$ и $\mathbf{U}$, а m-плоскость q определяется операторными координатами $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{V}$. В **3.3.11** мы видели, что необходимым и достаточным условием того, чтобы две $(m+1)$-плоскости $(n+1)$-пространства с общей точкой, определяемые этими операторами, не имели бы других общих точек, является неособенность матрицы оператора $\mathbf{UY}$ или $\mathbf{VX}$, а необходимым и достаточным условием того, чтобы те же две $(m+1)$-плоскости $(n+1)$-пространства пересекались бы по $(d+1)$-плоскости, является равенство ранга матриц $\mathbf{UY}$ и $\mathbf{VX}$ числу $m-d$. Так как пересечение $(m+1)$-плоскостей $(n+1)$-про-

странства в точке соответствует пересечению соответственных m-плоскостей проективного n-пространства, а пересечение $(m+1)$-плоскостей по $(d+1)$-плоскости соответствует пересечению m-плоскостей по d-плоскости, мы получаем, что *необходимым и достаточным условием того, что m-плоскости p и q не пересекаются, является неособенность матрицы оператора* **UY** *или* **VX**, *а необходимым и достаточным условием того, что m-плоскости p и q пересекаются по d-плоскости, является равенство ранга матриц* **UY** *и* **VX** *числу* $m-d$.

Для одной и той же m-плоскости, когда $\mathbf{X}=\mathbf{Y}$ и $\mathbf{U}=\mathbf{V}$, пересечение совпадает с самой m-плоскостью, т. е. $d=m$, и, следовательно, ранг матрицы **UX** равен 0, что соответствует выполнению соотношения (9.56).

9.4.5. Проектирование на m-плоскость в направлении $(n-m-1)$-плоскости[15]. Рассмотрим m-плоскость $p(\mathbf{X})$ проективного n-пространства и $(n-m-1)$-плоскость $r(\mathbf{U})$ того же пространства. Будем предполагать, что m-плоскость p и $(n-m-1)$-плоскость r не пересекаются, откуда следует, что матрица оператора **UX** неособенная. Проведем через произвольную точку $M(\mathbf{x})$ n-пространства прямую, пересекающую m-плоскость p в точке $P(\mathbf{y})$, а $(n-m-1)$-плоскость r — в точке $R(\mathbf{z})$ (рис. 9.26). Будем называть точку P *проекцией* точки M на m-плоскость p в направлении $(n-m-1)$-плоскости r, а точку R—проекций точки M на $(n-m-1)$-плоскость r в направлении m-плоскости p. Так как точки M, P и R лежат на одной прямой, эти точки могут быть представлены векторами $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ (см. 9.1.3), связанными соотношением

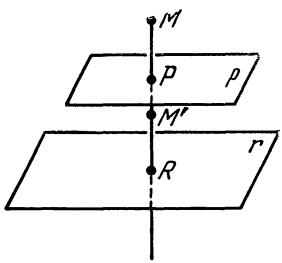

Рис. 9.26.

$$\mathbf{x}=\mathbf{y}+\mathbf{z}. \tag{9.61}$$

Так как точка $P(\mathbf{y})$ лежит на плоскости p, определяемой точками $M_a(\mathbf{x}_a)$, координаты точки P можно записать в виде

$$y^i = x_a^i k^a, \tag{9.62}$$

что можно переписать в векторной форме в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{Xk}. \tag{9.63}$$

Запишем условие принадлежности точки $R(\mathbf{z})$ ($n - m - 1$)-плоскости r, уравнения которой имеют вид $u_i^a x^i = 0$:

$$u_i^a z^i = u_i^a (x^i - y^i) = u_i^a (x^i - x_b^i k^b) = 0, \tag{9.64}$$

что можно переписать в векторной форме в виде

$$\mathbf{Uz} = \mathbf{U}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{U}(\mathbf{x} - \mathbf{Xk}) = \mathbf{o}. \tag{9.65}$$

Равенство (9.65) равносильно равенству

$$\mathbf{Ux} = (\mathbf{UX})\mathbf{k}, \tag{9.66}$$

откуда находим

$$\mathbf{k} = (\mathbf{UX})^{-1}\mathbf{Ux} \tag{9.67}$$

и, подставляя вектор $\mathbf{k}$ в формулу (9.63), получаем вектор $\mathbf{y}$, представляющий точку P, в функции вектора $\mathbf{x}$, в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\,(\mathbf{UX})^{-1}\mathbf{Ux}. \tag{9.68}$$

Существование оператора $(\mathbf{UX})^{-1}$ вытекает из неособенности матрицы оператора $\mathbf{UX}$.

Отсюда в силу соотношения (9.61) находим вектор $\mathbf{z}$, представляющий точку R в функции вектора $\mathbf{x}$, в виде

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} = [\mathbf{I} - \mathbf{X}\,(\mathbf{UX})^{-1}\mathbf{U}]\,\mathbf{x}. \tag{9.69}$$

9.4.6. Отражение от m-пары. Если m-пара состоит из m-плоскости p и ($n - m - 1$)-плоскости r и точка $M'('\mathbf{x})$ разделяет вместе с точкой M пару точек P и R пересечения прямой MM' с m-плоскостью p и ($n - m - 1$)-плоскостью r (рис. 9.26), то

$$'\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{z} \tag{9.70}$$

и из формул (9.68) и (9.69) следует, что

$$'\mathbf{x} = \mathbf{y} - \mathbf{z} = [2\mathbf{X}\,(\mathbf{UX})^{-1}\mathbf{U} - \mathbf{I}]\,\mathbf{x}. \tag{9.71}$$

9.4.7. Двойное отношение двух m-пар. Рассмотрим две m-пары, состоящие из m-плоскостей $p(\mathbf{X})$ и $q(\mathbf{Y})$ и ($n - m - 1$)-плоскостей $r(\mathbf{U})$ и $s(\mathbf{V})$, и найдем преобразование m-плоскости p, состоящее из проектирования ее

точек на m-плоскость q в направлении $(n-m-1)$-плоскости s и из проектирования полученных точек m-плоскости q на m-плоскость p в направлении $(n-m-1)$-плоскости r (рис. 9.27). При первом проектировании точка $M(\mathbf{x})$ проектируется в точку N m-плоскости q, представляемую вектором

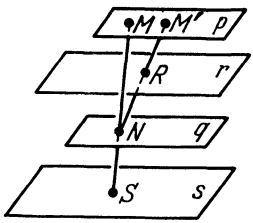

Рис. 9.27.

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}\,(\mathbf{V}\mathbf{Y})^{-1}\mathbf{V}\mathbf{x}, \qquad (9.72)$$

при втором проектировании точка Q проектируется в точку M' m-плоскости p, представляемую вектором

$$'\mathbf{x} = \mathbf{X}\,(\mathbf{U}\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{U}\mathbf{y}, \qquad (9.73)$$

поэтому

$$'\mathbf{x} = \mathbf{X}\,(\mathbf{U}\mathbf{X})^{-1}\,(\mathbf{U}\mathbf{Y})\,(\mathbf{V}\mathbf{Y})^{-1}\,\mathbf{V}\mathbf{x}. \qquad (9.74)$$

Если мы запишем вектор $\mathbf{x}$ в форме (9.61), а вектор $'\mathbf{x}$ — в аналогичной форме $'\mathbf{x} = \mathbf{X}'\mathbf{k}$, то, подставляя эти значения векторов $\mathbf{x}$ и $'\mathbf{x}$ в формулу (9.74), мы получим выражение вектора $'\mathbf{k}$, определяющего точку M', через вектор $\mathbf{k}$, определяющий точку M, в виде

$$'\mathbf{k} = (\mathbf{U}\mathbf{X})^{-1}\,(\mathbf{U}\mathbf{Y})\,(\mathbf{V}\mathbf{Y})^{-1}\,(\mathbf{V}\mathbf{X})\,\mathbf{k}. \qquad (9.75)$$

Преобразование (9.74) является коллинеацией m-плоскости p с оператором

$$\mathbf{W} = (\mathbf{U}\mathbf{X})^{-1}\,(\mathbf{U}\mathbf{Y})\,(\mathbf{V}\mathbf{Y})^{-1}\,(\mathbf{V}\mathbf{X}). \qquad (9.76)$$

Так как при $m = 0$ оператор $\mathbf{W}$ является числом, совпадающим с двойным отношением (9.19) двух точек и двух плоскостей, будем называть оператор $\mathbf{W}$ *двойным отношением двух m-пар* [16].

Заменяя в выражении оператора $\mathbf{W}$ операторы $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ операторами $\mathbf{XK}$, $\mathbf{YL}$, $\mathbf{MU}$, $\mathbf{NV}$, являющимися операторными координатами тех же m-плоскостей p и q и $(n-m-1)$-плоскостей r и s, мы получим оператор

$$'\mathbf{W} = (\mathbf{MUXK})^{-1}(\mathbf{MUYL})(\mathbf{NVYL})^{-1}(\mathbf{NVXK}) =$$
$$= \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{UX})^{-1}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M}(\mathbf{UY})\mathbf{LL}^{-1}(\mathbf{VY})^{1-}\mathbf{N}^{1-}\mathbf{N}(\mathbf{VX})\mathbf{K} =$$
$$= \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{UX})^{-1}(\mathbf{UY})(\mathbf{VY})^{-1}(\mathbf{VX})\mathbf{K},$$

т. е.

$$'\mathbf{W} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{K}. \tag{9.77}$$

Таким образом, *оператор* $\mathbf{W}$ *двойного отношения двух m-пар определен с точностью до преобразования* (9.77), *где* $\mathbf{K}$ — *произвольный обратимый оператор* $(m+1)$-*пространства*.

При коллинеации $'\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ операторы $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ в силу (9.56) переходят, соответственно, в операторы $\mathbf{AX}$, $\mathbf{AY}$, $\mathbf{UA}^{-1}$ и $\mathbf{VA}^{-1}$.

Заменяя в выражении оператора $\mathbf{W}$ операторы $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ этими операторами, мы получим оператор

$$'\mathbf{W} = (\mathbf{UA}^{-1}\mathbf{AX})^{-1}(\mathbf{UA}^{-1}\mathbf{AY})(\mathbf{VA}^{-1}\mathbf{AY})^{-1}(\mathbf{VA}^{-1}\mathbf{AX}) = \\ = (\mathbf{UX})^{-1}(\mathbf{UY})(\mathbf{VY})^{-1}(\mathbf{VX}) = \mathbf{W},$$

откуда видно, что *при коллинеациях проективного n-пространства оператор* $\mathbf{W}$ *двойного отношения двух m-пар не изменяется или изменяется по закону* (9.77).

При корреляции $'\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ операторы $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ в силу (9.58) переходят, соответственно, в операторы $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}$ и $(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$. Заменяя в выражении оператора $\mathbf{W}$ операторы $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ этими операторами, мы получим оператор

$$'\mathbf{W} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{U}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{V}^{\mathrm{T}})(\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{V}^{\mathrm{T}})^{-1}\cdot \\ \cdot(\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}) = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{\mathrm{T}})(\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{Y}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}) = \\ = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}),$$

откуда видно, что *при корреляциях проективного n-пространства оператор* $\mathbf{W}$ *двойного отношения двух m-пар изменяется по закону*

$$'\mathbf{W} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}. \tag{9.78}$$

9.4.8. Трансверсали двух m-пар. Рассмотрим те точки M_a m-плоскости p, которые остаются неподвижными при коллинеации $'\mathbf{k} = \mathbf{W}\mathbf{k}$ этой m-плоскости (рис. 9.28). Эти точки представляются векторами $\mathbf{x}_a = \mathbf{X}\mathbf{k}_a$, причем векторы $\mathbf{k}_a$ являются собственными векторами оператора $\mathbf{W}$. Так как оператор $\mathbf{W}$ — оператор $(m+1)$-пространства, то в том случае, когда матрица этого оператора приводится

к диагональному виду $(w_a\delta_b^a)$ с различными собственными числами w_a, коллинеация $'\mathbf{k} = \mathbf{W}\mathbf{k}$ имеет $m+1$ различных неподвижных точек M_a.

Так как в случае совпадения точек M и M' прямые MNS и NRM' совпадают, точки M_a определяют прямые, пересекающиеся со всеми m-плоскостями и $(n-m-1)$-плоскостями данных m-пар. Будем называть такие прямые *трансверсалями* двух m-пар. Поэтому *в том случае, когда матрица оператора* $\mathbf{W}$ *приводится к диагональному виду с различными собственными числами, две m-пары обладают $m+1$ трансверсалями* [17].

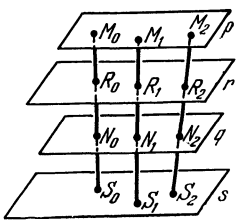

Рис. 9.28.

В том случае, когда собственные числа w_a и w_b оператора $\mathbf{W}$ комплексно сопряжены, им соответствуют две мнимо сопряженные точки M_a и M_b m-плоскости p и две мнимо сопряженные трансверсали m-пар. В том случае, когда собственные числа w_a и w_b оператора $\mathbf{W}$ совпадают, соответственные трансверсали m-пар совпадают или через каждую точку прямой M_aM_b m-плоскости p проходят трансверсали m-пар.

Собственное число w_a оператора $\mathbf{W}$ *равно двойному отношению* $\overline{M_aN_a,\ R_aS_a}$ *точек пересечения трансверсали M_aN_a с m-плоскостями и $(n-m-1)$-плоскостями m-пары*: пусть $'\mathbf{k}_a = \mathbf{W}\mathbf{k}_a = w_a\mathbf{k}_a$. Тогда точка M_a представляется вектором $\mathbf{x}_a$, точка N_a, являющаяся проекцией точки M_a на m-плоскость q в направлении $(n-m-1)$-плоскости s, представляется вектором

$$\mathbf{y}_a = \mathbf{Y}\,(\mathbf{V}\mathbf{Y})^{-1}\,(\mathbf{V}\mathbf{X})\mathbf{k}_a$$

и произвольная точка трансверсали M_aN_a представляется вектором

$$\mathbf{x}_a + \lambda\mathbf{y}_a = [\mathbf{X} + \lambda\mathbf{Y}\,(\mathbf{V}\mathbf{Y})^{-1}\,(\mathbf{V}\mathbf{X})]\mathbf{k}_a.$$

Значения λ, соответствующие точкам R_a и S_a пересечения этой трансверсали с $(n-m-1)$-плоскостями r и s, определяются из соотношений

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}_a + \lambda\mathbf{y}_a) = \mathbf{o}, \qquad \mathbf{V}(\mathbf{x}_a + \mu\mathbf{y}_a) = \mathbf{o}. \tag{9.79}$$

Первое из соотношений (9.79) можно переписать в виде

$$(\mathbf{UX})\mathbf{k}_a + \lambda\,(\mathbf{UY})\,(\mathbf{VY})^{-1}\,(\mathbf{VX})\mathbf{k}_a = \mathbf{o}$$

или, умножая обе части этого равенства слева на $(\mathbf{UX})^{-1}$,

$$\mathbf{k}_a + \lambda\,(\mathbf{UX})^{-1}\,(\mathbf{UY})\,(\mathbf{VY})^{-1}(\mathbf{VX})\,\mathbf{k}_a = \mathbf{o},$$

т. е.

$$\mathbf{k}_a + \lambda\mathbf{W}\mathbf{k}_a = \mathbf{k}_a + \lambda w_a\mathbf{k}_a = \mathbf{o},$$

откуда находим, что $\lambda = -\dfrac{1}{w_a}$.

Второе из соотношений (9.79) можно переписать в виде

$$(\mathbf{VX})\,\mathbf{k}_a + \mu\,(\mathbf{VX})\,\mathbf{k}_a = \mathbf{o},$$

откуда находим, что $\mu = -1$. Поэтому $\overline{M_aN_a,\ R_aS_a} = \dfrac{\mu}{\lambda} = w_a$.

9.4.9. Аффинные операторные координаты m-плоскостей. Рассмотрим m-плоскость p с проективной операторной координатой $\mathbf{X} = (x_a^i)$, не пересекающуюся с координатной $(n-m-1)$-плоскостью $E_{m+1}E_{m+2}\ldots E_n$, уравнения которой имеют вид $x^a = 0$.

Если m-плоскость пересекается с указанной $(n-m-1)$-плоскостью, то, полагая в соотношении (9.51) $l = n-m-1$ и $d > 0$, мы получим $s < n$, т. е. m-плоскость и $(n-m-1)$-плоскость лежат в некоторой плоскости. Так как уравнение плоскости, проходящей через $(n-m-1)$-плоскость $x^a = 0$, имеет вид $k_ax^a = 0$, мы находим, что в этом случае элементы x_a^i матрицы оператора $\mathbf{X}$ связаны соотношением $k_ax_b^a = 0$, т. е. в этом случае матрица $\mathbf{X}^0 = (x_b^a)$, состоящая из верхних $m+1$ строк матрицы оператора $\mathbf{X}$, должна быть особенной матрицей. Поэтому в случае, когда m-плоскость не пересекается с указанной $(n-m-1)$-плоскостью, матрица $\mathbf{X}^0 = (x_b^a)$ является неособенной матрицей, и если мы разделим матрицу $\mathbf{X}$ на квадратную матрицу $\mathbf{X}^0 = (x_a^b)$, состоящую из ее верхних $m+1$ строк, и на матрицу $\mathbf{X}^1 = (x_a^u)$, состоящую из ее нижних $n-m$ строк, то в этом случае существует

оператор $(\mathbf{X}^0)^{-1}$, и мы можем определить оператор

$$\overline{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^1 (\mathbf{X}^0)^{-1}. \tag{9.80}$$

Будем называть оператор $\overline{\mathbf{X}}$ *аффинной операторной координатой m-плоскости p.*

При $m = 0$ $(n - m - 1)$-плоскость можно рассматривать как бесконечно удаленную плоскость аффинного n-пространства, матрица оператора $\mathbf{X}$ состоит из одного столбца, роль матрицы $\mathbf{X}^0$ играет координата x^0, а элементы матрицы $\overline{\mathbf{X}}$ являются аффинными координатами точки аффинного n-пространства. Поэтому при $m = 0$ оператор $\overline{\mathbf{X}}$ можно рассматривать как радиус-вектор $\mathbf{x}$ точки. Таким образом, аффинная операторная координата является обобщением аффинных координат точек.

Аффинная операторная координата m-плоскости не зависит от выбора точек M_a на этой m-плоскости: при переходе от точек M_a к точкам N_a в силу (9.54) перспективная операторная координата $\mathbf{X}$ заменяется на оператор $\mathbf{XK}$, поэтому при этом переходе операторы $\mathbf{X}^0$ и $\mathbf{X}^1$ также заменяются соответственно на операторы $\mathbf{X}^0\mathbf{K}$ и $\mathbf{X}^1\mathbf{K}$, но

$$(\mathbf{X}^1\mathbf{K})\ (\mathbf{X}^0\mathbf{K})^{-1} = \mathbf{X}^1\mathbf{K}\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{X}^0)^{-1} = \mathbf{X}^1 (\mathbf{X}^0)^{-1} = \overline{\mathbf{X}}.$$

Операторная координата $\overline{\mathbf{X}}$ m-плоскости может быть выражена и через операторную координату $\mathbf{U}$ той же m-плоскости: если мы разделим матрицу $\mathbf{U} = (u_i^u)$ на матрицу $\mathbf{U}_0 = (u_a^u)$, состоящую из ее левых $m + 1$ столбцов, и на квадратную матрицу $\mathbf{U}_1 = (u_v^u)$, состоящую из ее первых $n - m$ столбцов, то, как нетрудно проверить, в этом случае существует оператор $\mathbf{U}_1^{-1}$. Условие (9.56) в этом случае можно переписать в виде

$$\mathbf{U}_0\mathbf{X}^0 + \mathbf{U}_1\mathbf{X}^1 = 0$$

и, умножая это равенство слева на $\mathbf{U}_1^{-1}$, а справа на $(\mathbf{X}^0)^{-1}$, мы получим

$$\overline{\mathbf{X}} = -\mathbf{U}_1^{-1}\mathbf{U}_0. \tag{9.81}$$

Разделение матрицы $\mathbf{X}$ на матрицы $\mathbf{X}^0$ и $\mathbf{X}^1$ и разделение матрицы $\mathbf{U}$ на матрицы $\mathbf{U}_0$ и $\mathbf{U}_1$ можно схематически

изобразить в виде

$$\mathbf{X} = \left|\begin{array}{c} \mathbf{X}^0 \\ \hline \mathbf{X}^1 \end{array}\right|, \qquad \mathbf{U} = \left|\begin{array}{c|c} \mathbf{U}_0 & \mathbf{U}_1 \end{array}\right|. \tag{9.82}$$

Матрица $\bar{\mathbf{X}}$ имеет то же число строк и столбцов, что и матрицы $\mathbf{X}^1$ и $\mathbf{U}_0$. Число $(m+1)(n-m)$ элементов матрицы $\bar{\mathbf{X}}$ совпадает с числом (3.111), равным размерности многообразия всех m-плоскостей n-пространства; элементы $\mathbf{X}_a^u$ матрицы $\bar{\mathbf{X}}$ можно рассматривать как параметры многообразия всех m-плоскостей n-пространства, не пересекающихся с $(n-m-1)$-плоскостью $x^a = 0$.

9.4.10. Проективные преобразования в аффинных операторных координатах. Разделим матрицы $\mathbf{A}$ коллинеации $'\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ и корреляции $'\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ на четыре подматрицы, состоящие из $m+1$ и $n-m$ строк и столбцов, которые мы обозначим соответственно $\mathbf{A}_0^0$, $\mathbf{A}_1^0$, $\mathbf{A}_0^1$, $\mathbf{A}_1^1$ и $\mathbf{A}_{00}$, $\mathbf{A}_{01}$, $\mathbf{A}_{10}$, $\mathbf{A}_{11}$:

$$\mathbf{A} = \left|\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_0^0 & \mathbf{A}_1^0 \\ \hline \mathbf{A}_0^1 & \mathbf{A}_1^1 \end{array}\right|, \qquad \mathbf{A} = \left|\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{00} & \mathbf{A}_{01} \\ \hline \mathbf{A}_{10} & \mathbf{A}_{11} \end{array}\right|. \tag{9.83}$$

В этом случае первые формулы (9.58) и (9.60) можно переписать соответственно в виде

$$'\mathbf{X}^0 = \mathbf{A}_0^0\mathbf{X}^0 + \mathbf{A}_1^0\mathbf{X}^1, \quad '\mathbf{X}^1 = \mathbf{A}_0^1\mathbf{X}^0 + \mathbf{A}_1^1\mathbf{X}^1 \tag{9.84}$$

и

$$'\mathbf{U}_0 = (\mathbf{X}^0)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{00}^{\mathrm{T}} + (\mathbf{X}^1)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{01}^{\mathrm{T}}, \quad '\mathbf{U}_1 = (\mathbf{X}^0)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{10}^{\mathrm{T}} + (\mathbf{X}^1)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{11}^{\mathrm{T}}. \tag{9.85}$$

Поэтому при коллинеации $'\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ оператор $\bar{\mathbf{X}}$ преобразуется по закону

$$\begin{aligned} '\bar{\mathbf{X}} = '\mathbf{X}^1('\mathbf{X}^0)^{-1} &= (\mathbf{A}_0^1\mathbf{X}^0 + \mathbf{A}_1^1\mathbf{X}^1)(\mathbf{A}_0^0\mathbf{X}^0 + \mathbf{A}_1^0\mathbf{X}^1)^{-1} = \\ &= (\mathbf{A}_0^1\mathbf{X}^0 + \mathbf{A}_1^1\mathbf{X}^1)(\mathbf{X}^0)^{-1}\mathbf{X}^0(\mathbf{A}_0^0\mathbf{X}^0 + \mathbf{A}_1^0\mathbf{X}^1)^{-1} = \\ &= (\mathbf{A}_0^1 + \mathbf{A}_1^1\bar{\mathbf{X}})(\mathbf{A}_0^0 + \mathbf{A}_1^0\bar{\mathbf{X}})^{-1}, \end{aligned}$$

т.е.

$$'\overline{\mathbf{X}} = (\mathbf{A}_0^1 + \mathbf{A}_1^1\overline{\mathbf{X}})(\mathbf{A}_0^0 + \mathbf{A}_1^0\overline{\mathbf{X}})^{-1}, \tag{9.86}$$

а при корреляции $'\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ оператор $\overline{\mathbf{X}}$ преобразуется по закону

$$'\overline{\mathbf{X}} = -\mathbf{U}_1^{-1}\mathbf{U}_0 = -((\mathbf{X}^0)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{10}^{\mathrm{T}} + (\mathbf{X}^1)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{11}^{\mathrm{T}})^{-1}((\mathbf{X}^0)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{00}^{\mathrm{T}} + (\mathbf{X}^1)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{01}^{\mathrm{T}}) = -((\mathbf{X}^0)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{10}^{\mathrm{T}} + (\mathbf{X}^1)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{11}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{X}^0)^{\mathrm{T}} \cdot ((\mathbf{X}^0)^{\mathrm{T}})^{-1}((\mathbf{X}^0)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{00}^{\mathrm{T}} + (\mathbf{X}^1)^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{01}^{\mathrm{T}}) = (-\mathbf{A}_{10}^{\mathrm{T}} - \overline{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{11}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{A}_{00}^{\mathrm{T}} + \overline{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{01}^{\mathrm{T}}),$$

т. е.

$$'\overline{\mathbf{X}} = (-\mathbf{A}_{10}^{\mathrm{T}} - \overline{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{11}^{\mathrm{T}})^{-1}(\mathbf{A}_{00}^{\mathrm{T}} + \overline{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_{01}^{\mathrm{T}}). \tag{9.87}$$

Таким образом, *проективные преобразования проективного n-пространства изображаются дробно-линейными преобразованиями аффинных операторных координат.*

9.4.11. Размерность пересечения m-плоскостей в аффинных операторных координатах. Если m-плоскость p проективного n-пространства определяется операторными координатами $\mathbf{X}$, $\mathbf{U}$ и $\overline{\mathbf{X}}$, а m-плоскость q определяется операторными координатами $\mathbf{Y}$, $\mathbf{V}$ и $\overline{\mathbf{Y}}$, то произведение $\mathbf{VX}$ можно записать в виде

$$\mathbf{VX} = \mathbf{V}_0\mathbf{X}^0 + \mathbf{V}_1\mathbf{X}^1.$$

Так как необходимое и достаточное условие того, что m-плоскости p и q не пересекаются или пересекаются по d-плоскости, выражается через ранг матрицы оператора $\mathbf{VX}$, а ранг матрицы не изменяется при умножении ее слева и справа на неособенную матрицу, эти условия таким же образом выражаются через ранг матрицы

$$-\mathbf{V}_1^{-1}(\mathbf{VX})(\mathbf{X}^0)^{-1} = \overline{\mathbf{Y}} - \overline{\mathbf{X}}.$$

Поэтому *необходимым и достаточным условием того, что m-плоскости p и q не пересекаются, является неособенность матрицы $\overline{\mathbf{Y}} - \overline{\mathbf{X}}$, а необходимым и достаточным условием того, что m-плоскости p и q пересекаются по d-плоскости, является равенство ранга матрицы $\overline{\mathbf{Y}} - \overline{\mathbf{X}}$ числу $m - d$.*

9.4.12. Двойное отношение двух m-пар. Выражение (9.76) двойного отношения $\mathbf{W}$ двух m-пар, состоящих из m-плоскостей p и q с операторными координатами $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\overline{\mathbf{X}}$, $\overline{\mathbf{Y}}$ и из $(n-m-1)$-плоскостей r и s с операторными координатами $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\overline{\mathbf{U}}$, $\overline{\mathbf{V}}$, можно переписать в виде

$$\mathbf{W} = (\mathbf{U}_0\mathbf{X}^0 + \mathbf{U}_1\mathbf{X}^1)^{-1}\,(\mathbf{U}_0\mathbf{Y}^0 + \mathbf{U}_1\mathbf{Y}^1)\,(\mathbf{V}_0\mathbf{Y}^0 + \mathbf{V}_1\mathbf{Y}^1)^{-1}\cdot \\ \cdot(\mathbf{V}_0\mathbf{X}^0 + \mathbf{V}_1\mathbf{X}^1).$$

Поэтому оператор (9.77) при $\mathbf{K} = (\mathbf{X}^0)^{-1}$ можно записать в виде

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{K} = \mathbf{X}^0\,(\mathbf{U}_0\mathbf{X}^0 + \mathbf{U}_1\mathbf{X}^1)^{-1}\,\mathbf{U}_1\mathbf{U}_1^{-1}\,(\mathbf{U}_0\mathbf{Y}^0 + \mathbf{U}_1\mathbf{Y}^1)\cdot \\ \cdot(\mathbf{Y}^0)^{-1}\mathbf{Y}^0\,(\mathbf{V}_0\mathbf{Y}^0 + \mathbf{V}_1\mathbf{Y}^1)^{-1}\,\mathbf{V}_1\mathbf{V}_1^{-1}\,(\mathbf{V}_0\mathbf{X}^0 + \mathbf{V}_1\mathbf{X}^1)\,(\mathbf{X}^0)^{-1},$$

т. е.

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{K} = (\overline{\mathbf{U}} - \overline{\mathbf{X}})^{-1}(\overline{\mathbf{U}} - \overline{\mathbf{Y}})(\overline{\mathbf{V}} - \overline{\mathbf{Y}})^{-1}(\overline{\mathbf{V}} - \overline{\mathbf{X}}).$$

Так как оператор $\mathbf{W}$ двойного отношения двух m-пар определен с точностью до преобразования $'\mathbf{W} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{K}$, за двойное отношение двух m-пар n-пространства можно принять оператор

$$\mathbf{W} = (\overline{\mathbf{U}} - \overline{\mathbf{X}})^{-1}(\overline{\mathbf{U}} - \overline{\mathbf{Y}})(\overline{\mathbf{V}} - \overline{\mathbf{Y}})^{-1}(\overline{\mathbf{V}} - \overline{\mathbf{X}}). \qquad (9.88)$$

§ 5. Квадрики

9.5.1. Уравнения квадрики. *Квадрикой* проективного n-пространства называется поверхность, определяемая в проективных координатах однородным уравнением второй степени

$$a_{ij}x^ix^j = 0. \qquad (9.89)$$

Здесь так же, как в случае квадрик в евклидовом n-пространстве,

$$a_{ij} = a_{ji}. \qquad (9.90)$$

Уравнение (9.89) можно переписать в векторной форме в виде

$$\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0, \qquad (9.91)$$

где $\mathbf{A}$ — симметрический оператор, т. е.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}. \qquad (9.92)$$