9.4.12. Двойное отношение двух m-пар. Выражение (9.76) двойного отношения $\mathbf{W}$ двух m-пар, состоящих из m-плоскостей p и q с операторными координатами $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\overline{\mathbf{X}}$, $\overline{\mathbf{Y}}$ и из $(n-m-1)$-плоскостей r и s с операторными координатами $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, $\overline{\mathbf{U}}$, $\overline{\mathbf{V}}$, можно переписать в виде

$$\mathbf{W} = (\mathbf{U}_0\mathbf{X}^0 + \mathbf{U}_1\mathbf{X}^1)^{-1}\,(\mathbf{U}_0\mathbf{Y}^0 + \mathbf{U}_1\mathbf{Y}^1)\,(\mathbf{V}_0\mathbf{Y}^0 + \mathbf{V}_1\mathbf{Y}^1)^{-1}\cdot \\ \cdot(\mathbf{V}_0\mathbf{X}^0 + \mathbf{V}_1\mathbf{X}^1).$$

Поэтому оператор (9.77) при $\mathbf{K} = (\mathbf{X}^0)^{-1}$ можно записать в виде

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{K} = \mathbf{X}^0\,(\mathbf{U}_0\mathbf{X}^0 + \mathbf{U}_1\mathbf{X}^1)^{-1}\,\mathbf{U}_1\mathbf{U}_1^{-1}\,(\mathbf{U}_0\mathbf{Y}^0 + \mathbf{U}_1\mathbf{Y}^1)\cdot \\ \cdot(\mathbf{Y}^0)^{-1}\mathbf{Y}^0\,(\mathbf{V}_0\mathbf{Y}^0 + \mathbf{V}_1\mathbf{Y}^1)^{-1}\,\mathbf{V}_1\mathbf{V}_1^{-1}\,(\mathbf{V}_0\mathbf{X}^0 + \mathbf{V}_1\mathbf{X}^1)\,(\mathbf{X}^0)^{-1},$$

т. е.

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{K} = (\overline{\mathbf{U}} - \overline{\mathbf{X}})^{-1}(\overline{\mathbf{U}} - \overline{\mathbf{Y}})(\overline{\mathbf{V}} - \overline{\mathbf{Y}})^{-1}(\overline{\mathbf{V}} - \overline{\mathbf{X}}).$$

Так как оператор $\mathbf{W}$ двойного отношения двух m-пар определен с точностью до преобразования $'\mathbf{W} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{K}$, за двойное отношение двух m-пар n-пространства можно принять оператор

$$\mathbf{W} = (\overline{\mathbf{U}} - \overline{\mathbf{X}})^{-1}(\overline{\mathbf{U}} - \overline{\mathbf{Y}})(\overline{\mathbf{V}} - \overline{\mathbf{Y}})^{-1}(\overline{\mathbf{V}} - \overline{\mathbf{X}}). \qquad (9.88)$$

§ 5. Квадрики

9.5.1. Уравнения квадрики. *Квадрикой* проективного n-пространства называется поверхность, определяемая в проективных координатах однородным уравнением второй степени

$$a_{ij}x^ix^j = 0. \qquad (9.89)$$

Здесь так же, как в случае квадрик в евклидовом n-пространстве,

$$a_{ij} = a_{ji}. \qquad (9.90)$$

Уравнение (9.89) можно переписать в векторной форме в виде

$$\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0, \qquad (9.91)$$

где $\mathbf{A}$ — симметрический оператор, т. е.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}. \qquad (9.92)$$

Так как, переходя от проективных координат x^i к аффинным координатам $X^i = \frac{x^i}{x^0}$ $(i > 0)$, мы получим уравнение

$$a_{ij}X^iX^j + 2a_{0i}X^i + a_{00} = 0, \tag{9.93}$$

совпадающее с уравнением (7.1) квадрики в евклидовом n-пространстве, мы видим, что *квадрики проективного n-пространства могут быть получены из квадрик обычного n-пространства дополнением их бесконечно удаленными точками*; очевидно, что это дополнение должно иметь место только для тех квадрик, которые простираются в бесконечность.

Так как матрица (a_{ij}) коэффициентов уравнения квадрики (9.89) совпадает с матрицей $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & c \end{pmatrix}$ коэффициентов уравнения (7.5) соответственной квадрики в обычном n-пространстве, то определитель матрицы оператора $\mathbf{A}$ квадрики (9.89) совпадает с определителем Δ, составленным из коэффициентов уравнения (7.5). Поэтому *необходимым и достаточным условием того, что квадрика* (9.89) *невырожденная, является обратимость оператора* $\mathbf{A}$.

Так как коллинеации проективного n-пространства выражаются в проективных координатах линейными преобразованиями (9.23), то при этих преобразованиях уравнение второй степени переходит в уравнение той же степени и, следовательно, *коллинеации переводят квадрики в квадрики*.

Заметим, что коллинеация

$$'x^0 = x^1, \quad 'x^1 = x^0, \quad 'x^i = x^i \quad (i > 1)$$

переводит эллипсоид

$$(X^1)^2 + (X^2)^2 + \ldots + (X^n)^2 = 1 \tag{9.94}$$

в гиперболоид индекса 1

$$(X^1)^2 - (X^2)^2 - \ldots - (X^n)^2 = 1, \tag{9.95}$$

а коллинеация

$$'x^0 = \frac{x^0 + x^1}{\sqrt{2}}, \quad 'x^1 = \frac{x^0 - x^1}{\sqrt{2}}, \quad 'x^i = x^i \quad (i > 1)$$

переводит эллипсоид (9.94) в эллиптический параболоид

$$(X^2)^2 + \ldots + (X^n)^2 = 2X^1. \qquad (9.96)$$

Совершенно аналогично коллинеация

$$'x^0 = x^l, \quad 'x^i = x^i \ (i \neq l), \quad 'x^l = x^0$$

переводит гиперболоид индекса l

$$(X^1)^2 + \ldots + (X^l)^2 - (X^{l+1})^2 + \ldots - (X^n)^2 = 1 \qquad (9.97)$$

в гиперболоид индекса $n - l + 1$

$$-(X^1)^2 - \ldots - (X^{l-1})^2 + (X^l)^2 + \ldots + (X^n)^2 = 1, \qquad (9.98)$$

а коллинеация

$$'x^0 = \frac{x^0 + x^l}{\sqrt{2}}, \quad 'x^i = x^i \ (i \neq l), \quad 'x^l = \frac{x^0 - x^l}{\sqrt{2}}$$

переводит гиперболоид (9.97) в гиперболический параболоид индекса $l - 1$

$$(X^1)^2 + \ldots + (X^{l-1})^2 - (X^{l+1})^2 - \ldots - (X^n)^2 = 2X^l. \qquad (9.99)$$

Будем называть квадрику, которую можно перевести коллинеацией в эллипсоид (9.94), гиперболоид индекса 1 (9.95) и эллиптический параболоид (9.96),— *овальной квадрикой*, а квадрику, которую можно перевести коллинеацией в гиперболоиды индексов l и $n - l + 1$ (9.97) и (9.98) и в гиперболический параболоид индекса $l - 1$ (9.99),— *квадрикой с* $(l - 1)$*-плоскими образующими*.

Так как коллинеации переводят m-плоскости в m-плоскости, они переводят овальные квадрики только в овальные квадрики, а квадрики с m-плоскими образующими только в квадрики с m-плоскими образующими.

Будем называть квадрику, которую можно перевести коллинеацией в квадрику с уравнением

$$-(x^0)^2 - (x^1)^2 - \ldots - (x^{l-1})^2 + (x^l)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 0, \qquad (9.100)$$

где $l \leqslant n - l - 1$, *квадрикой индекса* l. Сравнивая уравнения (9.94) и (9.95) с уравнением (9.100) при $l = 1$, мы видим, что *овальные квадрики являются квадриками*

индекса 1, а сравнивая уравнения (9.97) и (9.98) с уравнением (9.100) при $l > 1$, мы видим, что *квадрики с* $(l-1)$*-плоскими образующими являются квадриками индекса* l.

Если квадратичная форма $a_{ij}x^ix^j$ является положительно определенной, уравнению (9.84) не удовлетворяют вещественные точки n-пространства. В этом случае уравнение (9.89) называется уравнением *мнимой квадрики*.

Очевидно также, что конусы с m-плоскими образующими можно перевести коллинеацией в цилиндры с такими же образующими.

9.5.2. Взаимное расположение квадрики и прямой. Рассмотрим взаимное расположение квадрики (9.91) и прямой

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{y}. \tag{9.101}$$

Подставляя вектор (9.101) в уравнение (9.91), мы получим квадратное уравнение относительно t

$$(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{y})\,\mathbf{A}\,(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{y}) = 0, \tag{9.102}$$

которое можно переписать в виде

$$(\mathbf{yAy})\,t^2 + 2\,(\mathbf{x}_0\mathbf{Ay})\,t + \mathbf{x}_0\mathbf{Ax}_0 = 0. \tag{9.103}$$

В случае, когда $\mathbf{yAy} \neq 0$, т. е. точка $N(\mathbf{y})$ не лежит на квадрике, уравнение (9.103) — квадратное уравнение относительно t и поэтому имеет два различных вещественных, два совпадающих или два комплексно сопряженных корня. В первом случае квадрика пересекается с прямой в двух точках, во втором случае прямая касается квадрики, в третьем случае прямая и квадрика не имеют общих точек (имеют две общие мнимые точки). В случае, когда $\mathbf{yAy} = 0$, но $\mathbf{x}_0\mathbf{Ax}_0 \neq 0$, т. е. точка $N(\mathbf{y})$ лежит на квадрике, а точка $M_0(\mathbf{x}_0)$ не лежит на ней, вместо прямой (9.101) следует рассматривать прямую $\mathbf{x} = \mathbf{y} + t\mathbf{x}_0$, что даст те же три случая. В случае, когда $\mathbf{x}_0\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{yAy} = 0$, но $\mathbf{x}_0\mathbf{Ay} \neq 0$, прямая (9.101) пересекается с квадрикой в двух точках M_0 и N. В случае, когда $\mathbf{x}_0\mathbf{Ax}_0 = \mathbf{yAy} = \mathbf{x}_0\mathbf{Ay} = 0$, уравнение (9.102) удовлетворяется при всех значениях t, т. е. прямая (9.101) является прямолинейной образующей квадрики.

9.5.3. Касательная плоскость. Если точка M_0 лежит на квадрике, т. е. $\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = 0$, уравнение (9.103) имеет вид

$$(\mathbf{y}\mathbf{A}\mathbf{y})\, t^2 + 2\,(\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{y})\, t = 0.$$

Один корень этого уравнения равен нулю. Если прямая (9.101) — касательная к квадрике, то второй корень этого уравнения также равен нулю, т. е. равна нулю сумма корней этого уравнения и выполняется условие

$$\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{y} = 0. \tag{9.104}$$

Так как любая точка *касательной плоскости* к квадрике в точке M_0, т. е. плоскости, содержащей все прямые, касающиеся квадрики в этой точке, может быть принята за точку N, мы получим уравнение касательной плоскости, заменив в условии (9.104) вектор $\mathbf{y}$ произвольным вектором $\mathbf{x}$. Это уравнение имеет вид

$$\mathbf{x}_0\mathbf{A}\mathbf{x} = 0 \tag{9.105}$$

или, в проективных координатах,

$$a_{ij}x_0^i x^j = 0. \tag{9.106}$$

9.5.4. Полярная плоскость и полюс. Найдем уравнение *полярной плоскости* точки M_0 относительно квадрики $\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$, т. е. плоскости, содержащей геометрическое место четвертых гармонических для точки M_0 и точек пересечения прямых, проходящих через эту точку, с квадрикой. Точки M_1 и M_2 пересечения прямой M_0N с квадрикой соответствуют корням t_1 и t_2 уравнения (9.103), т. е. эти точки представляются векторами $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + t_1\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0 + t_2\mathbf{y}$. Поэтому двойное отношение $\overline{M_0N,\ M_1M_2}$ равно $\frac{t_1}{t_2}$. Так как точки M_0, N, M_1, M_2 составляют гармоническую четверку, то это двойное отношение равно -1 и, следовательно, $t_1 + t_2 = 0$. Но условием равенства нулю суммы корней уравнения (9.103) является условие (9.104). Поэтому в том случае, когда точка N лежит на полярной плоскости точки M_0, вектор $\mathbf{y}$ удовлетворяет условию (9.104) и, следовательно, *уравнение полярной плоскости точки M_0 относительно квадрики имеет вид* (9.105)

или, в проективных координатах, (9.106). Точка M_0 называется *полюсом* плоскости (9.104).

Если точки $M_1(\mathbf{x}_1)$ и $M_2(\mathbf{x}_2)$ удовлетворяют условию

$$\mathbf{x}_1\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = 0, \tag{9.107}$$

то каждая из этих точек лежит на полярной плоскости другой; такие точки называются *полярно сопряженными точками*.

Будем называть n-симплекс проективного n-пространства, каждая вершина которого является полюсом противолежащей $(n-1)$-грани, *автополярным n-симплексом*.

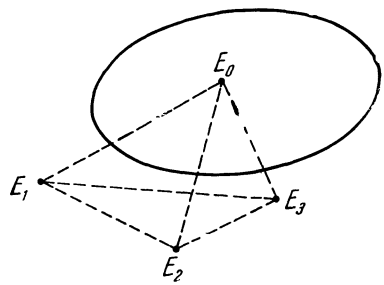

Рис. 9.29.

На рис. 9.29 изображен автополярный тетраэдр квадрики в 3-пространстве. Будем называть *автополярным m-симплексом* квадрики n-пространства автополярный m-симплекс квадрики, являющийся пересечением квадрики n-пространства с m-плоскостью m-симплекса.

9.5.5. Полярное преобразование. Будем называть преобразование, ставящее в соответствие каждой точке M проективного n-пространства, не лежащей на квадрике, плоскость α, являющуюся полярной плоскостью этой точки, *полярным преобразованием* относительно квадрики. Так как полярная плоскость α_0 точки M_0 с уравнением (9.105) представляется вектором

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0, \tag{9.108}$$

полярное преобразование имеет вид

$$'\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{9.109}$$

Так как оператор **A**, входящий в выражение (9.109),— симметрический оператор ($\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$), *полярное преобразование относительно квадрики является корреляцией с симметрическим оператором* **A**, *совпадающим с оператором квадрики.*

Так как тот же вид (9.108) имеет вектор, представляющий касательную плоскость α_0 к квадрике в точке M_0, лежащей на квадрике, *полярное преобразование относительно квадрики переводит точки квадрики в касательные плоскости в этих точках.*

Будем называть m-плоскость и $(n-m-1)$-плоскость, переводящиеся друг в друга полярным преобразованием, *полярными m-плоскостью и $(n-m-1)$-плоскостью.*

9.5.6. Плоские образующие квадрик. Формула (9.107) позволяет чрезвычайно просто вычислить размерность $Q_{n,m}$ многообразия m-плоских образующих квадрики, полученную нами в **7.2.9**: если m-плоскость с базисными точками M_a ($\mathbf{x}_a$) целиком лежит на квадрике (9.89), то координаты точек M_a связаны $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ условиями

$$x_a^i A_{ij} x_b^j = 0. \tag{9.110}$$

Условия (9.110) можно записать в виде одного операторного условия

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{O}, \tag{9.111}$$

которым связана операторная координата **X** m-плоскости.

Поэтому размерность $Q_{n,m}$ многообразия m-плоских образующих равна

$$Q_{n,m} = P_{n,m} - \frac{(m+1)(m+2)}{2} = (m+1)(n-m) - \\ - \frac{(m+1)(m+2)}{2} = \frac{(2n-3m-2)(m+1)}{2},$$

т. е. мы снова получили формулу (7.74).

Аналогично можно вычислить более общую размерность $Q_{n,m,k}$ многообразия m-плоскостей, касающихся квадрики по k-плоскости: если m-плоскость с базисными точками M_a ($\mathbf{x}_a$) касается квадрики (9.89) по k-плоскости, то за точки $M_0, \ldots, M_k$ можно принять точки квадрики,

для которых выполняются условия (9.110). Так как число этих условий равно $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, то *размерность* $Q_{n,m,k}$ *многообразия* m*-плоскостей, касающихся квадрики по* k*-плоскости, равна*

$$Q_{n,m,k} = P_{n,m} - \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \\ = (m+1)(n-m) - \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \quad (9.112)$$

При $k = m$, когда m-плоскости являются m-плоскими образующими, $Q_{n,m,k}$ совпадает с $Q_{n,m}$, при $k = -1$, когда m-плоскости не имеют общих точек с квадрикой, $Q_{n,m,k}$ совпадает с $P_{n,m}$, при $k = 0$, когда m-плоскости касаются квадрики в точках, $Q_{n,m,k} = P_{n,m} - 1$.

9.5.7. Двойственность квадрик. По принципу двойственности квадрике (9.91) соответствует такая поверхность, что векторы $\mathbf{u}$, представляющие касательные плоскости к ней, удовлетворяют уравнению второй степени

$$\mathbf{uBu} = 0. \quad (9.113)$$

Поверхности, соответствующие невырожденным квадрикам по принципу двойственности, также являются невырожденными квадриками. В самом деле, векторы $\mathbf{u}$, представляющие касательные плоскости к квадрике $\mathbf{xAx} = 0$, имеют вид $\mathbf{Ax}$, эти векторы в силу этого уравнения квадрики удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{uA}^{-1}\mathbf{u} = 0, \quad (9.114)$$

так как $\mathbf{uA}^{-1}\mathbf{u} = (\mathbf{xA})\,\mathbf{A}^{-1}\,(\mathbf{Ax}) = \mathbf{xAx}$. Уравнение (9.114) является частным случаем уравнения (9.113) при $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, т. е. это уравнение имеет смысл только для невырожденных квадрик.

9.5.8. Упрощение уравнений квадрик. Если базисные точки проективного n-пространства — точки $E_i\,(\mathbf{e}_i)$, то

$$\mathbf{xAx} = (x^i\mathbf{e}_i)\,\mathbf{A}\,(x^j\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i\mathbf{Ae}_j)\,x^ix^j$$

и уравнение (9.86) квадрики можно записать в виде

$$(\mathbf{e}_i\mathbf{Ae}_j)\,x^ix^j = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (9.89), мы находим, что коэффициенты a_{ij} этого уравнения равны

$$a_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{A} \mathbf{e}_j. \tag{9.115}$$

Поэтому если за базисные точки проективного n-пространства выбраны вершины автополярного симплекса квадрики, то

$$a_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{A} \mathbf{e}_j = 0 \text{ при } i \neq j, \quad a_{ii} = \mathbf{e}_i \mathbf{A} \mathbf{e}_i \neq 0 \tag{9.116}$$

и уравнение (9.89) квадрики принимает вид

$$\Sigma\, a_{ii} (x^i)^2 = 0. \tag{9.117}$$

В том случае, когда все коэффициенты a_{ii} отличны от нуля и имеют одинаковый знак, можно считать, что все эти коэффициенты положительны и, умножая координаты x^i на $\sqrt{a_{ii}}$, мы приведем уравнение квадрики к виду

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 = 0. \tag{9.118}$$

Квадрика в этом случае является мнимой; переходя в уравнении (9.113) от проективных координат x^i к аффинным координатам $X^i = \frac{x^i}{x^0}$, мы получим уравнение (7.53) *мнимого эллипсоида*. Таким образом, уравнение всякой невырожденной мнимой квадрики можно привести к виду (9.118), которое можно рассматривать как уравнение мнимого эллипсоида.

В том случае, когда коэффициенты a_{ii} отличны от нуля и имеют разные знаки, можно считать, что коэффициенты a_{ii} при $i < l \leqslant n - l - 1$ отрицательны, а при $i \geqslant l$ положительны. Умножая координаты x^i при $i < l$ на $\sqrt{-a_{ii}}$, а при $i \geqslant l$ на $\sqrt{a_{ii}}$, мы приведем уравнение квадрики к виду (9.103), т. е. уравнение всякой невырожденной вещественной квадрики можно привести к виду (9.103). Переходя к координатам $X^i = \frac{x^i}{x^0}$ $(i > 0)$, мы в случае вещественной невырожденной квадрики можем переписать уравнение (9.118) в виде уравнения (7.52) *эллипсоида* или уравнения (7.54) *гиперболоида индекса l*. Таким образом, *всякую вещественную невырожденную квадрику можно перевести коллинеацией в эллипсоид или гиперболоид*.

Так как в случае эллипсоидов и гиперболоидов плоскость $x^0 = 0$ является бесконечно удаленной плоскостью, а точка E_0 является центром квадрики, мы получаем, что *центр центральной вещественной квадрики является полюсом бесконечно удаленной плоскости.* Так как в случае этих квадрик плоскости $E_0E_1 \ldots E_{i-1}E_{i+1} \ldots E_n$ $(i > 0)$ являются плоскостями симметрии квадрики, мы получаем, что *плоскости симметрии центральной квадрики являются плоскостями граней симплекса автополярного одновременно относительно данной квадрики и относительно сферы с тем же центром.*

Если за базисные точки проективного n-пространства выбраны вершины автополярного $(n-2)$-симплекса $E_1 E_2 \ldots E_{n-1}$ и точки E_0 и E_n пересечения квадрики с прямой, соединяющей точки, дополняющие этот $(n-2)$-симплекс до автополярного n-симплекса, то

$$\left.\begin{aligned} &a_{ij} = \mathbf{e}_i\mathbf{A}\mathbf{e}_j = 0 \quad (i \neq j), \quad a_{ii} = \mathbf{e}_i\mathbf{A}\mathbf{e}_i \neq 0 \text{ при } i \neq 0, n, \\ &a_{00} = \mathbf{e}_0\mathbf{A}\mathbf{e}_0 = 0, \quad a_{nn} = \mathbf{e}_n\mathbf{A}\mathbf{e}_n = 0, \quad \mathbf{e}_{0n} = \mathbf{e}_0\mathbf{A}\mathbf{e}_n \neq 0, \end{aligned}\right\} \tag{9.119}$$

и уравнение (9.84) квадрики принимает вид

$$a_{ii}(x^i)^2 + 2a_{0n}x^0x^n = 0. \tag{9.120}$$

Переходя к координатам $X^i = \dfrac{x^i}{x^0}$ $(i > 0)$, мы в случае вещественной невырожденной квадрики можем переписать уравнение (9.120) в виде уравнений (7.80) *эллиптического параболоида* или уравнения (7.81) *гиперболического параболоида индекса l.* Таким образом, *всякую вещественную невырожденную квадрику можно перевести коллинеацией в эллиптический или гиперболический параболоид.*

В случае квадрики индекса l при $n = 2l$ можно выбрать базис, состоящий из точек $E_i(\mathbf{e}_i)$ при $i < n$, лежащих на квадрике, для которых

$$\left.\begin{aligned} &a_{ii} = \mathbf{e}_i\mathbf{A}\mathbf{e}_i = 0, \quad a_{2a,\,2a+1} = \mathbf{e}_{2a}\mathbf{A}\mathbf{e}_{2a+1} \neq 0, \\ &a_{2a,\,2b} = \mathbf{e}_{2a}\mathbf{A}\mathbf{e}_{2b} = a_{2a,\,2b+1} = \mathbf{e}_{2a}\mathbf{A}\mathbf{e}_{2b+1} = 0 \text{ при } a \neq b, \end{aligned}\right\} \tag{9.121}$$

и из точки E_n ($\mathbf{e}_n$), для которой

$$a_{in} = \mathbf{e}_i\mathbf{A}\mathbf{e}_n = 0 \text{ при } i < n, \quad a_{nn} = \mathbf{e}_n\mathbf{A}\mathbf{e}_n \neq 0, \tag{9.122}$$

и уравнение (9.89) квадрики примет вид

$$a_{2a,\,2a+1}\, x^{2a}x^{2a+1} + a_{nn}\,(x^n)^2 = 0. \tag{9.123}$$

Умножая координату x^n на $\sqrt{a_{nn}}$, а координаты x^{2a} на $a_{2n,\,2n+1}$ при $a_{nn} > 0$ и на $-a_{2a,\,2a+1}$ при $a_{nn} < 0$, мы приведем уравнение этой квадрики к виду

$$x^0x^1 + x^2x^3 + \ldots + x^{n-2}x^{n-1} + (x^n)^2 = 0. \tag{9.124}$$

В случае квадрики индекса l при $n = 2l - 1$ можно выбрать базис, состоящий из точек E_i ($\mathbf{e}_i$), лежащих на квадрике, для которых выполняются условия (9.121), и уравнение (9.89) квадрики принимает вид

$$a_{2a,\,2a+1}x^{2a}x^{2a+1} = 0. \tag{9.125}$$

Умножая координату x^{2i} на $a_{2a,\,2a+1}$, мы приведем уравнение этой квадрики к виду

$$x^0x^1 + x^2x^3 + \ldots + x^{2n+1}x^{2n} = 0. \tag{9.126}$$

9.5.9. Проективные свойства линий второго порядка и линейчатых квадрик. Изменяя знак у координаты x^0

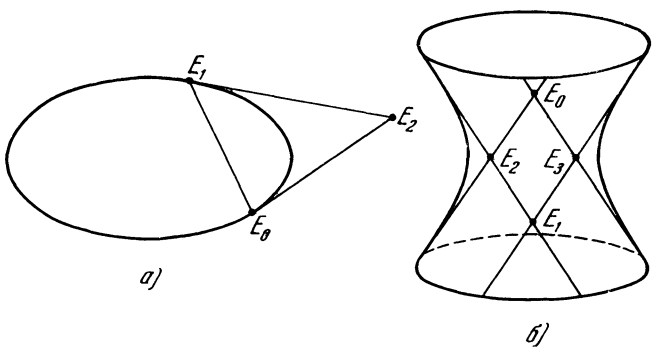

Рис. 9.30.

или x^1, мы можем привести уравнение (9.124) при $n = 2$ к виду

$$x^0x^1 = (x^2)^2, \tag{9.127}$$

к которому можно привести уравнение всякой линии второго порядка на проективной 2-плоскости (рис. 9. 30, *а*). Заметим, что, полагая $X^1 = \frac{x^1}{x^0}$, $X^2 = \frac{x^2}{x^0}$, мы перепишем уравнение (9.127) в виде канонического уравнения $(X^2)^2 = X^1$ параболы, а полагая $X^1 = \frac{x^0}{x^2}$, $X^2 = \frac{x^1}{x^2}$, мы перепишем то же уравнение в виде уравнения $X^1X^2 = 1$ гиперболы, отнесенной к ее асимптотам.

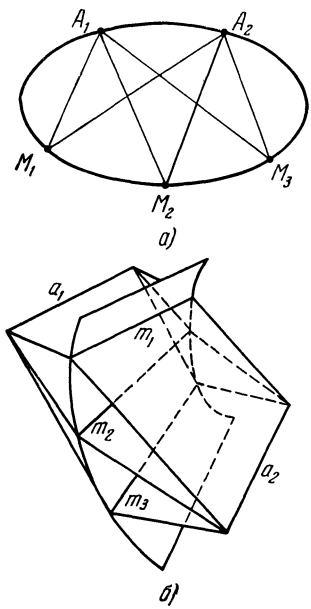

Рис. 9.31.

Изменяя знак у одной из координат, мы можем привести уравнение (9.126) при $n = 3$ к виду

$$x^0x^1 = x^2x^3, \qquad (9.128)$$

к которому можно привести уравнение всякой линейчатой квадрики в проективном 3-пространстве (рис. 9.30, *б*).

Уравнение (9.127) показывает, что точки линии (9.127) являются точками пересечения прямых двух пучков

$$x^0 = \lambda x^2, \quad x^2 = \mu x^1, \qquad (9.129)$$

соответствующих равным значениям параметров λ и μ. Устанавливаемое таким образом соответствие между точками прямых (9.129) является проективным соответствием, т. е. соответствием, сохраняющим двойные отношения четверок прямых, откуда следует, что *линия второго порядка на проективной 2-плоскости является геометрическим местом точек пересечения соответственных прямых двух пучков, связанных проективным соответствием* (рис. 9.31, *а*). Это предложение известно под названием *теоремы Штейнера*[18].

Уравнение (9.128) показывает, что точки квадрики (9.128) являются точками пересечения плоскостей двух

пучков

$$x^0 = \lambda x^2, \qquad x^3 = \mu x^1, \tag{9.130}$$

соответствующих равным значениям параметров λ и μ. Это соответствие между пучками плоскостей (9.130) является проективным соответствием, т. е. соответствием, сохраняющим двойные отношения четверок плоскостей, откуда следует, что *линейчатая квадрика в проективном 3-пространстве является геометрическим местом линий*

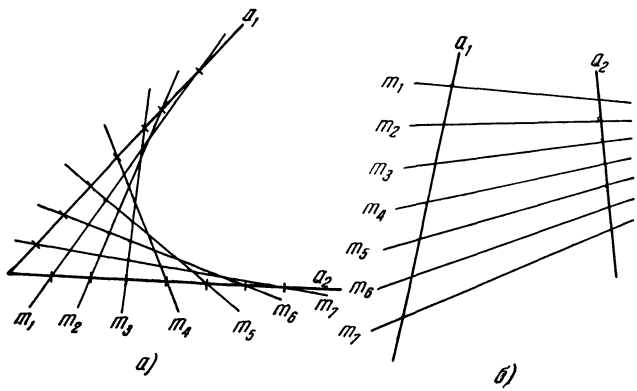

Рис. 9.32.

пересечения соответственных плоскостей двух пучков, связанных проективным соответствием (рис. 9.31, *б*)[19].

По принципу двойственности этим теоремам соответствуют предложения: *касательными к линии второго порядка на проективной 2-плоскости являются прямые, соединяющие соответственные точки двух прямых, связанных проективным соответствием* (рис. 9.32, *а*); *линейчатая квадрика в проективном 3-пространстве является геометрическим местом прямых, соединяющих соответственные точки двух скрещивающихся прямых, связанных проективным соответствием* (рис. 9.32, *б*).

9.5.10. Теоремы Паскаля и Брианшона. Сначала покажем, что *точки линии второго порядка проектируются из любых двух ее точек пучками, связанными проективным соответствием.* В самом деле, в силу теоремы Штейнера линия второго порядка является геометрическим местом точек пересечения двух пучков с центрами E и F,

связанных проективным соответствием. Рассмотрим точки A, B, C и D этой линии (рис. 9.33). Если точка C будет двигаться по линии и прямая EC пересекает прямую AD в точке X, а прямая FC пересекает прямую BD в точке Y, то, так как пучки, пробегаемые прямыми EC и FC, связаны проективным отображением, соответствие точек X прямой AD и точек Y прямой BD является проективным отображением одной из этих прямых на другую. Так как точка D пересечения этих прямых при этом соответствует самой себе, это проективное отображение является перспективным и прямая XY, соединяющая соответственные точки этих прямых, проходит через центр перспективы M. Так как при этом соответствии точка A переходит в точку пересечения прямых BD и AF, а в точку B переходит точка пересечения прямых AD и BE, прямые AF и BE также соединяют соответственные точки прямых AD и BD и, следовательно, также проходят через точку M. Точку M, таким образом, можно определить как точку пересечения прямых AF и BE, и, следовательно, эта точка не зависит от выбора точек C и D. Поэтому если мы будем двигать по линии не точку C, а точку D, то прямая AD будет пересекать прямую EC в точке X, а прямая BD будет пересекать прямую FC в точке Y и, так как прямая XY всегда проходит через точку M, соответствие точек X прямой EC и точек Y прямой FC является перспективным соответствием. Поэтому пучки прямых AD и BD, проектирующих из точек A и B точки X и Y прямых EC и FD, получаются друг из друга проективным отображением.

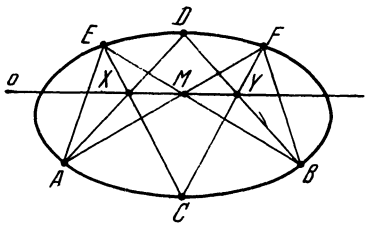

Рис. 9.33.

Отсюда вытекает, что *линия второго порядка вполне определяется своими пятью точками*: если заданы пять точек A, B, C, D, E — линии второго порядка, то тройки прямых AC, AD, AE и BC, BD, BE вполне определяют проективное отображение пучка с центром A на пучок с центром B, определяющее линию второго порядка.

Так как шестиугольник $ADBECF$ на рис. 9.33 можно рассматривать как произвольный шестиугольник, вписанный в линию второго порядка, а пары противоположных сторон этого треугольника пересекаются в точках X, M, Y одной прямой, мы получаем, что *у шестиугольника, вписанного в линию второго порядка, точки пересечения пар противоположных сторон лежат на одной прямой*. Это предложение известно под названием *теоремы Паскаля*[20]. В том случае, когда линия второго порядка вырождена и является парой прямых, эта теорема представляет собой *теорему Паппа* (см. рис. 9.17).

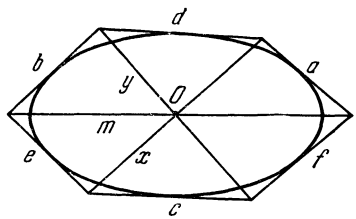

Рис. 9.34.

По принципу двойственности теореме Паскаля соответствует *теорема Брианшона*[21]: *у шестиугольника, описанного около линии второго порядка, прямые, соединяющие противоположные вершины, проходят через одну точку* (рис. 9.34).

9.5.11. Проективные преобразования квадрик. Если коллинеация, которую мы здесь запишем в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}'\mathbf{x}, \tag{9.131}$$

применена к квадрике (9.91), эта квадрика перейдет в квадрику

$$'\mathbf{x}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{U}'\mathbf{x} = 0. \tag{9.132}$$

Если мы запишем это уравнение в виде

$$'\mathbf{x}\mathbf{A}''\mathbf{x} = 0, \tag{9.133}$$

то оператор $\mathbf{A}'$ этого уравнения связан с оператором $\mathbf{A}$ уравнения (9.91) соотношением

$$\mathbf{A}' = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{U}. \tag{9.134}$$

Отсюда видно, что если коллинеация (9.131) переводит квадрику (9.86) в себя, то оператор $\mathbf{U}$ этой коллинеации связан соотношением

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{A}. \tag{9.135}$$

Если квадрика (9.86) подвергается корреляции, которую мы здесь запишем в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}\,'\mathbf{u}, \tag{9.136}$$

то точки этой квадрики перейдут в плоскости, определяемые уравнением

$$'\mathbf{u}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{U}\,'\mathbf{u} = 0. \tag{9.137}$$

Так как касательными плоскостями к квадрике (9.91) являются плоскости, определяемые уравнением (9.114), то при корреляции (9.136) точки квадрики (9.91) перейдут в касательные плоскости квадрики (9.133), где оператор $\mathbf{A}'$ связан с оператором $\mathbf{A}$ уравнения (9.91) соотношением

$$\mathbf{A}' = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{U}^{\mathrm{T}})^{-1}. \tag{9.138}$$

9.5.12. Инволюционные корреляции. Как мы видели, полярное преобразование (9.109) является частным случаем корреляции (9.32). Так как произведение корреляций (9.32) и (9.37) является коллинеацией (9.38), то квадрат корреляции (9.32) является коллинеацией

$$\mathbf{x}'' = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{9.139}$$

тогда в силу симметричности оператора $\mathbf{A}$ полярного преобразования (9.109) квадрат этого преобразования является тождественным преобразованием $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}$, и, следовательно, *полярное преобразование является инволюционным преобразованием.*

Найдем все *инволюционные корреляции*, т. е. корреляции, квадраты которых являются тождественным преобразованием. Так как квадрат корреляции является коллинеацией (9.139), эта коллинеация должна иметь вид $'\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, т. е. оператор $\mathbf{A}$ инволюционной корреляции удовлетворяет условию

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{I} \tag{9.140}$$

или

$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A}^{\mathrm{T}}. \tag{9.141}$$

Переходя в обеих частях равенства (9.141) к сопряженным операторам, мы получим, что

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \lambda\mathbf{A}. \tag{9.142}$$

Но сравнение равенств (9.141) и (9.142) показывает, что $\lambda = \pm 1$. Случаю $\lambda = 1$ соответствует корреляция с симметрическим оператором $\mathbf{A}$, т. е. полярное преобразование. Случаю $\lambda = -1$ соответствует корреляция с кососимметрическим оператором $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A}$), квадрат (9.139) которой также является тождественным преобразованием. Таким образом, *необходимым и достаточным условием того, чтобы корреляция проективного n-пространства была инволюционной, является симметричность или антисимметричность ее оператора.*

Так как в случае корреляции $'\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ с кососимметрическим оператором для всякой точки $M(\mathbf{x})$ скалярное произведение $'\mathbf{u}\mathbf{x}$, равное $\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x} = -\mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}$, обращается в нуль, корреляция с кососимметрическим оператором называется *нуль-системой* [22]. Геометрически равенство $'\mathbf{u}\mathbf{x} = 0$ означает, что при этой корреляции всякая точка $M(\mathbf{x})$ n-пространства лежит в соответствующей плоскости $\alpha'('\mathbf{u})$.

В 8.2.5 мы показали, что кососимметрический оператор можно записать в виде

$$\mathbf{A} = \sum_a \lambda_a (\mathbf{e}_{2a} \cdot \mathbf{e}_{2a-1} - \mathbf{e}_{2a-1} \cdot \mathbf{e}_{2a}), \tag{9.143}$$

где векторы $\mathbf{e}_i$ — взаимно перпендикулярные векторы евклидова $(n+1)$-пространства, т. е. линейно независимые векторы аффинного $(n+1)$-пространства. Так как матрица оператора (9.140) имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} & \lambda_0 & & & & & & & \\ -\lambda_0 & & \lambda_1 & & & & & & \\ & -\lambda_1 & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & \\ & & & & \cdot & \lambda_m & & & \\ & & & & -\lambda_m & & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \cdot & \\ & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \tag{9.144}$$

то эта матрица является неособенной и, следовательно, оператор $\mathbf{A}$ обратим только в том случае, когда векторы $\mathbf{e}_i$, входящие в выражение (9.143), составляют базис $(n+1)$-пространства. Поэтому, для того чтобы оператор $\mathbf{A}$

был обратим, необходимо, чтобы размерность $(n+1)$-пространства была бы четной и, следовательно, чтобы размерность проективного n-пространства была бы нечетной. Таким образом, *нуль-системы возможны только в нечетномерных проективных пространствах*. Поэтому *инволюционные корреляции проективного n-пространства являются полярными преобразованиями при четном n и полярными преобразованиями и нуль-системами при нечетном n.*

9.5.13. Нулевые плоскости нуль-системы. Будем называть m-плоскость *нулевой m-плоскостью* нуль-системы, если она целиком лежит в $(n-m-1)$-плоскости, соответствующей ей в нуль-системе.

Аналогично формуле (7.74) можно вычислить размерность $N_{n,m}$ многообразия нулевых m-плоскостей нуль-системы: если m-плоскость с базисными точками M_a $(\mathbf{x}_a)$ является нулевой плоскостью нуль-системы, то операторная координата $\mathbf{X}$ этой плоскости связана условием (9.111), равносильным $\frac{m(m+1)}{2}$ координатным условиям (9.110). Поэтому размерность $N_{n,m}$ многообразия m-мерных нуль-плоскостей равна

$$N_{n,m} = P_{n,m} - \frac{m(m+1)}{2} = (m+1)(n-m) - \frac{m(m+1)}{2} = \\ = \frac{(2n-3m)(m+1)}{2}. \quad (9.145)$$

Аналогично формуле (9.112) можно вычислить и размерность $N_{n,m,k}$ многообразия m-плоскостей, пересекающихся с $(n-m-1)$-плоскостями, соответствующими им в нуль-системе, по k-плоскости: если k-плоскость с базисными точками M_a $(\mathbf{x}_a)$ пересекается с указанной $(n-m-1)$-плоскостью по k-плоскости, то за точки $M_0,\ldots,M_k$ можно принять точки этой k-плоскости, для которых выполняется условие (9.110). Так как число этих условий равно $\frac{k(k+1)}{2}$, размерность $N_{n,m,k}$ равна

$$N_{n,m,k} = P_{n,m} - \frac{k(k+1)}{2} = (m+1)(n-m) - \frac{k(k+1)}{2}. \quad (9.146)$$

При $k=m$ $N_{n,m,k} = N_{n,m}$, при $k=0$ $N_{n,m}^1 = P_{n,m}$.