позволяет восстановить поверхность. Условия интегрируемости и решение этих уравнений мы рассмотрим ниже, после знакомства с понятием абсолютного дифференцирования.

§ 3. Абсолютное дифференцирование

10.3.1. Векторы и тензоры на поверхности. Будем называть *вектором в точке M_0 поверхности* вектор, эквивалентный ориентированному отрезку касательной плоскости к поверхности в этой точке.

Векторы $\mathbf{x}_\alpha = \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^\alpha}$, определенные в точке M_0 поверхности, также являются векторами поверхности. Эти векторы образуют базис векторов поверхности. Поэтому любой вектор $\mathbf{a}$ в точке M_0 поверхности можно записать в виде

$$\mathbf{a} = a^\alpha \mathbf{x}_\alpha. \tag{10.174}$$

При переходе от криволинейных координат u^α на поверхности к другим криволинейным координатам $u^{\alpha'}$ векторы $\mathbf{x}_\alpha$ заменяются на векторы

$$\mathbf{x}_{\alpha'} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}} \mathbf{x}_\alpha. \tag{10.175}$$

Поэтому, если мы запишем вектор $\mathbf{a}$ в виде

$$\mathbf{a} = a^{\alpha'} \mathbf{x}_{\alpha'}, \tag{10.176}$$

сравнивая выражение (10.174) с выражением (10.176), в котором векторы $\mathbf{x}_{\alpha'}$ выражены через $\mathbf{x}_\alpha$ по формулам (10.175), мы получим, что

$$a^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}} a^{\alpha'},$$

откуда вытекает, что

$$a^{\alpha'} = \frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^\alpha} a^\alpha. \tag{10.177}$$

Будем называть *тензором в точке M_0 поверхности* тензор (см. 1.3.2) в пространстве векторов в этой точке поверх-

ности, если при криволинейных координатах u^α на поверхности тензор определяется координатами $T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}^{\cdot\cdot\cdot\ \beta_1\beta_2\ldots\beta}$, а при переходе от криволинейных координат u^α к криволинейным координатам $u^{\alpha'}$ эти координаты преобразуются по формуле, аналогичной формуле (1.28),

$$T_{\alpha_1'\alpha_2'\ldots\alpha_r'}^{\cdot\cdot\ \beta_1'\beta_2'\ldots\beta_s'} = \\ = \frac{\partial u^{\alpha_1}}{\partial u^{\alpha_1'}} \cdots \frac{\partial u^{\alpha_r}}{\partial u^{\alpha_r'}} \frac{\partial u^{\beta_1'}}{\partial u^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial u^{\beta_s'}}{\partial u^{\beta_s}} T_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r}^{\cdot\cdot\ \beta_1\beta_2\ldots\beta_s}. \quad (10.178)$$

Так как

$$a_{\alpha'\beta'} = \mathbf{x}_{\alpha'}\mathbf{x}_{\beta'} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}} \frac{\partial u^\beta}{\partial u^{\beta'}} \mathbf{x}_\alpha\mathbf{x}_\beta = \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}} \frac{\partial u^\beta}{\partial u^{\beta'}} a_{\alpha\beta}, \quad (10.179)$$

коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ первой квадратичной формы поверхности являются координатами тензора второй ковариантной валентности на поверхности. Аналогично доказывается, что координатами такого же тензора являются коэффициенты $b_{\alpha\beta}$ второй квадратичной формы поверхности. Формулы (10.120) и (10.129) показывают, что тензоры $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ являются *симметричными тензорами*. Из формулы (10.144) вытекает, что координаты A_β^α линейного оператора **A** поверхности составляют тензор первой ковариантной и первой контравариантной валентности.

Так как величины δ_α^β также составляют тензор первой ковариантной и первой контравариантной валентности, из равенства (10.170) вытекает, что элементы $a^{\alpha\beta}$ матрицы, обратной матрице $a_{\alpha\beta}$, составляют симметрический тензор второй контравариантной валентности.

Нетрудно проверить, что величины $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ не образуют тензора, а при преобразовании криволинейных координат u^α преобразуются по закону

$$\Gamma_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} = \frac{\partial^2 u^\delta}{\partial u^{\alpha'}\partial u^{\beta'}} \frac{\partial u^{\gamma'}}{\partial u^\delta} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}} \frac{\partial u^\beta}{\partial u^{\beta'}} \frac{\partial u^{\gamma'}}{\partial u^\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma. \quad (10.180)$$

10.3.2. Абсолютное дифференцирование. Пусть вдоль линии $u^\alpha = u^\alpha(t)$ на поверхности задана векторная функция $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, значения которой являются векторами

поверхности в точках этой линии. Дифференциал $d\mathbf{a}$ этой функции в точке M_0 уже не является вектором поверхности, так как ориентированный отрезок с началом в точке M_0, представляющий вектор $\mathbf{a}+d\mathbf{a}$, не лежит в касательной плоскости к поверхности в точке M_0. Поэтому вектор $\mathbf{a}+d\mathbf{a}$ можно представить в виде суммы вектора поверхности в точке M_0 и вектора, коллинеарного с вектором $\mathbf{n}$ нормали к поверхности в той же точке. Будем обозначать прямоугольную проекцию вектора $\mathbf{a}+d\mathbf{a}$ на касательную плоскость $\mathbf{a}+D\mathbf{a}$. Эта проекция равна

$$\mathbf{a}+D\mathbf{a}=\mathbf{a}+d\mathbf{a}-(\mathbf{a}+d\mathbf{a})\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{a}+d\mathbf{a}-\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{a}. \quad (10.181)$$

Будем называть вектор $D\mathbf{a}$, являющийся прямоугольной проекцией дифференциала $d\mathbf{a}$ на касательную плоскость в точке, в которой определен вектор $\mathbf{a}$, *абсолютным дифференциалом*[28] вектора $\mathbf{a}$. Из формулы (10.181) следует, что

$$D\mathbf{a}=d\mathbf{a}-\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{a}. \quad (10.182)$$

Если вектор $\mathbf{a}$ имеет вид (10.174), то

$$d\mathbf{a}=d(a^\alpha\mathbf{x}_\alpha)=\mathbf{x}_\alpha da^\alpha+a^\alpha d\mathbf{x}_\alpha=\mathbf{x}_\alpha da^\alpha+a^\alpha\mathbf{x}_{\alpha\beta}\,du^\beta$$

и в силу формулы (10.164)

$$d\mathbf{a}=\mathbf{x}_\alpha da^\alpha+a^\alpha\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\mathbf{x}_\gamma du^\beta+a^\alpha b_{\alpha\beta}\mathbf{n}\,du^\beta. \quad (10.183)$$

Вектор (10.183) является суммой вектора $a^\alpha b_{\alpha\beta}\mathbf{n}\,du^\beta$, коллинеарного с вектором $\mathbf{n}$, и вектора $\mathbf{x}_\alpha da^\alpha+a^\alpha\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\mathbf{x}_\gamma du^\beta$ в касательной плоскости. Последний вектор и представляет собой абсолютный дифференциал, который можно записать в виде

$$D\mathbf{a}=(da^\alpha+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}a^\beta du^\gamma)\,\mathbf{x}_\alpha. \quad (10.184)$$

Если мы будем записывать абсолютный дифференциал в виде

$$D\mathbf{a}=(Da^\alpha)\mathbf{x}_\alpha, \quad (10.185)$$

то формула (10.184) показывает, что

$$Da^\alpha=da^\alpha+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}a^\beta du^\gamma. \quad (10.186)$$

Для определения абсолютного дифференциала произвольного тензора условимся считать абсолютным дифференциалом скаляра его обычный дифференциал. Тогда мы определим абсолютный дифференциал ковариантного вектора b_α, исходя из того, что абсолютный дифференциал произведения связан с абсолютными дифференциалами сомножителей тем же соотношением, что и обычный дифференциал произведения, а дифференциал скаляра $b_\alpha a^\alpha$ совпадает с обычным дифференциалом этого скаляра. Поэтому

$$D(b_\alpha a^\alpha) = (Db_\alpha)\, a^\alpha + b_\alpha (Da^\alpha) = (Db_\alpha)\, a^\alpha + \\ + b_\alpha (da^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} a^\beta du^\gamma) = d(b_\alpha a^\alpha) = (db_\alpha)\, a^\alpha + b_\alpha (da^\alpha),$$

откуда вытекает, что

$$Db_\alpha = db_\alpha - \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} b_\beta du^\gamma. \tag{10.187}$$

Совершенно аналогично определяется абсолютный дифференциал произвольного тензора

$$DT^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\cdot\beta_1\ldots\beta_s} = dT^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\cdot\beta_1\ldots\beta_s} - \Gamma^\alpha_{\alpha_1\gamma} T^{\cdot}_{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_r}{}^{\cdot\beta_1\ldots\beta_s} du^\gamma - \ldots - \\ - \Gamma^\alpha_{\alpha_r\gamma} T^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\alpha}{}^{\cdot\beta_1\ldots\beta_s} du^\gamma + \Gamma^{\beta_1}_{\beta\gamma} T^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\cdot\beta\beta_2\ldots\beta_s} du^\gamma + \ldots \\ \ldots + \Gamma^{\beta_s}_{\beta\gamma} T^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\cdot\beta_1\ldots\beta_{s-1}\beta} du^\gamma. \tag{10.188}$$

Отношение абсолютного дифференциала (10.186) или (10.187) или (10.188) к дифференциалу dt параметра линии $u^\alpha = u^\alpha(t)$ на поверхности называется *абсолютной производной* соответственно вектора a^α или b_α или тензора $T^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\cdot\beta_1\ldots\beta_s}$ по параметру t.

Абсолютные дифференциалы векторов и тензоров можно представить в виде линейных форм относительно дифференциалов du^α

$$\left.\begin{aligned} Da^\alpha &= \nabla_\beta a^\alpha du^\beta, \quad Db_\alpha = \nabla_\beta b_\alpha\, du^\beta, \\ DT^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\cdot\beta_1\ldots\beta_s} &= \nabla_\beta T^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\cdot\beta_1\ldots\beta_s} du^\beta. \end{aligned}\right\} \tag{10.189}$$

Так как абсолютные дифференциалы тензоров являются тензорами и дифференциалы du^α также образуют тензор, коэффициенты линейных форм (10.189) также

образуют тензоры, имеющие на одну ковариантную валентность больше, чем соответствующие абсолютные дифференциалы. Эти тензоры называют *ковариантными производными* соответствующих тензоров. Обозначение ∇_α подчеркивает аналогию между ковариантной производной $\nabla_\beta a^\alpha$ и линейным оператором $\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}} = \nabla \cdot \mathbf{a}$. Ковариантные производные по криволинейным координатам u^α можно рассматривать как абсолютные производные по этим координатам.

Из формул (10.186) — (10.188) вытекает, что

$$\nabla_\beta a^\alpha = \frac{\partial a^\alpha}{\partial u^\beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} a^\gamma, \tag{10.190}$$

$$\nabla_\beta b_\alpha = \frac{\partial b_\alpha}{\partial u^\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} b_\gamma, \tag{10.191}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\gamma T^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s} = \frac{\partial}{\partial u^\gamma} T^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s} - \Gamma^\alpha_{\alpha_1\gamma} T^{\cdot\cdot}_{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_s} - \ldots \\ \ldots - \Gamma^\alpha_{\alpha_r\gamma} T^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\alpha}{}^{\beta_1\ldots\beta_s} + \Gamma^{\beta_1}_{\beta\gamma} T^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta\beta_2\ldots\beta_s} - \\ - \Gamma^{\beta_s}_{\beta\gamma} T^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\beta_1\ldots\beta_{s-1}\beta}.\end{aligned} \tag{10.192}$$

Применяя формулу (10.192) к тензору $a_{\alpha\beta}$, мы получим, что в силу (10.165) и (10.166)

$$\nabla_\gamma a_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \Gamma^\delta_{\alpha\gamma} a_{\delta\beta} - \Gamma^\delta_{\beta\gamma} a_{\alpha\delta} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} - \mathbf{x}_{\alpha\gamma}\mathbf{x}_\beta - \mathbf{x}_{\beta\gamma}\mathbf{x}_\alpha = 0,$$

т. е. *ковариантная производная тензора* $a_{\alpha\beta}$ *равна нулю*.

10.3.3. Тензор кривизны. Если обычные вторые производные не зависят от порядка дифференцирования, то вторые ковариантные производные зависят от порядка дифференцирования. В самом деле,

$$\begin{aligned}(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)\, a^\gamma = \nabla_\alpha\left(\frac{\partial a^\gamma}{\partial u^\beta} + \Gamma^\gamma_{\beta\delta} a^\delta\right) - \nabla_\beta\left(\frac{\partial a^\gamma}{\partial u^\alpha} + \Gamma^\gamma_{\alpha\delta} a^\delta\right) = \\ = \left(\frac{\partial \Gamma^\gamma_{\beta\delta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial \Gamma^\gamma_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} + \Gamma^\gamma_{\alpha\varepsilon}\Gamma^\varepsilon_{\beta\delta} - \Gamma^\gamma_{\beta\varepsilon}\Gamma^\varepsilon_{\alpha\delta}\right) a^\delta.\end{aligned} \tag{10.193}$$

Так как выражение $(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)a^\gamma$ является тензором, так же как a^δ, выражение в скобках в последнем члене цепи равенств (10.193) также является тензором, который мы обозначим

$$R_{\alpha\beta,\delta}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} = \frac{\partial\Gamma^\gamma_{\beta\delta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial\Gamma^\gamma_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} + \Gamma^\gamma_{\alpha\varepsilon}\Gamma^\varepsilon_{\beta\delta} - \Gamma^\gamma_{\beta\varepsilon}\Gamma^\varepsilon_{\alpha\delta}. \quad (10.194)$$

Этот тензор называют *тензором кривизны*[29]. Поэтому мы можем переписать равенство (10.193) в виде

$$(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)\, a^\gamma = R_{\alpha\beta,\delta}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} a^\delta. \quad (10.195)$$

Совершенно аналогично мы получим, что для ковариантного вектора b_γ

$$(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)\, b_\gamma = -R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} b_\delta \quad (10.196)$$

и для произвольного тензора $T_{\alpha_1\ldots\alpha_r}^{\cdot\quad\cdot\ \beta_1\ldots\beta_s}$

$$(\nabla_\alpha\nabla_\beta - \nabla_\beta\nabla_\alpha)\, T_{\alpha_1\ldots\alpha_r}^{\cdot\quad\cdot\ \beta_1\ldots\beta_s} =$$
$$= -R_{\alpha\beta,\alpha_1}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} T_{\gamma\alpha_2\ldots\alpha_r}^{\cdot\cdot\quad\cdot\ \beta_1\ldots\beta_r} - \ldots - R_{\alpha\beta,\alpha_r}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} T_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\gamma}^{\cdot\quad\cdot\quad\cdot\ \beta_1\ldots\beta_s} +$$
$$+ R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\beta_1} T_{\alpha_1\ldots\alpha_r}^{\cdot\quad\cdot\ \gamma\beta_2\ldots\beta_s} + \ldots + R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\beta_s} T_{\alpha_1\ldots\alpha_r}^{\cdot\quad\cdot\ \beta_1\ldots\beta_{s-1}\gamma}. \quad (10.197)$$

Из формулы (10.194), определяющей тензор $R_{\alpha\beta,\delta}^{\cdot\cdot\cdot\gamma}$, непосредственно вытекают следующие свойства этого тензора:

$$R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} = -R_{\beta\alpha,\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} \quad (10.198)$$

и

$$R_{\alpha\beta,\delta}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} + R_{\beta\delta,\alpha}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} + R_{\delta\alpha,\beta}^{\cdot\cdot\cdot\gamma} = 0, \quad (10.199)$$

а тензор

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\varepsilon} a_{\delta\varepsilon} \quad (10.200)$$

обладает свойством

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = R_{\gamma\delta,\alpha\beta}. \quad (10.201$$

Подсчитаем число линейно независимых координат тензора $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$. Из координат этого тензора, имеющих только 2 различных индекса 1 и 2, все отличные от нуля координаты или совпадают с координатой $R_{12,12}$, или отличаются от нее знаком. Поэтому число линейно

независимых координат тензора $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ с 2 различными индексами равно $\binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Из координат этого тензора, имеющих только 3 различных индекса 1, 2 и 3, все отличные от нуля координаты или совпадают с координатами $R_{12,13}$, $R_{21,23}$ и $R_{31,32}$, или отличаются от них знаком. Поэтому число линейно независимых координат тензора $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ с 3 различными координатами равно $3\cdot\binom{n-1}{3} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2}$. Из координат этого тензора, имеющих 4 различных индекса 1, 2, 3 и 4, все отличные от нуля координаты или совпадают с координатами $R_{12,34}$, $R_{23,14}$ и $R_{31,24}$, или отличаются от них знаком. Так как эти координаты связаны линейным тождеством (10.199), число линейно независимых координат тензора $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ с 4 различными координатами равно $2\binom{n-1}{4} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{12}$. Поэтому число линейно независимых координат тензора $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ равно

$$N = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2} + \\ + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{12} = \frac{n(n-1)^2(n-2)}{12}. \quad (10.202)$$

10.3.4. Определение поверхности ее квадратичными формами. Так как вектор $\mathbf{n}$ не изменяется при преобразованиях криволинейных координат на поверхности, а векторы $\mathbf{x}_\alpha$ преобразуются при этих преобразованиях как ковариантные векторы, мы можем записать ковариантные производные этих векторов в виде

$$\nabla_\beta \mathbf{x}_\alpha = \mathbf{x}_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\mathbf{x}_\gamma, \quad \nabla_\alpha \mathbf{n} = \mathbf{n}_\alpha, \quad (10.203)$$

откуда вытекает, что формулы Гаусса и Вейнгартена (10.164) и (10.173) теперь можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \nabla_\beta \mathbf{x}_\alpha &= b_{\alpha\beta}\mathbf{n}, \\ \nabla_\alpha \mathbf{n} &= -b_{\alpha\gamma}a^{\gamma\beta}\mathbf{x}_\beta. \end{aligned}\right\} \quad (10.204)$$

Если рассматривать равенства (10.204) как векторные дифференциальные уравнения с неизвестными векторными

функциями

$$\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{x}_\alpha(u^1, \ldots, u^{n-1}), \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(u^1, \ldots, u^{n-1}), \quad (10.205)$$

то условия интегрируемости этих уравнений в силу равенства (10.196) можно записать в виде

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha)\mathbf{x}_\gamma = R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta}\mathbf{x}_\delta \quad (10.206)$$

и

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha)\mathbf{n} = \mathbf{o}. \quad (10.207)$$

Так как

$$\nabla_\alpha(b_{\beta\gamma}\mathbf{n}) = (\nabla_\alpha b_{\beta\gamma})\mathbf{n} + b_{\beta\gamma}(\nabla_\alpha \mathbf{n}) = (\nabla_\alpha b_{\beta\gamma})\mathbf{n} - b_{\beta\gamma} b_{\alpha\delta} a^{\delta\varepsilon}\mathbf{x}_\varepsilon,$$

то соотношение (10.206) можно записать в виде

$$(\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma})\mathbf{n} - (b_{\beta\gamma} b_{\alpha\delta} a^{\delta\varepsilon} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta} a^{\delta\varepsilon})\mathbf{x}_\varepsilon = R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta}\mathbf{x}_\delta,$$

что равносильно двум соотношениям

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = b_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta} - b_{\beta\gamma} b_{\alpha\delta} \quad (10.208)$$

и

$$\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma} = 0. \quad (10.209)$$

Из равенства нулю ковариантной производной тензора $a_{\alpha\beta}$ следует равенство нулю ковариантной производной и тензора $a^{\alpha\beta}$. Поэтому соотношение (10.207) можно записать в виде

$$\nabla_\alpha(b_{\beta\gamma} a^{\gamma\delta}\mathbf{x}_\delta) - \nabla_\beta(b_{\alpha\gamma} a^{\gamma\delta}\mathbf{x}_\delta) =$$
$$= (\nabla_\alpha b_{\beta\gamma} - \nabla_\beta b_{\alpha\gamma}) a^{\gamma\delta}\mathbf{x}_\delta + (b_{\beta\gamma} a^{\gamma\delta} b_{\alpha\delta} - b_{\alpha\gamma} a^{\gamma\delta} b_{\beta\delta})\mathbf{n} = \mathbf{o},$$

что равносильно соотношению (10.209) и равенству

$$a^{\gamma\delta}(b_{\beta\gamma} b_{\alpha\delta} - b_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta}) = 0,$$

удовлетворяющемуся тождественно в силу симметричности тензора $a^{\gamma\delta}$. Поэтому *условиями интегрируемости уравнений* (10.204) *являются условия* (10.208) и (10.209).

Функции (10.205) помимо дифференциальных уравнений (10.204) удовлетворяют конечным уравнениям

$$\mathbf{x}_\alpha \mathbf{x}_\beta = a_{\alpha\beta}, \quad \mathbf{x}_\alpha \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1, \quad [\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\mathbf{n}] > 0, \quad (10.210)$$

при дифференцировании которых получаются соотношения, которые при подстановке вместо производных $\nabla_\beta \mathbf{x}_\alpha$ и $\nabla_\alpha \mathbf{n}$ и их значений из уравнений (10.204) тождественно выполняются при выполнении условий (10.210). Поэтому если заданы функции

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(u^1, \ldots, u^{n-1}), \qquad b_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}(u^1, \ldots, u^{n-1}), \quad (10.211)$$

удовлетворяющие условиям (10.208) и (10.209), где функции $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$, с помощью которых вычисляются производные $\nabla_\alpha b_{\beta\gamma}$, выражаются через функции $a_{\alpha\beta}$ и их производные по формулам (10.171), а функции $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ выражаются через функции $a_{\alpha\beta}$ и $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ и их производные по формулам (10.194) и (10.200), и указано, что при $u^\alpha = u^\alpha_0$ векторы $\mathbf{x}_\alpha$ и $\mathbf{n}$ принимают значения $(\mathbf{x}_\alpha)_0$ и $\mathbf{n}_0$, эта система уравнений обладает единственным решением (10.205), при $u^\alpha = u^\alpha_0$ принимающим значения $(\mathbf{x}_\alpha)_0$ и $\mathbf{n}_0$. Так как начальные значения определены с точностью до вращения первого рода, решения (10.205) также определены с точностью до вращения первого рода. Определив функции $\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{x}_\alpha\ (u^1, \ldots, u^{n-1})$, мы можем найти вектор

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}\ (u^1, \ldots, u^{n-1}), \quad (10.212)$$

определенный с точностью до переноса на произвольный вектор $\mathbf{x}_0$. Таким образом, *первая и вторая квадратичные формы поверхности определяют поверхность в n-пространстве с точностью до произвольного вращения первого рода и переноса, т. е. с точностью до произвольного движения первого рода*[30].

Условие (10.208) можно рассматривать как алгебраическое уравнение для определения коэффициентов $b_{\alpha\beta}$ по координатам тензора $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$. Так как число независимых коэффициентов $b_{\alpha\beta}$ равно $\frac{n(n-1)}{2}$, а число уравнений (10.208) равно числу независимых координат тензора $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$, т. е. числу (10.202), то система алгебраических уравнений (10.208) в основном случае разрешима при выполнении условия

$$\frac{n(n-1)^2(n-2)}{12} \geqslant \frac{n(n-1)}{2},$$

т. е.

$$(n-1)(n-2) \geqslant 6. \qquad (10.213)$$

Так как $(n-1)(n-2) < 6$ при $n < 4$, $(n-1)(n-2) = 6$ при $n = 4$ и $(n-1)(n-2) > 6$ при $n > 4$, мы получаем, что при $n \geqslant 4$ в основном случае уравнения (10.208) дана возможность определить коэффициенты $b_{\alpha\beta}$ второй квадратичной формы поверхности по координатам тензора $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$, которые в свою очередь выражаются через коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ первой квадратичной формы и их производные. Как видно из уравнений (10.208), эти уравнения позволяют определить коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ с точностью до знака, изменение которого соответствует изменению направления вектора **n**. Поэтому при $n \geqslant 4$ *поверхность в n-пространстве в основном случае определяется с точностью до движения заданием одной первой квадратичной формы*[31].

Если между двумя поверхностями установлено взаимно однозначное соответствие, при котором все длины соответствующих линий на поверхностях равны, и, кроме того, поверхности отнесены к таким криволинейным координатам, значения которых в соответствующих точках равны, то в соответственных точках этих поверхностей совпадают значения тензора $a_{\alpha\beta}$. Если при этом указанные поверхности не конгруэнтны, то значения тензора $b_{\alpha\beta}$ в соответственных точках не совпадают. В этом случае говорят, что одна поверхность получена из другой *изгибанием*. Из того, что при $n \geqslant 4$ поверхность в n-пространстве в основном случае определяется с точностью до движения заданием тензора $a_{\alpha\beta}$, следует, что при $n \geqslant 4$ *поверхность в n-пространстве в основном случае неизгибаема*.

10.3.5. Параллельный перенос. Будем говорить, что вектор **a** поверхности, определенный в точке M_0, *параллельно перенесен*[32] в бесконечно близкую точку M, если приращение вектора **a** при переходе к точке M таково, что абсолютный дифференциал D**a** равен нулю. Поэтому при параллельном переносе выполняется равенство

$$Da^\alpha = da^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} a^\beta du^\gamma = 0. \qquad (10.214)$$

Определив параллельный перенос в бесконечно близкую точку, мы можем определить параллельный перенос в любую точку линии $u^\alpha = u^\alpha(t)$, решая вдоль этой линии систему дифференциальных уравнений

$$\frac{da^\alpha}{dt} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} a^\beta \frac{du^\gamma}{dt} = 0 \tag{10.215}$$

и полагая в качестве начального условия при $t = t_0$ значение вектора **a** в точке M_0, соответствующей этому значению t.

Аналогично можно определить параллельный перенос ковариантного вектора b_α с помощью системы дифференциальных уравнений

$$\frac{db_\alpha}{dt} - \Gamma^\beta_{\alpha\gamma} b_\beta \frac{du^\gamma}{dt} = 0 \tag{10.216}$$

и параллельный перенос произвольного тензора $T^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\cdot\beta_1\ldots\beta_s}$ с помощью системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} T^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\cdot\beta_1\ldots\beta_s} &+ \\ + \Big(-\Gamma^\alpha_{\alpha_1\gamma} T^{\cdot}_{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_r}{}^{\cdot\beta_1\ldots\beta_s} - \ldots - \Gamma^\alpha_{\alpha_r\gamma} T^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_{r-1}\alpha}{}^{\cdot\beta_1\ldots\beta_s} &+ \\ + \Gamma^{\beta_1}_{\beta\gamma} T^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\cdot\beta\beta_2\ldots\beta_s} + \ldots + \Gamma^{\beta_s}_{\beta\gamma} T^{\cdot}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}{}^{\cdot\beta_1\ldots\beta_{s-1}\beta}\Big) \frac{du^\gamma}{dt} &= 0.\end{aligned} \tag{10.217}$$

10.3.6. Геодезическая кривизна линии. Будем называть *геодезической кривизной*[33] k_g линии на поверхности модуль абсолютной производной единичного касательного вектора линии по длине ее дуги

$$k_g = \left|\frac{D\mathbf{t}_1}{ds}\right|. \tag{10.218}$$

Сам вектор $\frac{D\mathbf{t}_1}{ds}$, как видно из его определения, является прямоугольной проекцией вектора $\frac{d\mathbf{t}_1}{ds}$ на касательную плоскость, т. е.

$$\frac{D\mathbf{t}_1}{ds} = \frac{d\mathbf{t}_1}{ds} - \frac{d\mathbf{t}_1}{ds}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}. \tag{10.219}$$

Если обозначить единичный вектор, направленный по вектору $\frac{D\mathbf{t}_1}{ds}$, через $\mathbf{t}_{2g}$, то

$$\frac{D\mathbf{t}_1}{ds} = k_g \mathbf{t}_{2g} \tag{10.220}$$

и в силу (10.133) и (10.134) формулу (10.219) можно переписать в виде

$$k_1 \mathbf{t}_2 = k_g \mathbf{t}_{2g} + k_0 \mathbf{n}. \tag{10.221}$$

Так как вектор $\mathbf{t}_{2g}$ направлен по касательной плоскости и, следовательно, перпендикулярен вектору $\mathbf{n}$, вектор $k_1 \mathbf{t}_2$ направлен по гипотенузе прямоугольного треугольника, а векторы $k_g \mathbf{t}_{2g}$ и $k_0 \mathbf{n}$ — по его катетам. Поэтому 1-я *кривизна* k_1 *линии на поверхности связана с геодезической кривизной* k_g *этой линии и нормальной кривизной* k_0 *этой линии соотношением*

$$k_1^2 = k_g^2 + k_0^2. \tag{10.222}$$

10.3.7. Геодезические линии. *Геодезическими линиями*[34] на поверхности называются такие линии, во всех точках которых геодезическая кривизна k_g равна нулю. Поэтому из формулы (10.218) следует, что во *всех точках геодезической линии абсолютный дифференциал касательного вектора равен нулю*

$$D\mathbf{t}_1 = \mathbf{o} \tag{10.223}$$

или, что равносильно этому, *касательный вектор к геодезической линии переносится вдоль нее параллельно*. Поэтому геодезические линии называют *прямейшими* линиями поверхности. Из равенства (10.219) следует, что дифференциал $d\mathbf{t}_1$ единичного касательного вектора к геодезической линии поверхности направлен по нормали к поверхности. Так как с другой стороны в силу формулы (10.28) дифференциал $d\mathbf{t}_1$ направлен по вектору $\mathbf{t}_2$ сопровождающего базиса линии, *необходимым и достаточным условием того, что линия на поверхности является геодезической, является то, что вектор* $\mathbf{t}_2$ *сопровождающего базиса этой линии совпадает с вектором нормали к поверхности.*

Формула (10.223) равносильна формуле

$$\frac{D}{ds}\left(\frac{d\mathbf{x}}{ds}\right) = \mathbf{o}. \tag{10.224}$$

Так как координатами вектора $d\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha du^\alpha$ относительно базиса $\mathbf{x}_\alpha$ являются дифференциалы du^α, формула (10.224) может быть записана в криволинейных координатах в виде

$$\frac{d^2u^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{du^\beta}{ds}\frac{du^\gamma}{ds} = 0. \qquad (10.225)$$

Формулу (10.225) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений, интегральными линиями которой являются геодезические линии. Так как эти дифференциальные уравнения являются уравнениями второго порядка, то через каждую точку с координатами u_0^α в направлении, определяемом производными $\left(\frac{du^\alpha}{ds}\right)_0$, проходит единственная геодезическая линия; единственная геодезическая линия проходит и через две достаточно близкие точки поверхности.

Можно показать, что геодезические линии в достаточно малых областях поверхности являются *кратчайшими* линиями поверхности.

Так как на плоскости дифференциал $D\mathbf{t}_1$ совпадает с обычным дифференциалом $d\mathbf{t}_1$, то геодезические линии плоскости определяются условием $\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \mathbf{o}$, т. е. *всякая геодезическая линия плоскости является прямой линией.* Так как на сфере вектор $\mathbf{t}_2$ сопровождающего базиса большой окружности направлен по нормали к сфере, большие окружности являются геодезическими линиями сферы, а так как через каждую точку сферы в данном направлении проходит единственная геодезическая линия и единственная большая окружность, *всякая геодезическая линия сферы является ее большой окружностью.*

Можно показать, что параллельный перенос векторов из точки M_0 в бесконечно близкую точку M порождается отображением окрестности точки M_0 в окрестность точки M, состоящим из отражения окрестности точки M_0 по геодезическим линиям относительно этой точки и из отражения окрестности точки M', являющейся серединой отрезка геодезической линии, соединяющего точки M_0 и M относительно этой точки.

10.3.8 Кривизна поверхности в 2-мерном направлении. Рассмотрим параллельный перенос единичного вектора **a** из точки M_0 по периметру бесконечно малого треугольника $M_0M_1M_2$ и подсчитаем приращения Δa^α координат вектора **a** с учетом бесконечно малых второго порядка.

Приращения координат u^α при переходе от точки M_0 к точкам M_1 и M_2 обозначим соответственно через du^α и δu^α. Тогда приращения Δa^α координат вектора **a** после его возвращения в точку M_0 равны

$$\Delta a^\alpha = \frac{1}{2} R_{\delta\gamma,\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} a^\beta du^\gamma \delta u^\alpha \tag{10.226}$$

или в силу тождества (10.198)

$$\Delta a^\alpha = \frac{1}{4} R_{\delta\gamma,\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} a^\beta (du^\gamma \delta u^\delta - du^\delta \delta u^\gamma). \tag{10.227}$$

Так как дифференциалы du^α и δu^α являются координатами векторов $d\mathbf{x}$ и $\delta\mathbf{x}$, выражения $\frac{1}{4}(du^\gamma \delta u^\delta - du^\delta \delta u^\gamma)$ являются координатами кососимметрического оператора

$$\Delta S = \frac{1}{4}(d\mathbf{x}\cdot\delta\mathbf{x} - \delta\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}). \tag{10.228}$$

Заметим, что, заменяя в выражении кососимметрического оператора $S = \frac{1}{2}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{p})$ векторы **p** и **q** их линейными комбинациями $\mathbf{r} = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}$ и $\mathbf{s} = \rho\mathbf{p} + \sigma\mathbf{q}$, мы получим кососимметрический оператор

$$\frac{1}{2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s} - \mathbf{s}\cdot\mathbf{r}) = (\lambda\sigma - \mu\rho)S, \tag{10.229}$$

отличающийся от оператора S только скалярным множителем. Если **p** и **q** — единичные перпендикулярные векторы, составляющие правую пару в 2-плоскости векторов $d\mathbf{x}$ и $\delta\mathbf{x}$, то множитель $\lambda\sigma - \mu\rho$ равен относительной площади параллелограмма, построенного на ориентированных отрезках, представляющих векторы **r** и **s**. Поэтому если мы обозначим относительную площадь треугольника $M_0M_1M_2$ через ΔS и, следовательно, относительную площадь параллелограмма, построенного на ориентированных отрезках, представляющих векторы $d\mathbf{x}$ и $\delta\mathbf{x}$, через

$2\Delta S$, а с другой стороны, если мы обозначим кососимметрический оператор $\frac{1}{2}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{p})$, где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — единичные перпендикулярные векторы, являющиеся линейными комбинациями векторов $d\mathbf{x}$ и $\delta\mathbf{x}$, через S^0, то мы можем записать оператор (10.228) в виде

$$\frac{1}{4}(d\mathbf{x}\cdot\delta\mathbf{x} - \delta\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}) = \Delta S\cdot S^0. \qquad (10.230)$$

Если мы условимся записывать координаты оператора S^0 через $S_0^{\gamma\delta}$, равенство (10.230) можно переписать в координатах в виде

$$\Delta S^{\gamma\delta} = \frac{1}{4}(du^\gamma\delta u^\delta - du^\delta\delta u^\gamma) = \Delta S\cdot S_0{}^{\gamma\delta} \qquad (10.231)$$

и, следовательно, равенство (10.227) — в виде

$$\Delta a^\alpha = R_{\delta\gamma,\beta}^{\cdot\cdot\cdot\alpha} a^\beta S_0^{\gamma\delta}\Delta S. \qquad (10.232)$$

Предположим теперь, что вектор $\mathbf{a}$ является линейной комбинацией векторов $d\mathbf{x}$ и $\delta\mathbf{x}$. Тогда за векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, определяющие оператор S^0, можно взять переносимый вектор $\mathbf{a}$ и перпендикулярный ему единичный вектор $\mathbf{b}$, также являющийся линейной комбинацией векторов $d\mathbf{x}$ и $\delta\mathbf{x}$ и составляющий правую пару с вектором $\mathbf{a}$. Вектор $\Delta\mathbf{a}$ в общем случае уже не является линейной комбинацией векторов $d\mathbf{x}$ и $\delta\mathbf{x}$. Обозначим через $\widetilde{\Delta}\mathbf{a}$ прямоугольную проекцию вектора $\Delta\mathbf{a}$ на 2-плоскость, определяемую векторами $d\mathbf{x}$ и $\delta\mathbf{x}$. Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\Delta\mathbf{a}$ равно

$$\mathbf{a}\Delta\mathbf{a} = a_{\alpha\beta}a^\alpha\Delta a^\beta = a_{\alpha\beta}R_{\delta\gamma,\varepsilon}^{\cdot\cdot\cdot\beta}a^\alpha a^\varepsilon S_0^{\gamma\delta}\Delta S = R_{\delta\gamma,\varepsilon\alpha}a^\alpha a^\varepsilon S_0^{\gamma\delta}\Delta S.$$

Но в силу равенств (10.198) и (10.201) $R_{\delta\gamma,\varepsilon\alpha} = -R_{\delta\gamma,\alpha\varepsilon}$, откуда следует, что произведение $R_{\delta\gamma,\varepsilon\alpha}\,a^\alpha a^\varepsilon = 0$ и, следовательно, $\mathbf{a}\Delta\mathbf{a} = 0$, т. е. вектор $\Delta\mathbf{a}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{a}$. Из того, что вектор $\mathbf{a}$ перпендикулярен и вектору $\Delta\mathbf{a}$ и разности векторов $\Delta\mathbf{a} - \widetilde{\Delta}\mathbf{a}$, вытекает, что вектор $\mathbf{a}$ перпендикулярен и вектору $\widetilde{\Delta}\mathbf{a}$.

Обозначим угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a} + \widetilde{\Delta}\mathbf{a}$ через $\Delta\varphi$. Пренебрегая скалярным квадратом вектора $\widetilde{\Delta}\mathbf{a}$, мы

можем считать, что $(\mathbf{a} + \widetilde{\Delta}\mathbf{a})^2 = 1$. Поэтому, пренебрегая разностью между равносильными бесконечно малыми $\Delta\varphi$ и $\sin\Delta\varphi$, мы получим, что

$$\Delta\varphi = \sin\Delta\varphi = (\mathbf{a} + \widetilde{\Delta}\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{b}\widetilde{\Delta}\mathbf{a} = a_{\alpha\beta}R_{\delta\gamma,\,\varepsilon}^{\cdot\cdot\;\;\cdot\beta}a^{\varepsilon}b^{\alpha}S_0^{\gamma\delta}\Delta S =$$
$$= R_{\delta\gamma,\,\varepsilon\alpha}\,a^{\varepsilon}b^{\alpha}S_0^{\gamma\delta}\,\Delta S = \frac{1}{2}R_{\delta\gamma,\,\varepsilon\alpha}(a^{\varepsilon}b^{\alpha} - a^{\alpha}b^{\varepsilon})\,S_0^{\gamma\delta}\Delta S$$

или, так как $\frac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}) = S^0$,

$$\Delta\varphi = R_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}S_0^{\alpha\beta}S_0^{\gamma\delta}\,\Delta S. \qquad (10.233)$$

Поэтому с учетом бесконечно малых второго порядка отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}$ равно $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}S_0^{\alpha\beta}S_0^{\gamma\delta}$. Это выражение равно пределу отношения угла $\Delta\varphi$, на который поворачивается вектор $\mathbf{a}$ при параллельном переносе вдоль бесконечно малого треугольника $M_0M_1M_2$, к площади ΔS этого треугольника, равной половине площади параллелограмма, построенного на отрезках M_0M_1 и M_0M_2, при стягивании треугольника $M_0M_1M_2$ в точку. Будем называть предел отношения $\frac{\Delta\varphi}{\Delta S}$ *кривизной поверхности в 2-мерном направлении* [35], определяемом треугольником $M_0M_1M_2$, и обозначать ее $K_0 = \frac{d\varphi}{dS}$. Поэтому

$$K_0 = R_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\,S_0^{\alpha\beta}S_0^{\gamma\delta}. \qquad (10.234)$$

Площадь S параллелограмма, построенного на ориентированных отрезках, представляемых векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, в силу (5.24) определяется соотношением

$$S^2 = \mathbf{p}^2\mathbf{q}^2 - (\mathbf{pq})^2.$$

Если мы будем записывать координаты оператора $S = \frac{1}{2}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} - \mathbf{q}\cdot\mathbf{p})$ в виде $S^{\alpha\beta}$, то

$$S^2 = \mathbf{p}^2\mathbf{q}^2 - (\mathbf{pq})^2 = a_{\alpha\gamma}p^{\alpha}p^{\gamma}\cdot a_{\beta\delta}q^{\beta}q^{\delta} - a_{\beta\gamma}p^{\gamma}q^{\beta}\cdot a_{\alpha\delta}p^{\alpha}q^{\delta} =$$
$$= \frac{1}{4}(a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} - a_{\beta\gamma}a_{\alpha\delta})(p^{\alpha}q^{\beta} - q^{\alpha}p^{\beta})(p^{\gamma}q^{\delta} - q^{\gamma}p^{\delta}) =$$
$$= (a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} - a_{\beta\gamma}a_{\alpha\delta})\,S^{\alpha\beta}S^{\gamma\delta}. \qquad (10.235)$$

В частности, в том случае, когда векторы **p** и **q** — единичные перпендикулярные векторы, $S = 1$ и

$$(a_{\alpha\gamma}\, a_{\beta\delta} - a_{\beta\gamma}\, a_{\alpha\delta})\, S_0^{\alpha\beta} S_0^{\gamma\delta} = 1. \qquad (10.236)$$

Поэтому если мы заменим в формуле (10.234) оператор S^0, определяемый единичными перпендикулярными векторами **p** и **q**, на оператор S, определяемый произвольными векторами **p** и **q**, мы должны разделить правую часть формулы (10.234) на S^2, т. е. на правую часть равенства (10.235). Поэтому кривизна K_0 поверхности в 2-мерном направлении, определяемом векторами $d\mathbf{x}$ и $\delta\mathbf{x}$, может быть записана в виде

$$K_0 = \frac{R_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\Delta S^{\alpha\beta}\,\Delta S^{\gamma\delta}}{(a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} - a_{\beta\gamma}a_{\alpha\delta})\,\Delta S^{\alpha\beta}\,\Delta S^{\gamma\delta}}, \qquad (10.237)$$

где $\Delta S^{\alpha\beta}$ имеет вид (10.231).

В силу кососимметричности тензора $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ по парам индексов α, β и γ, δ в выражении (10.237), каждую разность $\Delta S^{\alpha\beta} = \frac{1}{4}(du^\alpha\delta u^\beta - du^\beta\delta u^\alpha)$ можно заменить произведением $\frac{1}{2}\,du^\alpha\delta u^\beta$ и, следовательно, кривизна K_0 может быть записана в виде

$$K_0 = \frac{R_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\, du^\alpha du^\gamma \delta u^\beta \delta u^\delta}{(a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} - a_{\beta\gamma}a_{\alpha\delta})\, du^\alpha du^\gamma \delta u^\beta \delta u^\delta}. \qquad (10.238)$$

В силу соотношения (10.208) формулу (10.238) можно переписать также в виде

$$K_0 = \frac{(b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta} - b_{\beta\gamma}b_{\alpha\delta})\, du^\alpha du^\gamma \delta u^\beta \delta u^\delta}{(a_{\alpha\gamma}a_{\beta\delta} - a_{\beta\gamma}a_{\alpha\delta})\, du^\alpha du^\gamma \delta u^\beta \delta u^\delta}. \qquad (10.239)$$

При $n = 3$ формулу (10.239) можно переписать в виде

$$K_0 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2},$$

т. е. в этом случае кривизна K_0 равна отношению определителей $\mathrm{Det}(b)$ и $\mathrm{Det}\,(a)$ матриц $(b_{\alpha\beta})$ и $(a_{\alpha\beta})$, т. е. определителю $\mathrm{Det}\,(\mathrm{A})$, и, следовательно, совпадает с полной (гауссовой) кривизной K.

Заметим, что *в случае плоскости*, когда $b_{\alpha\beta} = 0$, *кривизна K_0 во всех 2-мерных направлениях равна нулю*, а

в случае сферы радиуса r, когда $\mathbf{n} = \frac{1}{r}\mathbf{x}$, тензоры $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ связаны соотношением $b_{\alpha\beta} = \frac{1}{r} a_{\alpha\beta}$ и формула (10.239) показывает, что *в случае сферы кривизна K_0 во всех 2-мерных направлениях равна $\frac{1}{r^2}$.*

Так как тензор $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ выражается через тензор $a_{\alpha\beta}$ и его производные, *кривизна K_0 поверхности не изменяется при ее изгибании* [36].

10.3.9. Теорема Гаусса — Бонне. Так как угол, на который отклоняется вектор при параллельном переносе по контуру области, состоящей из двух областей, равен сумме углов, на которые отклонится вектор при параллельном переносе по контурам этих двух областей, то мы найдем угол, на который отклонится вектор при параллельном переносе по контуру 2-мерной области D, интегрируя выражение $\Delta\varphi$ по этой области. Так как кривизну K_0 можно рассматривать как производную $\frac{d\varphi}{dS}$, угол $\Delta\varphi$, на который отклонится вектор при параллельном переносе по контуру области D, равен интегралу

$$\Delta\varphi = \iint\limits_D K_0 dS. \tag{10.240}$$

Предположим, что область D ограничена контуром C, состоящим из нескольких дуг, соединенных в N угловых точках. На рис. 10.2 изображен контур $M_0M_1M_2M_3M_4$ с угловыми точками M_0, M_1, M_2, M_3, M_4. Рассмотрим в каждой точке контура переносимый нами вектор $\mathbf{a}$, касательный к контуру вектор $\mathbf{t}_1$ и некоторый вектор $\mathbf{l}$, заданный по определенному закону в каждой точке контура. Обозначим угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{l}$ через φ, а угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{t}_1$ через ψ. При обходе контура векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{t}_1$ возвращаются в свое первоначальное

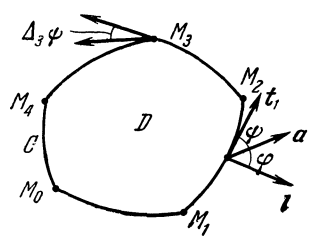

Рис. 10.2.

положение, первый из них описывает угол, равный нулю, а второй — угол, равный 2π. Поэтому приращение угла $\varphi + \psi$ между векторами $\mathbf{t}_1$ и $\mathbf{l}$ при обходе контура равно $\Delta(\varphi + \psi) = 2\pi$, т. е. $\Delta\varphi + \Delta\psi = 2\pi$. Приращение угла $\Delta\psi$ равно сумме приращений угла ψ вдоль дуг и их скачков в угловых точках, т. е.

$$\Delta\psi = \oint_C d\psi + \sum_i \Delta_i\psi, \tag{10.241}$$

где $\Delta_i\psi$ — скачок угла ψ, т. е. поворот вектора $\mathbf{t}_1$, в i-й угловой точке M_i. Но дифференциал $d\psi$ можно записать также в виде $D\psi$, т. е. в силу формулы (10.218),

$$d\psi = D\psi = \frac{D\psi}{ds}\,ds = \left|\frac{D\mathbf{t}_1}{ds}\right| ds = k_g ds. \tag{10.242}$$

Из формул (10.240), (10.241) и (10.242) вытекает *формула Гаусса—Бонне* [37]

$$\iint_D K_0 dS + \oint_C k_g ds + \sum_i \Delta_i\psi = 2\pi. \tag{10.243}$$

В случае, когда контур образован из дуг геодезических линий, вдоль этого контура $k_g = 0$ и формула (10.243) принимает вид

$$\iint_D K_0 dS + \sum_i \Delta_i\psi = 2\pi. \tag{10.244}$$

Так как каждый из углов $\Delta_i\psi$ является дополнением до π внутреннего угла A_i геодезического N-угольника при вершине M_i, т. е. $\Delta_i\psi = \pi - A_i$, формулу (10.244) можно переписать в виде

$$\iint_D K_0 dS = \sum_i A_i - (N-2)\pi. \tag{10.245}$$

В частности, для геодезического треугольника мы получаем

$$\iint_D K_0 dS = \sum_i A_i - \pi. \tag{10.246}$$

В случае сферы радиуса r, когда $K_0 = \frac{1}{r^2}$, формула (10.246) переходит в формулу (6.66) для площади сферического треугольника. По аналогии со сферическим треугольником выражение $\sum_i A_i - \pi$ называется *угловым избытком* геодезического треугольника поверхности. Из формулы (10.246) вытекает, что *кривизну K_0 поверхности в точке M_0 в 2-мерном направлении можно определить как предел отношения углового избытка $\sum_i A_i - \pi$ геодезического треугольника $M_0M_1M_2$ к площади этого треугольника при стягивании этого треугольника в точку M_0.*

10.3.10. Римановы пространства и пространства аффинной связности. Если рассматривать координаты $u^1, u^2, \ldots, u^n$ не как криволинейные координаты поверхности $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, \ldots, u^n)$ в $(n+1)$-пространстве, а как координаты точек абстрактно заданного n-пространства, то в каждой точке этого n-пространства можно определить векторы a^α и тензоры $T^{\cdot\ldots\cdot\beta_1\ldots\beta_s}_{\alpha_1\ldots\alpha_r}$, преобразующиеся по законам (10.177) и (10.178). Если в каждой точке этого n-пространства определен тензор $a_{\alpha\beta}$, определяющий положительно определенную форму (10.121), то в n-пространстве можно определить длины линий по формуле (10.122), углы между линиями по формуле (10.123), параллельный перенос векторов и тензоров с помощью дифференциальных уравнений (10.215)—(10.217), геодезическую кривизну линий по формуле (10.218), геодезические линии с помощью дифференциальных уравнений (10.225) и кривизну в 2-мерном направлении по формуле (10.238). Такие n-пространства, определенные впервые Б. Риманом, называют *римановыми пространствами*[38]. Римановы пространства, в каждой точке которых кривизна в 2-мерных направлениях одна и та же для всех 2-мерных направлений, называются *римановыми пространствами постоянной кривизны*. В силу теоремы Шура[39] кривизна в 2-мерных направлениях пространств постоянной кривизны одна и та же и для всех точек пространства. Плоскости и сферы евклидова $(n+1)$-пространства, очевидно, являются примерами римановых n-пространств

постоянной кривизны, которая в случае плоскостей равна 0, а в случае сфер радиуса r равна $\frac{1}{r^2}$.

Если в каждой точке абстрактно заданного n-пространства заданы только величины $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$, преобразующиеся по закону (10.180), то в n-пространстве нельзя определить длин линий и углов между линиями, геодезическую кривизну линий и кривизну в 2-мерном направлении, но можно определить параллельный перенос векторов и тензоров и геодезические линии. В пространствах аффинной связности на геодезических линиях определен параметр t, при котором геодезические линии определяются дифференциальными уравнениями вида (10.225). Этот параметр определен с точностью до преобразования $t' = at + b$ и называется *аффинным параметром*. Наличие аффинного параметра геодезических линий позволяет определять середину отрезка геодезической линии и отражение от точки по геодезическим линиям. Если в римановых n-пространствах векторы, определенные в точке этого пространства, можно рассматривать как векторы евклидова n-пространства, то в этом случае векторы, определенные в точке этого пространства, можно рассматривать как векторы аффинного n-пространства и параллельный перенос векторов можно рассматривать как аффинное отображение аффинных n-пространств, определенных в бесконечно близких точках n-пространства. Поэтому n-пространства, в точках которых заданы величины $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$, называют *пространствами аффинной связности* [40]. Этим и объясняется то, что величины $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ называются *координатами объекта связности*.

Важнейшим классом римановых пространств и пространств аффинной связности являются такие пространства, в которых отражение от точек по геодезическим линиям не изменяет расстояний между бесконечно близкими точками риманова пространства или переводит геодезические линии пространства аффинной связности в геодезические линии с сохранением их аффинного параметра. Такие пространства называются *симметрическими римановыми пространствами и симметрическими пространствами аффинной связности* [41]. Можно показать, что для того, чтобы риманово пространство или пространство

аффинной связности было бы симметрическим, необходимо и достаточно, чтобы ковариантная производная его тензора кривизны была бы тождественно равна нулю, т. е. $\nabla_\varepsilon R_{\alpha\beta,\gamma}^{\cdot\cdot\cdot\delta} = 0$. Римановы пространства постоянной кривизны являются частными случаями симметрического риманова пространства. Примером симметрического пространства аффинной связности является *группа движений первого рода* n-пространства, причем роль геодезических линий в этой группе играют однопараметрические подгруппы (10.64) и их классы смежности, роль аффинного параметра однопараметрической подгруппы играет параметр t движения (10.64), а отражение от тождественного преобразования $'\mathbf{x} = \mathbf{x}$ переводит каждое движение группы в обратное движение [42].