

## Конформные преобразования

### § 1. Конформное пространство и конформные преобразования

**11.1.1. Конформные преобразования.** Будем называть *конформным преобразованием*  $n$ -пространства<sup>1</sup> такое преобразование

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (11.1)$$

определенное дифференцируемой векторной функцией векторного аргумента, при котором не изменяются углы между линиями. Если в общем случае дифференцируемой функции (11.1) производная

$$\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{x}'}{d\mathbf{x}} \quad (11.2)$$

является произвольным линейным оператором, то требование сохранения углов равносильно требованию о том, чтобы оператор (11.2) только скалярным множителем отличался от ортогонального оператора, т. е. имел вид

$$\mathbf{A} = k\mathbf{U}, \quad (11.3)$$

где  $\mathbf{U}$  — ортогональный оператор, а  $k$  — скалярный множитель.

Простейшим частным случаем конформных преобразований являются *подобия*

$$\mathbf{x}' = k\mathbf{U}\mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad (11.4)$$

для которых производная (11.2) во всех точках равна одному и тому же оператору (11.3).

**11.1.2. Теорема Лиувилля.** Докажем следующую теорему Лиувилля<sup>2</sup>: при  $n \geq 3$  конформные преобразования  $n$ -пространства переводят сферы в сферы или плоскости.

В самом деле, из того, что конформные преобразования сохраняют углы между линиями, вытекает, что эти преобразования сохраняют и углы между поверхностями и, следовательно, переводят  $n$ -ортогональные системы поверхностей в такие же системы.

Но всякую поверхность  $x = x(u^1, u^2, \dots, u^{n-1})$  с нормалями  $n = n(u^1, u^2, \dots, u^{n-1})$  можно включить в  $n$ -ортогональную систему, дополнив ее «параллельными поверхностями»

$$x(t) = x(u^1, \dots, u^{n-1}) + n(u^1, \dots, u^{n-1}) t$$

и  $n - 1$  семействами поверхностей, состоящих из нормалей данной поверхности и высекающих на ней координатные  $(n - 2)$ -поверхности  $u^\alpha = \text{const}$  системы координат на поверхности, координатными линиями которой являются ее линии кривизны. Подвергнув эту систему конформному преобразованию, мы получим новую  $n$ -ортогональную систему, а поверхности, в которые перейдут поверхности, состоящие из нормалей данной поверхности, снова будут высекать из поверхности, в которую перейдет данная поверхность, линии кривизны. Таким образом, при конформном преобразовании линии кривизны переходят в линии кривизны. Отсюда следует, что при конформном преобразовании сфера или плоскость переходит только в сферу или в плоскость, так как это единственныe поверхности, каждая линия которых является линией кривизны и которые поэтому могут быть включены в  $n$ -ортогональные системы бесконечным множеством способов.

Из того, что при конформных преобразованиях  $n$ -пространства сферы переходят в сферы или плоскости, вытекает, что при этих преобразованиях  $m$ -сфера, являющиеся пересечениями сфер, переходят в  $m$ -сфера или в  $m$ -плоскости и, в частности, окружности переходят в окружности или в прямые.

При  $n = 2$  это доказательство не имеет места, так как семейство концентричных окружностей и семейство параллельных прямых 2-плоскости могут быть включены в 2-ортогональную систему линий единственным образом: вторым семейством этих систем являются общие диаметры концентричных окружностей или общие перпендикуляры

параллельных прямых, вследствие чего эти системы линий могут быть переведены конформными преобразованиями 2-плоскости в произвольные 2-ортогональные системы линий. Конформные преобразования 2-плоскости, при которых круги переходят в круги или прямые, называются *круговыми преобразованиями*.

**11.1.3. Инверсия относительно сферы.** Важнейшим видом конформного преобразования является *инверсия относительно сферы*<sup>3</sup>, т. е. такое преобразование, которое переводит всякую точку  $M$   $n$ -пространства, за исключением центра  $M_0$  сферы радиуса  $r$ , в такую точку  $M'$  луча  $M_0M$ , для которой

$$M_0M \cdot M_0M' = r^2. \quad (11.5)$$

На рис. 11.1 изображена инверсия относительно окружности. Точка  $N$  является точкой пересечения окружности

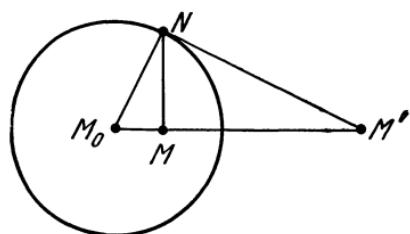


Рис. 11.1.

с перпендикуляром к прямой  $M_0M$ , восставленным в точке  $M$ , а точка  $M'$  — точкой пересечения касательной к окружности в точке  $N$  с прямой  $M_0M$ . Это построение получается из подобия прямоугольных треугольников

$M_0MN$  и  $M'M_0N$ , вытекающего из пропорциональности  $\frac{M_0M}{M_0N} = \frac{M_0N}{M_0M'}$ , равносильной условию (11.5).

Инверсия относительно сферы

$$(x - x_0)^2 = r^2$$

имеет вид

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_0 + \frac{r^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (11.6)$$

В частности, при  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{o}$  инверсия (11.6) принимает вид

$$\mathbf{x}' = \frac{r^2}{\mathbf{x}^2} \mathbf{x}. \quad (11.7)$$

*Инверсия является конформным преобразованием*, так как производная (11.2) в случае инверсии (11.7) имеет вид

$$\mathbf{A} = \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}(\mathbf{I} - 2\mathbf{x}^0 \cdot \mathbf{x}^0), \quad (11.8)$$

где  $\mathbf{x}^0 = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ . Но оператор

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} - 2\mathbf{x}^0 \cdot \mathbf{x}^0 \quad (11.9)$$

— оператор отражения от плоскости, проходящей через точку  $O(0)$  перпендикулярно к вектору  $\mathbf{x}$  и, следовательно, является ортогональным оператором. Поэтому в случае инверсии производная (11.2) имеет вид (11.3), где  $\mathbf{U}$  — ортогональный оператор (11.9), а  $k = \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}$ .

Из определения инверсии видно, что *инверсия относительно сферы является инволюционным преобразованием и что при инверсии относительно сферы остаются неподвижными только точки этой сферы*.

Из того, что инверсия является конформным преобразованием, в силу теоремы Лиувилля вытекает, что при  $n > 3$  инверсия переводит сферы в сферы или плоскости. Покажем это непосредственно для инверсии (11.7). В самом деле, при инверсии (11.7) сфера (6.5), т. е.

$$a\mathbf{x}^2 + 2b\mathbf{x} + c = 0, \quad (11.10)$$

переходит в поверхность

$$c\mathbf{x}^2 + 2b\mathbf{x} \cdot r^2 + ar^4 = 0, \quad (11.11)$$

являющуюся сферой при  $c \neq 0$  и плоскостью при  $c = 0$ .

Эта же выкладка при  $n = 2$ , когда теорема Лиувилля не имеет места, показывает, что инверсия относительно окружности на 2-плоскости является круговым преобразованием.

**11.1.4. Конформное пространство.** Инверсия (11.6) определена для всех точек пространства за исключением точки  $M_0$ . Поэтому при рассмотрении инверсий целесообразно дополнить  $n$ -пространство новыми точками, присоединение которых сделало бы инверсии взаимно однозначными преобразованиями. При рассмотрении инверсии (11.6) целесообразно присоединить к  $n$ -пространству

точку, которую можно было бы считать образом точки  $M_0$ . Произведение инверсий

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_1 + \frac{r_1^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \quad \text{и} \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}_2 + \frac{r_2^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)^2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)$$

является преобразованием

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_2 + \frac{r_2^2 [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + r_1^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)]}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)^2 + 2r_1^2 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + r_1^4}, \quad (11.12)$$

которое переводит точку  $M_1(\mathbf{x}_1)$  в точку  $M_2(\mathbf{x}_2)$ . Но точка  $M_1$  при первой инверсии переходит в точку, добавляемую нами для взаимной однозначности первой инверсии, а точка  $M_2$  получается при второй инверсии из точки, добавляемой нами для взаимной однозначности второй инверсии. Поэтому добавляемая нами точка — одна и та же для всех инверсий.

Назовем *конформным  $n$ -пространством*<sup>4</sup> евклидово  $n$ -пространство, дополненное *одной точкой*, которую можно считать образом центра каждой сферы при инверсии относительно этой сферы. Так как при приближении точки  $M$  к центру  $M_0$  сферы модуль вектора  $|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0| = \frac{r^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}$  стремится к бесконечности и, следовательно, образ  $M'$  точки  $M$  при инверсии относительно этой сферы удаляется в бесконечность, добавляемая точка называется *бесконечно удаленной точкой*  $n$ -пространства при его дополнении до конформного  $n$ -пространства. Заметим, что если при дополнении  $n$ -пространства до проективного  $n$ -пространства добавляется целая бесконечно удаленная плоскость, то при дополнении его до конформного  $n$ -пространства добавляется только одна бесконечно удаленная точка.

При дополнении  $n$ -пространства до конформного  $n$ -пространства все плоскости,  $m$ -плоскости и прямые  $n$ -пространства дополняются одной и той же бесконечно удаленной точкой. Плоскости,  $m$ -плоскости и прямые после дополнения рассматриваются соответственно как сферы,  $m$ -сфера и окружности, проходящие через бесконечно удаленную точку. Так как отражение от плоскости —

инволюционное движение, оставляющее неподвижными все точки плоскости, а инверсия — инволюционное конформное преобразование, оставляющее неподвижными все точки плоскости, то при конформном преобразовании, переводящем сферу в плоскость, точки, переводящиеся друг в друга инверсией относительно сферы, переходят в точки, переводящиеся друг в друга при отражении от плоскости.

**11.1.5. Стереографическая проекция.** Покажем, что конформное  $n$ -пространство находится во взаимно однозначном и взаимно непрерывном соответствии со сферой  $(n+1)$ -пространства. Такое соответствие можно установить с помощью стереографической проекции сферы  $(n+1)$ -пространства на плоскость  $(n+1)$ -пространства<sup>5</sup>, т.е. проекции сферы из одной из ее точек на плоскость, не проходящую через центр проекции. Рассмотрим стереографическую проекцию сферы

$$x^2 + (x^{n+1})^2 = 1 \quad (11.13)$$

с центром  $O(0, 0)$  из ее полюса  $S(0, 1)$  на ее экваториальную плоскость  $x^{n+1} = 0$  (рис. 11.2). При этой проекции точке  $M(x, x^{n+1})$  соответствует некоторая точка  $N(y)$  плоскости  $x^{n+1} = 0$ . Так как точки  $S, M$  и  $N$  лежат на одной прямой, координаты этих точек удовлетворяют равенствам

$$\frac{x^i - 0}{y^i - 0} = \frac{x^{n+1} - 1}{0 - 1} = k,$$

т. е.

$$\frac{x^i}{y^i} = 1 - x^{n+1} = k,$$

откуда

$$x^i = ky^i, \quad x^{n+1} = 1 - k. \quad (11.14)$$

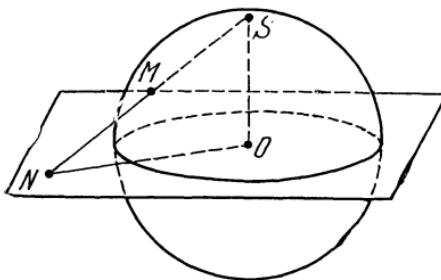


Рис. 11.2.

Значение  $k$  находится из того, что точка  $M$  лежит на сфере (11.13), т. е. из условия

$$k^2 y^2 + (1 - k)^2 = 1,$$

откуда

$$k^2 (y^2 + 1) - 2k = 0.$$

Откидывая корень  $k = 0$ , соответствующий точке  $S$ , мы получим для точки  $M$

$$k = \frac{2}{y^2 + 1}. \quad (11.15)$$

Подставляя это значение  $k$  в формулы (11.14), мы получим окончательно

$$x = \frac{2y}{y^2 + 1}, \quad x^{n+1} = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}. \quad (11.16)$$

Стереографическая проекция устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и всеми точками сферы за исключением точки  $S$ . Если точка  $M$  сферы приближается к точке  $S$  по большой окружности, 2-плоскость которой проходит через прямую  $SO$ , соответственная точка  $N$  стремится в бесконечность по линии пересечения этой 2-плоскости с плоскостью  $x^{n+1} = 0$ . Поэтому, если мы дополним плоскость до конформного пространства, следует считать бесконечно удаленную точку этого  $n$ -пространства соответствующей точке  $S$  сферы. Тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между точками конформного  $n$ -пространства и сферы  $(n + 1)$ -пространства. Это соответствие будет взаимно непрерывным, если под стремлением точки к бесконечно удаленной точке мы будем понимать стремление этой точки в бесконечность по любому направлению.

*При стереографической проекции  $(n - 1)$ -сферы на сфере переходят в сферы конформного  $n$ -пространства.* В самом деле, произвольная  $(n - 1)$ -сфера на сфере (11.13) высекается из нее плоскостью

$$ax + a_{n+1} x^{n+1} + b = 0. \quad (11.17)$$

Подставляя в это уравнение значения из формул (11.16), мы найдем, что координаты соответственных точек

$n$ -пространства связаны условием

$$2ay + a^{n+1}(y^2 - 1) + b(y^2 + 1) = 0,$$

т. е.

$$(a^{n+1} + b)y^2 + 2ay + (b - a^{n+1}) = 0. \quad (11.18)$$

Уравнение (11.18) при  $a^{n+1} + b \neq 0$  является уравнением сферы, а при  $a^{n+1} + b = 0$  является уравнением плоскости, т. е. в обоих случаях сферой конформного  $n$ -пространства.

При стереографической проекции сферы на плоскость углы между линиями сохраняются. В самом деле, рассмотрим две линии на сфере, выходящие из ее точки  $M$  (рис. 11.3). Угол между этими линиями равен углу между касательными  $MK$  и  $ML$  к этим линиям в точке  $M$ . Обозначим через  $K$  и  $L$  точки пересечения этих касательных с касательной плоскостью к сфере в точке  $S$ . Тогда отрезки  $KS$  и  $KM$  равны как две касательные к сфере, проведенные из точки  $K$ , а отрезки  $LS$  и  $LM$  равны как две касательные к сфере, проведенные из точки  $L$ . Поэтому треугольники  $KLS$  и  $KLM$  равны как два треугольника с соответственно равными сторонами и угол  $KSL$  равен углу  $KML$ .

При стереографической проекции точка  $M$  проектируется в точку  $N$  плоскости, две линии, выходящие из точки  $M$ , — в две линии, выходящие из точки  $N$ , а касательные  $MK$  и  $ML$  к первым двум линиям в точке  $M$  — в касательные  $NP$  и  $NQ$  ко вторым двум линиям в точке  $N$ . Но касательные  $NP$  и  $NQ$  являются пересечениями плоскости  $x^{n+1} = 0$  с плоскостями  $SKM$  и  $SLM$  и, так как плоскость  $x^{n+1} = 0$  параллельна касательной плоскости к сфере в точке  $S$ , то касательные  $NP$  и  $NQ$  соответственно параллельны касательным  $SK$  и  $SL$ , т. е. угол  $PNQ$  равен углу  $KSL$ . Отсюда вытекает, что угол  $KML$  равен углу  $PNQ$ , т. е. угол между линиями, выходящими из точки  $M$ , равен углу между соответственными линиями, выходящими из точки  $N$ .

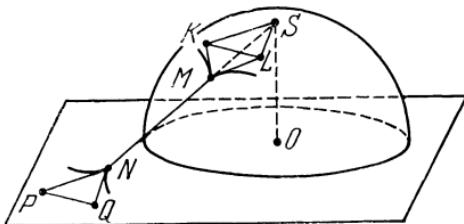


Рис. 11.3.

**11.1.6. Конформные преобразования как произведения инверсий.** Покажем, что всякое конформное преобразование при  $n \geq 3$  и всякое круговое преобразование при  $n = 2$  являются инверсией, подобием или их произведением.

В самом деле, если конформное преобразование  $n$ -пространства переводит бесконечно удаленную точку в себя, то окружности конформного  $n$ -пространства, проходящие через эту точку, т. е. прямые, переходят при этом преобразовании снова в прямые. Так как это преобразование взаимно однозначно в евклидовом  $n$ -пространстве, оно является аффинным преобразованием  $n$ -пространства, т. е. имеет вид

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}. \quad (11.19)$$

Преобразование (11.19) переводит сферу (11.10) в квадрику

$$\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{A}'\mathbf{x}' + 2(\mathbf{a}\mathbf{A}^T\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{b})'\mathbf{x}' + \mathbf{a}\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{b}\mathbf{a} + c = 0. \quad (11.20)$$

Так как это преобразование переводит сферы в сферы, квадрика (11.20) является сферой, т. е. оператор  $a\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  имеет вид  $\lambda I$  и оператор  $\mathbf{A}$  имеет вид  $kU$ , где  $U$  — ортогональный оператор (очевидно, что число  $k$  связано с числами  $a$  и  $\lambda$  соотношением  $\lambda = ak^2$ ), и, следовательно, преобразование (11.19) является подобием.

Если теперь конформное преобразование переводит бесконечно удаленную точку в точку  $M_0(\mathbf{x}_0)$ , то рассмотрим инверсию относительно сферы с центром  $M_0$ , которая переводит точку  $M_0$  в бесконечно удаленную точку. Поэтому произведение данного конформного преобразования на эту инверсию переводит бесконечно удаленную точку в себя и, следовательно, является подобием. Поэтому данное конформное преобразование является произведением этого подобия на инверсию. В частности, если это подобие является тождественным преобразованием, данное конформное преобразование является инверсией.

Так как каждое движение  $n$ -пространства является произведением отражений от плоскостей, а гомотетия является произведением инверсий относительно двух концентричных сфер, всякое конформное преобразование конформ-

ногого  $n$ -пространства при  $n \geq 3$  является инверсией относительно сферы или произведением нескольких инверсий, а всякое круговое преобразование конформной 2-плоскости является инверсией относительно окружности или произведением таких инверсий.

**11.1.7. Проективная интерпретация конформного пространства.** Если мы дополним  $(n+1)$ -пространство, в котором находится  $n$ -сфера (11.13), взаимно однозначно и взаимно непрерывно изображающая конформное  $n$ -пространство, до проективного  $(n+1)$ -пространства, мы получим взаимно однозначное и взаимно непрерывное изображение конформного  $n$ -пространства точками овальной  $n$ -квадрики в проективном  $(n+1)$ -пространстве. Из формул (11.16) вытекает, что точка  $N(y)$  конформного  $n$ -пространства при этом изображается точкой проективного  $(n+1)$ -пространства с проективными координатами

$$s^0 = \frac{1}{2} (y^2 + 1), \quad s^i = y^i, \quad s^{n+1} = \frac{1}{2} (y^2 - 1), \quad (11.21)$$

удовлетворяющими уравнению овальной квадрики

$$-(s^0)^2 + s^2 + (s^{n+1})^2 = 0. \quad (11.22)$$

Если сфера конформного  $n$ -пространства изображается сечением  $n$ -сферы (11.13)  $n$ -плоскостью (11.17), то этой сфере взаимно однозначно соответствует точка проективного  $(n+1)$ -пространства, являющаяся полюсом этой  $n$ -плоскости относительно  $n$ -квадрики (11.22). Проективные координаты этой точки равны

$$s^0 = b, \quad s^i = -a^i, \quad s^{n+1} = -a^{n+1}. \quad (11.23)$$

В том случае, когда плоскость (11.17) соответствует вещественной сфере  $n$ -пространства, т. е. пересекается с  $n$ -сферой (11.13), ее расстояние от центра  $O$  этой  $n$ -сферы  $< 1$ ; так как в силу (3.47) расстояние  $n$ -плоскости (11.17) от точки  $O(0)$  равно  $\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (a^{n+1})^2}}$ , то условие того, что плоскость (11.17) соответствует вещественной сфере  $n$ -пространства, можно записать в виде

$$-b^2 + a^2 + (a^{n+1})^2 > 0. \quad (11.24)$$

Поэтому проективные координаты (11.23) можно нормировать условием

$$-(s^0)^2 + s^2 + (s^{n+1})^2 = 1. \quad (11.25)$$

Квадрика (11.22) делит проективное  $(n + 1)$ -пространство на внутреннюю и внешнюю области: полярные плоскости точек внутренней области не пересекаются с квадрикой, полярные плоскости точек внешней области пересекаются с квадрикой. Вещественные сферы, соответствующие плоскостям, пересекающимся с квадрикой, взаимно однозначно изображаются точками внешней области. Точки внутренней области изображают *мнимые сферы*  $n$ -пространства, которым при стереографической проекции соответствуют мнимые пересечения  $n$ -сферы с плоскостями, не пересекающимися с этой сферой. Так как  $n + 2$  базисные точки проективного  $(n + 1)$ -пространства изображают  $n + 2$  сферы конформного  $n$ -пространства, которые могут быть и мнимыми, координаты  $s^\alpha$ , связанные условием (11.25), называются  *$(n + 2)$ -сферическими координатами сфер* (при  $n = 2$  — *тетрациклическими координатами окружностей*, при  $n = 3$  — *пента-сферическими координатами 2-сфер*)<sup>6</sup>. Мнимым сферам также можно поставить в соответствие  *$(n + 2)$ -сферические координаты* (11.23), которые, однако, нормируются не условием (11.25), а условием

$$-(s^0)^2 + s^2 + (s^{n+1})^2 = -1. \quad (11.26)$$

Выразим  $(n + 2)$ -сферические координаты сферы через ее радиус и координаты центра. Для этого сравним коэффициенты уравнения (11.18) с коэффициентами уравнения (6.4) сферы с центром  $M_0(x_0)$  и радиусом  $R$ , имеющего вид

$$(x - x_0)^2 - R^2 = x^2 - 2x_0x + x_0^2 - R^2 = 0. \quad (11.27)$$

Если оба эти уравнения являются уравнениями одной и той же сферы, то коэффициенты этих уравнений пропорциональны, т. е.

$$\frac{a^{n+1} + b}{1} = \frac{a^i}{-x_0^i} = \frac{b - a^{n+1}}{x_0^2 - R^2} = \lambda,$$

откуда

$$s^0 = b = \lambda \frac{x_0^2 - R^2 + 1}{2}, \quad s^i = -a^i = \lambda x_0^i,$$

$$s^{n+1} = -a^{n+1} = \lambda \frac{x_0^2 - R^2 - 1}{2}.$$

Условие (11.22) в этом случае имеет вид  $\lambda^2 R^2 = 1$  и, следовательно, координаты  $s^\alpha$ , удовлетворяющие условию (11.22), имеют вид

$$s^0 = \frac{x_0^2 - R^2 + 1}{2R}, \quad s^i = \frac{x_0^i}{R}, \quad s^{n+1} = \frac{x_0^2 - R^2 - 1}{2R}. \quad (11.28)$$

В том случае, когда в уравнении (11.18)  $a^{n+1} + b = 0$ , т. е. уравнение определяет плоскость

$$ux + v = 0, \quad (11.29)$$

то, сравнивая эти уравнения, мы находим, что

$$\frac{a^i}{u_i} = \frac{b - a^{n+1}}{v} = \lambda,$$

откуда

$$s^0 = b = \frac{1}{2}v\lambda, \quad s^i = -a^i = -u_i\lambda,$$

$$s^{n+1} = -a^{n+1} = \frac{1}{2}v\lambda.$$

Условие (11.22) в этом случае имеет вид  $\lambda^2 u^2 = 1$  и, следовательно, в случае, когда  $|u| = 1$ , мы получаем  $\lambda = 1$  и координаты (11.23), удовлетворяющие условию (11.22), имеют вид

$$s^0 = \frac{1}{2}v, \quad s^i = -u_i, \quad s^{n+1} = \frac{1}{2}v. \quad (11.30)$$

#### 11.1.8. Угол между сферами. Угол между сферами

$$(x - x_1)^2 = R_1^2 \text{ и } (x - x_2)^2 = R_2^2 \quad (11.31)$$

может быть выражен через  $(n + 2)$ -сферические координаты этих сфер  $s^\alpha$  и  $t^\alpha$  по формуле

$$\cos \varphi = | -s^0 t^0 + \mathbf{s} \cdot \mathbf{t} + s^{n+1} t^{n+1} |, \quad (11.32)$$

так как, выражая в формуле (11.32) координаты  $s^\alpha$  и  $t^\alpha$  через радиусы  $R_1, R_2$  и векторы  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ , мы получим формулу (6.47) для угла  $\varphi$  между сферами (11.31).

По той же формуле (11.32) выражается угол между сферой (11.27) и плоскостью (11.29) и между двумя плоскостями

$$\mathbf{u}_1 \mathbf{x} + v_1 = 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_2 \mathbf{x} + v_2 = 0, \quad (11.33)$$

так как, выражая в формуле (11.32) координаты  $s^\alpha$  и  $t^\alpha$  через радиус  $R$  и вектор  $\mathbf{x}_0$  сферы (11.27) и коэффициенты  $u_i$  и  $v$  плоскости (11.29), мы получим выражение

$$\cos \varphi = \left| \frac{\mathbf{u} \mathbf{x}_0 + v}{R} \right| = \left| \frac{\mathbf{u} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{R} \right| = \left| \mathbf{u} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{R} \right|,$$

равное косинусу угла между сферой (11.27) и плоскостью (11.29); а выражая в формуле (11.32) координаты  $s^\alpha$  и  $t^\alpha$  через коэффициенты уравнений (11.33), мы получим выражение

$$\cos \varphi = |\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2|,$$

равное косинусу угла между плоскостями (11.33).

*Многообразия сфер конформного  $n$ -пространства, проходящих через  $m$ -сферу, изображаются в проективном  $(n+1)$ -пространстве  $(n-m-1)$ -плоскостями.* В самом деле, так как произвольная сфера, проходящая через  $m$ -сферу, являющаяся пересечением  $n-m$  независимых сфер

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_u)^2 - R_u^2 = 0, \quad (11.34)$$

определяется уравнением (6.111), т. е.

$$u^u ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_u)^2 - R_u^2) = 0, \quad (11.35)$$

то  $(n+2)$ -сферические координаты  $s^\alpha$  сферы (11.35) выражаются через  $(n+2)$ -сферические координаты  $s_u^\alpha$  сфер (11.34) по формуле

$$s^\alpha = s_u^\alpha u^u. \quad (11.36)$$

Поэтому точка проективного  $(n+1)$ -пространства, изображающая сферу (11.35), является линейной комбинацией точек, изображающих сферы (11.34), но такие точки образуют  $(n-m-1)$ -плоскость  $(n+1)$ -простран-

ства, базисными точками которой являются  $n - m$  точек, изображающих сферы (11.34). Эта  $(n - m - 1)$ -мерная плоскость полярна  $(m + 1)$ -плоскости, высекающей из квадрики изображение  $m$ -сферы, относительно этой квадрики.

В частности, при  $m = n - 2$  мы получаем, что *эллиптические пучки сфер конформного  $n$ -пространства изображаются прямыми проективного  $(n + 1)$ -пространства*.

**11.1.9. Группа конформных преобразований.** Конформные преобразования  $n$ -пространства изображаются в проективном  $(n + 1)$ -пространстве коллинеациями, пересоединяющими в себя квадрику (11.22). В самом деле, так как конформные преобразования являются взаимно однозначными и взаимно непрерывными преобразованиями в конформном  $n$ -пространстве и в многообразии сфер этого пространства, эти преобразования изображаются в проективном  $(n + 1)$ -пространстве взаимно однозначными преобразованиями квадрики (11.22) и внешней области этой квадрики; нетрудно проверить, что при конформных преобразованиях  $n$ -пространства происходят взаимно однозначные и взаимно непрерывные преобразования в многообразии мнимых сфер и, следовательно, во внутренней области квадрики. Поэтому конформные преобразования  $n$ -пространства изображаются взаимно однозначными и взаимно непрерывными преобразованиями проективного  $(n + 1)$ -пространства. Так как при конформных преобразованиях  $m$ -сферы переходят в  $m$ -сфера, изображающие их преобразования проективного  $(n + 1)$ -пространства, переводят  $(n - m - 1)$ -плоскости в  $(n - m - 1)$ -плоскости и, в частности, прямые в прямые. Поэтому эти преобразования проективного  $(n + 1)$ -пространства являются коллинеациями.

Так как произведение двух конформных преобразований является конформным преобразованием, умножение конформных преобразований ассоциативно, тождественное преобразование является частным случаем конформного преобразования и обратное преобразование для конформного преобразования является конформным преобразованием, *конформные преобразования образуют группу по умножению*<sup>7</sup>.

Со всякой  $m$ -сферой конформного  $n$ -пространства связано инволюционное конформное преобразование, изображаемое в проективном  $(n + 1)$ -пространстве инволюционной  $(m + 1)$ -гомологией, плоскостями которой являются полярные  $(m + 1)$ -плоскость и  $(n - m - 1)$ -плоскость  $(n + 1)$ -пространства, определяемые этой  $m$ -сферой. Будем называть это конформное преобразование *инверсией относительно  $m$ -сферы*<sup>8</sup>.

Если мы условимся под вектором  $s$  иметь в виду не вектор  $\{s^i\}$   $n$ -пространства, а вектор  $\{s^\alpha\}$   $(n + 2)$ -пространства, представляющий точку проективного  $(n + 1)$ -пространства, изображающую точку или сферу конформного  $n$ -пространства, и условимся записывать уравнение квадрики (11.22) в виде

$$sE_s = 0, \quad (11.37)$$

то мы можем записать конформное преобразование  $n$ -пространства в виде

$$'s = Us, \quad (11.38)$$

где  $U$  — оператор коллинеации, переводящий в себя квадрику, т. е. в силу (7.132) оператор, удовлетворяющий условию

$$U^t EU = E. \quad (11.39)$$

Заметим, что с помощью оператора  $E$  условие нормирования (11.25) можно записать в виде

$$sEs = 1, \quad (11.40)$$

а формулу (11.32) — в виде

$$\cos \varphi = |sEs|. \quad (11.41)$$

Так как условие (11.39) накладывает на матрицу оператора  $U$  столько же условий, сколько условие  $U^t U = I$  ортогональности оператора, то коллинеации  $(n + 1)$ -пространства, переводящие в себя квадрику, зависят от того же числа независимых вещественных параметров, что и ортогональные операторы  $(n + 2)$ -пространства, т. е. от  $\frac{n(n+1)}{2}$  параметров. Поэтому группа конформных преобразований (11.32)  $n$ -пространства зависит от  $\frac{n(n+1)}{2}$  независимых вещественных параметров.