§ 2. Геометрия m-сфер

11.2.1. Операторное уравнение m-сферы. Мы видели, что $(n+2)$-сферические координаты произвольной сферы, проходящей через данную m-сферу, могут быть записаны в виде (11.36). Уравнение (11.36) можно переписать в векторной форме

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_u u^u. \tag{11.42}$$

Если рассматривать координаты s_u^i как элементы матрицы прямоугольного оператора

$$\mathrm{S} = (s_u^i) \tag{11.43}$$

$(n+2)$-пространства, а числа u^u — как координаты вектора $\mathbf{u}$ $(n-m)$-пространства, то уравнение (11.36) и (11.42) можно переписать также в виде

$$\mathbf{s} = \mathrm{S}\mathbf{u}. \tag{11.44}$$

Будем называть уравнение (11.44) *операторным уравнением m-сферы*. Заметим, что если n — m-сфер, определяющих m-сферу, взаимно перпендикулярны, то в силу формулы (11.41) векторы $\mathbf{s}_u$, представляющие эти сферы, связаны соотношениями

$$\mathbf{s}_u \mathrm{E} \mathbf{s}_v = \delta_{uv}, \tag{11.45}$$

которые можно переписать в виде одного соотношения

$$\mathrm{S}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}\mathrm{S} = \mathbf{I}. \tag{11.46}$$

11.2.2. Стационарные углы между m-сферами. Рассмотрим углы между произвольными сферами, проходящими через две m-сферы и представляемыми векторами

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_u u^u = \mathrm{S}\mathbf{u} \text{ и } \mathbf{t} = \mathbf{t}_u v^u = \mathrm{T}\mathbf{v}. \tag{11.47}$$

Косинусы этих углов определяются соотношением (11.41), которое здесь можно переписать в виде

$$\cos\varphi = |\mathbf{u}\mathrm{S}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}\mathrm{T}\mathbf{v}|. \tag{11.48}$$

Будем считать сферы, представляемые векторами $\mathbf{s}_u$, так же, как сферы, представляемые векторами $\mathbf{t}_u$, взаимно перпендикулярными.

Стационарные значения угла φ будем называть *стационарными углами* между m-сферами. Для определения этих углов, соответствующих стационарным значениям $\cos\varphi$, равного произведению $\mathbf{sEt}$, так же, как при определении стационарых углов двух m-плоскостей в **3.3.15**, составим вспомогательную функцию

$$U = \mathbf{sEt} + \frac{\lambda}{2}\,\mathbf{sEs} + \frac{\mu}{2}\,\mathbf{tEt}.$$

Частные производные этой функции по u^u и v^u соответственно равны

$$\frac{\partial U}{\partial u^u} = \mathbf{s}_u\mathbf{Et} + \lambda\mathbf{s}_u\mathbf{Es}, \qquad \frac{\partial U}{\partial v^u} = \mathbf{sEt}_u + \mu\mathbf{tEt}_u.$$

Необходимым условием экстремума функции $\mathbf{sEt}$ при условии $\mathbf{sEs} = \mathbf{tEt} = 1$ является обращение в нуль всех этих частных производных, поэтому значения $\mathbf{s}$ и $\mathbf{t}$, соответствующие стационарным значениям угла, являются решениями системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{s}_u\mathbf{Et} + \lambda\mathbf{s}_u\mathbf{Es} &= 0, \\ \mathbf{sEt}_u + \mu\mathbf{tEt}_u &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{11.49}$$

В силу (11.47) уравнения (11.49) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{s}_u\mathbf{Et}_v v^v + \lambda\mathbf{s}_u\mathbf{Es}_v u^v &= 0, \\ \mathbf{s}_v\mathbf{Et}_u u^v + \mu\mathbf{t}_v\mathbf{Et}_u v^v &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{11.50}$$

или в операторной форме,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{ETv} + \lambda\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{ESu} &= \mathbf{o}, \\ \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{ESu} + \mu\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{ETv} &= \mathbf{o}. \end{aligned}\right\} \tag{11.51}$$

В силу условия (11.46) и аналогичного условия для векторов $\mathbf{t}_u$, уравнения (11.51) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{ETv} + \lambda\mathbf{u} &= \mathbf{o}, \\ \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{ESu} + \mu\mathbf{v} &= \mathbf{o}, \end{aligned}\right\} \tag{11.52}$$

откуда вытекает, что

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\frac{1}{\lambda}\,\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{T}\mathbf{v}, \\ \mathbf{v} &= -\frac{1}{\mu}\,\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{S}\mathbf{u}. \end{aligned}\right\} \tag{11.53}$$

Исключая из этих уравнений вектор $\mathbf{v}$, мы получим

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\lambda\mu}\,(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{T})\,(\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{S})\,\mathbf{u},$$

т. е.

$$(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{T})\,(\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{S})\,\mathbf{u} = \lambda\mu\mathbf{u}. \tag{11.54}$$

Таким образом, *числа* u^u, определяющие векторы $\mathbf{s} = \mathbf{s}_u u^u$, *представляющие сферы, соответствующие стационарным углам между двумя m-сферами, являются координатами собственного вектора* $\mathbf{u}$ *оператора*

$$\mathbf{W} = (\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{T})\,(\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{S}). \tag{11.55}$$

Умножая уравнения (11.49) соответственно на u^u и v^u и суммируя по индексу u, мы получим равенства

$$\mathbf{s}\mathbf{E}\mathbf{t} + \lambda\,\mathbf{s}\mathbf{E}\mathbf{s} = \mathbf{s}\mathbf{E}\mathbf{t} + \lambda = 0,$$
$$\mathbf{s}\mathbf{E}\mathbf{t} + \mu\,\mathbf{t}\mathbf{E}\mathbf{t} = \mathbf{s}\mathbf{E}\mathbf{t} + \mu = 0,$$

откуда следует, что $\lambda = \mu = -\,\mathbf{s}\mathbf{E}\mathbf{t}$ и

$$\lambda\mu = (\mathbf{s}\mathbf{E}\mathbf{t})^2.$$

Поэтому *квадраты косинусов стационарных углов между m-сферами равны собственным числам оператора* (11.55).

Обозначим собственные числа оператора $\mathbf{W}$ через w_u, а собственные векторы этого оператора через $\mathbf{u}_u$. Покажем, что *сферы, проходящие через одну из m-сфер и соответствующие неравным стационарным углам между m-сферами, перпендикулярны.* В самом деле, эти сферы определяются векторами $\mathbf{S}\mathbf{u}_u$ и $\mathbf{S}\mathbf{u}_v$ и

$$(\mathbf{S}\mathbf{u}_u)\,\mathbf{E}\,(\mathbf{S}\mathbf{u}_v) = \mathbf{u}_u\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{S}\mathbf{u}_v = \mathbf{u}_u\mathbf{u}_v = \frac{1}{w_v}\,\mathbf{u}_u\mathbf{W}\mathbf{u}_v = \frac{1}{w_u}\,\mathbf{u}_v\mathbf{W}\mathbf{u}_u.$$

Но

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{S})^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{T})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{T})\,(\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{S}) = \mathbf{W}$$

и

$$\mathbf{u}_u\mathbf{W}\mathbf{u}_v = \mathbf{u}_v\mathbf{W}\mathbf{u}_u,$$

следовательно,

$$\mathbf{u}_u\mathbf{W}\mathbf{u}_v = w_u(\mathbf{S}\mathbf{u}_u)\,\mathbf{E}\,(\mathbf{S}\mathbf{u}_v) = w_v\,(\mathbf{S}\mathbf{u}_u)\,\mathbf{E}\,(\mathbf{S}\mathbf{u}_v).$$

Но в случае, когда $w_u \neq w_v$, это равенство возможно только при условии $(\mathbf{S}\mathbf{u}_u)\,\mathbf{E}\,(\mathbf{S}\mathbf{u}_v) = 0$, т. е. при условии перпендикулярности соответственных сфер.

Поэтому мы можем принять векторы $\mathbf{S}\mathbf{u}_u$ за векторы $\mathbf{s}_u$.

Точно так же доказывается перпендикулярность сфер, определяющихся векторами $\mathbf{T}\mathbf{v}_u$ и $\mathbf{T}\mathbf{v}_v$, и мы можем принять векторы $\mathbf{T}\mathbf{v}_u$ за векторы $\mathbf{t}_u$.

Покажем, что *две сферы, проходящие через разные m-сферы и соответствующие неравным стационарным углам между m-сферами, также перпендикулярны.* В самом деле, из равенств (11.53) следует, что

$$(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{T})\,\mathbf{v}_u = \sqrt{w_u}\,\mathbf{u}_u$$

и

$$(\mathbf{S}\mathbf{u}_u)\,\mathbf{E}\,(\mathbf{T}\mathbf{v}_v) = \mathbf{u}_u\,(\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\mathbf{T})\,\mathbf{v}_v = \sqrt{w_u}\,\mathbf{u}_u\mathbf{u}_v = 0.$$

В основном случае две m-сферы имеют $n - m$ стационарных углов. В том случае, когда все собственные числа w_u оператора $\mathbf{W}$ не больше 1, все сферы, проходящие через m-сферы и соответствующие собственным векторам оператора $\mathbf{W}$, пересекаются, откуда вытекает, что всякая сфера, проходящая через первую m-сферу, пересекается со всякой сферой, проходящей через вторую m-сферу, и m-сферы *зацеплены*. В случае, когда существует собственное число оператора $\mathbf{W}$, большее 1, соответственные сферы, проходящие через данные m-сферы, не пересекаются и m-сферы *не зацеплены* (из того, что среди собственных чисел оператора $\mathbf{E}$ имеется только одно — 1, вытекает, что собственное число оператора $\mathbf{W}$, большее 1, может быть только одно).

В случае, когда оператор $\mathbf{W}$ имеет вид $\mathbf{W} = w\mathbf{I}$, т. е. $\mathbf{W}\mathbf{u} = w\mathbf{u}$, для любого вектора $\mathbf{u}$, имеется единственное значение стационарного угла между *m-сферами*. В этом случае, аналогичном случаю изоклинных m-плоскостей, m-сферы называются *паратактичными m-сферами*. В случае, когда оператор $\mathbf{W}$ является нулевым, т. е. $\mathbf{W}\mathbf{u} = \mathbf{o}$, для любого вектора $\mathbf{u}$, всякая сфера, проходящая

через первую m-сферу, перпендикулярна всякой сфере, проходящей через вторую m-сферу. В этом случае, аналогичном случаю вполне перпендикулярных m-плоскостей, m-сферы называются *сопряженными m-сферами*. Пары паратактичных и сопряженных m-сфер, как видно из их определения, всегда зацеплены [9].

§ 3. Применение комплексных чисел и кватернионов

11.3.1. Алгебры. Круговые преобразования 2-плоскости и конформные преобразования 4-пространства тесно связаны с *алгебрами комплексных чисел* и *кватернионов*. *Алгеброй* [10] называется линейное пространство, в котором определено умножение элементов, которые мы здесь будем обозначать $\alpha, \beta, \ldots$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1°. Каждым двум элементам α и β поставлен в соответствие определенный элемент, обозначаемый

$$\delta = \alpha\beta \tag{11.56}$$

и называемый *произведением* элементов α и β.

2°. Умножение элементов *ассоциативно*, т. е.

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma. \tag{11.57}$$

3°. Умножение элементов *дистрибутивно* относительно сложения, т. е.

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \text{и} \quad (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha. \tag{11.58}$$

4°. Вещественный множитель можно выносить за знак произведения, т. е.

$$(k\alpha)\beta = \alpha(k\beta) = k(\alpha\beta). \tag{11.59}$$

Размерность линейного пространства называется *рангом* алгебры. Будем называть n-алгеброй алгебру ранга n. По сложению и умножению элементы алгебры образуют *кольцо*.

Если в n-алгебре выбран базис, состоящий из элементов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, то всякий элемент α алгебры можно записать в виде

$$\alpha = a^i\varepsilon_i. \tag{11.60}$$