через первую $m$-сферу, перпендикулярна всякой сфере, проходящей через вторую $m$-сферу. В этом случае, аналогичном случаю вполне перпендикулярных $m$-плоскостей, $m$-сферы называются *сопряженными $m$-сферами*. Пары паратактичных и сопряженных $m$-сфер, как видно из их определения, всегда зацеплены [9].

## § 3. Применение комплексных чисел и кватернионов

**11.3.1. Алгебры.** Круговые преобразования 2-плоскости и конформные преобразования 4-пространства тесно связаны с *алгебрами комплексных чисел* и *кватернионов*. *Алгеброй* [10] называется линейное пространство, в котором определено умножение элементов, которые мы здесь будем обозначать $\alpha, \beta, \ldots$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1°. Каждым двум элементам $\alpha$ и $\beta$ поставлен в соответствие определенный элемент, обозначаемый

$$\delta = \alpha\beta \tag{11.56}$$

и называемый *произведением* элементов $\alpha$ и $\beta$.

2°. Умножение элементов *ассоциативно*, т. е.

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma. \tag{11.57}$$

3°. Умножение элементов *дистрибутивно* относительно сложения, т. е.

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma \quad \text{и} \quad (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha. \tag{11.58}$$

4°. Вещественный множитель можно выносить за знак произведения, т. е.

$$(k\alpha)\beta = \alpha(k\beta) = k(\alpha\beta). \tag{11.59}$$

Размерность линейного пространства называется *рангом* алгебры. Будем называть $n$-алгеброй алгебру ранга $n$. По сложению и умножению элементы алгебры образуют *кольцо*.

Если в $n$-алгебре выбран базис, состоящий из элементов $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, то всякий элемент $\alpha$ алгебры можно записать в виде

$$\alpha = a^i\varepsilon_i. \tag{11.60}$$

Умножение элементов алгебры задается с помощью указания закона умножения базисных элементов

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = C_{ij}^k \varepsilon_k. \tag{11.61}$$

Коэффициенты $C_{ij}^k$, образующие тензор 3-й валентности, называются *структурными константами алгебры*.

Если алгебра обладает таким элементом $\varepsilon$, что для любого элемента $\alpha$ алгебры

$$\alpha\varepsilon = \varepsilon\alpha = \alpha, \tag{11.62}$$

то элемент $\varepsilon$ называется *единицей* алгебры; в дальнейшем будем обозначать единицу алгебры 1.

**11.3.2. Комплексные числа и кватернионы.** *Комплексные числа* $a + bi$ образуют 2-алгебру с базисом 1, $i$, причем $i^2 = -1$. *Кватернионы* [11] $a + bi + cj + dk$ образуют 4-алгебру с базисом 1, $i$, $j$, $k$, причем

$$i^2 = j^2 = -1, \qquad ij = -ji = k, \tag{11.63}$$

откуда вытекает, что

$$k^2 = -1, \qquad jk = -kj = i, \qquad ki = -ik = j. \tag{11.64}$$

В отличие от комплексных чисел, образующих *коммутативное* кольцо, кватернионы, как видно из формул (11.63) и (11.64), образуют *некоммутативное кольцо*.

В алгебрах комплексных чисел и кватернионов определен переход от элемента $\alpha$ к *сопряженному элементу* $\bar{\alpha}$, имеющему соответственно вид

$$\bar{\alpha} = a - bi, \qquad \bar{\alpha} = a - bi - ej - dk, \tag{11.65}$$

причем, как нетрудно проверить,

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \qquad \overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}, \qquad \bar{\bar{\alpha}} = \alpha, \tag{11.66}$$

*самосопряженные элементы* ($\bar{\alpha} = \alpha$) имеют вид $l \cdot 1$, а произведение $\alpha\bar{\alpha}$ соответственно равно

$$\alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2, \qquad \alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \tag{11.67}$$

В силу *теоремы Фробениуса* [12] алгебры комплексных чисел и кватернионов — единственные алгебры с единицей, обладающие переходом к сопряженному элементу

$\alpha \to \bar{\alpha}$, для которого выполнены свойства (11.66) и в которых самосопряженные элементы имеют вид $l \cdot 1$, а произведение $\alpha\bar{\alpha}$ является положительно определенной квадратичной формой от координат элемента $\alpha$.

Квадратный корень из произведения $\alpha\bar{\alpha}$ называется *модулем* комплексного числа или кватерниона и обозначается $|\alpha|$. Заметим, что $|1| = |i| = |j| = |k| = 1$, так как $1 \cdot 1 = i\bar{i} = j\bar{j} = k\bar{k} = 1$. Из второй формулы (11.66) следует, что $\alpha\beta\overline{\alpha\beta} = \alpha\beta\bar{\beta}\bar{\alpha}$, т. е.

$$|\alpha\beta| = |\alpha|\,|\beta|. \tag{11.68}$$

Обратный элемент $\alpha^{-1}$ для элемента $\alpha$ в обеих алгебрах имеет вид

$$\alpha^{-1} = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|}. \tag{11.69}$$

В силу (11.67) не обладает обратным элементом только 0. Поэтому алгебра комплексных чисел является *полем*, а алгебра кватернионов — *телом* [13].

**11.3.3. Плоскость комплексного переменного и пространство кватернионов.** Если мы примем за расстояние между двумя комплексными числами или кватернионами $\alpha$ и $\beta$ модуль $|\beta - \alpha|$ их разности, мы превратим алгебру комплексных чисел в евклидову 2-плоскость, называемую *плоскостью комплексного переменного*, а алгебру кватернионов — в евклидово 4-пространство, называемое *пространством кватернионов* [14].

Геометрическая интерпретация комплексных чисел с помощью точек 2-плоскости сыграла исключительную роль в рассеянии мистического тумана, окружавшего эти числа даже в XVIII веке, когда Лейбниц называл их «чудом анализа, чудовищем мира идей, почти амфибией между бытием и небытием». Кватернионы, напротив, с самого начала были связаны с пространственными представлениями, правда, не в 4-пространстве, а в 3-пространстве (Гамильтон, разработавший исчисление кватернионов, определял их как сумму скаляра и вектора $bi + cj + dk$).

При определенном нами расстоянии между двумя элементами алгебр комплексных чисел и кватернионов

скалярное произведение элементов $\alpha$ и $\beta$, рассматриваемых как евклидовы векторы, имеет вид

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(\alpha\bar{\beta} + \beta\bar{\alpha}) = \frac{1}{2}(\bar{\alpha}\beta + \bar{\beta}\alpha). \qquad (11.70)$$

Определение скалярного произведения $(\alpha, \beta)$ позволяет определять углы между элементами, рассматриваемыми как векторы, по формуле $\cos\varphi = \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha|\,|\beta|}$. При этом определении углов элементы $1, i, j, k$ рассматриваемые как векторы, взаимно перпендикулярны, так как, например,

$$(1, i) = \frac{1}{2}(i + \bar{i}) = \frac{1}{2}(i - i) = 0,$$

$$(i, j) = \frac{1}{2}(i\bar{j} + j\bar{i}) = \frac{1}{2}(-k + k) = 0.$$

**11.3.4. Переносы и гомотетии.** Преобразование

$$'\xi = \xi + \beta \qquad (11.71)$$

и на плоскости комплексного переменного и в пространстве кватернионов является *переносом* на вектор, определяемый элементом $\beta$.

Преобразование

$$'\xi = \alpha\xi, \qquad (11.72)$$

где $\alpha = \bar{\alpha}$, в обоих случаях является *гомотетией* с центром $O$ и коэффициентом $\alpha$.

**11.3.5. Повороты.** Комплексное число единичного модуля имеет вид

$$\alpha = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (11.73)$$

и преобразование (11.72), где $|\alpha| = 1$, в случае комплексных чисел является *поворотом* на угол $\varphi$.

Кватернион единичного модуля можно записать в виде

$$\alpha = \cos\varphi + \alpha_0 \sin\varphi, \qquad (11.74)$$

где $\alpha_0 = -\bar{\alpha}_0$, $|\alpha_0| = 1$. Преобразования (11.72) и

$$'\xi = \xi\alpha, \qquad (11.75)$$

где $|\alpha| = 1$, в случае кватернионов являются центроаффинными преобразованиями, которые в силу равенства

$|'\xi| = |\alpha|\,|\xi| = |\xi|$ являются вращениями. Эти преобразования, кроме того, обладают тем свойством, что косинус угла между векторами $\xi$ и $'\xi$ равен

$$\frac{(\xi, \alpha\xi)}{|\xi|\,|\alpha\xi|} = \frac{\frac{1}{2}(\xi\overline{\alpha\xi} + \alpha\xi\overline{\xi})}{|\xi|^2} = \frac{\frac{1}{2}(\xi\overline{\xi}\overline{\alpha} + \alpha\xi\overline{\xi})}{|\xi|^2} = \frac{1}{2}(\alpha + \overline{\alpha}) = \cos\varphi,$$

$$\frac{(\xi, \xi\alpha)}{|\xi|\,|\xi\alpha|} = \frac{\frac{1}{2}(\overline{\xi}\xi\alpha + \overline{\xi}\overline{\alpha}\xi)}{|\xi|^2} = \frac{\frac{1}{2}(\overline{\xi}\xi\alpha + \overline{\alpha}\overline{\xi}\xi)}{|\xi|^2} = \frac{1}{2}(\alpha + \overline{\alpha}) = \cos\varphi,$$

т. е. этот угол не зависит от элемента $\xi$. Поэтому кватернионные преобразования (11.72) и (11.75) при $|\alpha| = 1$ являются *паратактическими поворотами* 4-пространства.

Преобразование

$$'\xi = \overline{\xi} \tag{11.76}$$

в обоих случаях является отражением от вещественной оси (прямой, состоящей из элементов вида $l \cdot 1$).

**11.3.6. Движения и подобия 2-плоскости.** Преобразование

$$'\xi = \alpha\xi + \beta \tag{11.77}$$

в случае комплексных чисел при $|\alpha| = 1$ является произведением поворота (11.72) и переноса (11.71), т. е. *движением первого рода* 2-плоскости. Преобразование

$$'\xi = \alpha\overline{\xi} + \beta \tag{11.78}$$

в этом случае является произведением движения (11.77) и отражения (11.76), т. е. *движением второго рода* 2-плоскости. Так как все переносы 2-плоскости могут быть представлены в виде (11.71) и все повороты вокруг точки $O$ могут быть представлены в виде (11.72) при $|\alpha| = 1$, *то всякое движение первого рода 2-плоскости представляется в виде* (11.77) *при* $|\alpha| = 1$, *а всякое движение второго рода — в виде* (11.78) *при* $|\alpha| = 1$.

При $|\alpha| \neq 1$ преобразования (11.77) и (11.78) в случае комплексных чисел являются произведениями этих преобразований *при* $|\alpha| = 1$ *на гомотетию* (11.72) *при* $\alpha = \overline{\alpha}$, т. е. являются соответственно *подобиями первого и второго рода*. Так как всякая гомотетия 2-плоскости с центром

в точке $O$ может быть представлена в виде (11.72) при $\alpha = \bar{\alpha}$, *всякое подобие 2-плоскости представляется в виде* (11.77) *или* (11.78).

**11.3.7. Движения и подобия 4-пространства.** Преобразование

$$'\xi = \alpha\xi\beta \tag{11.79}$$

в случае кватернионов при $|\alpha| = |\beta| = 1$ является произведением паратактических поворотов $'\xi = \alpha\xi$ и $'\xi = \xi\beta$ и, следовательно, *вращением первого рода* 4-пространства вокруг точки $O$, а преобразование

$$'\xi = \alpha\bar{\xi}\beta \tag{11.80}$$

в этом случае является произведением вращения (11.79) и отражения (11.76), т. е. *вращением второго рода* 4-пространства вокруг точки $O$. *Всякое вращение первого и второго рода 4-пространства вокруг точки $O$ может быть представлено соответственно в виде* (11.79) *и* (11.80). В самом деле, эти вращения являются произведениями соответственно четного и нечетного числа отражений от плоскостей, проходящих через точку $O$. Отражение от такой плоскости с единичным нормальным вектором $\nu$ имеет вид

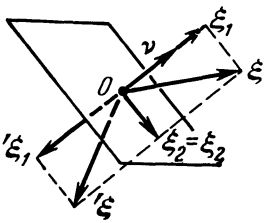

Рис. 11.4.

$$'\xi = -\nu\bar{\xi}\nu, \tag{11.81}$$

так как если вектор $\xi_1$ коллинеарен с вектором $\nu$, то $\bar{\xi}_1\nu = \bar{\nu}\xi_1$ и $'\xi_1 = -\nu\bar{\xi}_1\nu = -\nu\bar{\nu}\xi_1 = -\xi_1$, если вектор $\xi_2$ перпендикулярен вектору $\nu$, то $\bar{\xi}_2\nu + \bar{\nu}\xi_2 = 0$ и $'\xi_2 = -\nu\bar{\xi}_2\nu = \nu\bar{\nu}\xi_2 = \xi_2$, а произвольный вектор может быть представлен в виде суммы векторов $\xi_1$ и $\xi_2$ (рис. 11.4). Произведение четного и нечетного числа отражений вида (11.81) является соответственно преобразованием (11.79) и (11.80).

Преобразование

$$'\xi = \alpha\xi\beta + \gamma \tag{11.82}$$

в случае кватернионов при $|\alpha| = |\beta| = 1$ является произведением вращения первого рода (11.79) и переноса (11.71), т. е. *движением первого рода* 4-пространства. Преобразование

$$'\xi = \alpha\bar{\xi}\beta + \gamma \tag{11.83}$$

в этом случае является *движением второго рода*. Так как все переносы 4-пространства могут быть представлены в виде (11.71) и все вращения вокруг точки $O$ могут быть представлены в виде (11.79) и (11.80) при $|\alpha| = |\beta| = 1$, *всякое движение первого рода 4-пространства представляется в виде* (11.82) *при* $|\alpha| = |\beta| = 1$, *а всякое движение второго рода — в виде* (11.83) *при* $|\alpha| = |\beta| = 1$.

При $|\alpha| \neq 1$, $|\beta| \neq 1$ преобразования (11.82) и (11.83) являются произведениями этих преобразований при $|\alpha| = |\beta| = 1$ на гомотетию (11.72) при $\alpha = \bar{\alpha}$, т. е. являются соответственно *подобиями первого* и *второго рода*. Так как всякая гомотетия 4-пространства с центром в точке $O$ может быть представлена в виде (11.72) при $\alpha = \bar{\alpha}$, *всякое подобие 4-пространства представляется в виде* (11.82) *или* (11.83).

**11.3.8. Движения 3-пространства.** Если положить в преобразовании (11.79) $\alpha = \beta^{-1}$, то это вращение будет переводить в себя вещественную ось и, следовательно, плоскость кватернионов вида $bi + cj + dk$. Поэтому преобразование

$$'\xi = \alpha^{-1}\xi\alpha \qquad (\xi = -\bar{\xi}) \tag{11.84}$$

является *вращением первого рода* 3-пространства вокруг точки $O$, а преобразование

$$'\xi = -\alpha^{-1}\xi\alpha \qquad (\xi = -\bar{\xi}) \tag{11.85}$$

является *вращением второго рода* 3-пространства вокруг точки $O$. Так же как в случае 4-пространства показывается, что всякое вращение 3-пространства может быть представлено в виде (11.84) или (11.85). Поэтому преобразование

$$'\xi = \alpha^{-1}\xi\alpha + \beta \qquad (\xi = -\bar{\xi},\ \beta = -\bar{\beta}) \tag{11.86}$$

является *движением первого рода* 3-пространства, а преобразование

$$'\xi = -\alpha^{-1}\xi\alpha + \beta \quad (\xi = -\bar{\xi},\ \beta = -\bar{\beta}) \tag{11.87}$$

является *движением второго рода* 3-пространства и всякое движение 3-пространства может быть представлено в виде (11.86) или (11.87). В формулах (11.84)—(11.87) можно считать кватернион $\alpha$ связанным условием $|\alpha| = 1$.

**11.3.9. Спинорное представление вращений 3-пространства.** Формулы (11.79) и (11.84) позволяют определить так называемые *спинорные представления*[15] групп вращений первого рода 3-пространства и 4-пространства. Для этого заметим, что *алгебра кватернионов изоморфна кольцу квадратных операторов комплексного 2-пространства, удовлетворяющих условию*

$$\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\cdot\mathbf{I}, \tag{11.88}$$

где $|\mathbf{A}|$— определитель матрицы оператора $\mathbf{A}$. В самом деле, матрицы операторов, удовлетворяющих условию (11.88), могут быть записаны в виде

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a + di & b + ci \\ -b + ci & a - di \end{pmatrix}, \tag{11.89}$$

так как в этом случае

$$\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a - di & -b - ci \\ b - ci & a + di \end{pmatrix} \tag{11.90}$$

и

$$\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\cdot\mathbf{I} = |\mathbf{A}|\cdot\mathbf{I}. \tag{11.91}$$

Нетрудно проверить, что операторы, удовлетворяющие условию (11.88), образуют кольцо. Изоморфизм этого кольца с алгеброй кватернионов мы установим, ставя в соответствие кватерниону $\alpha = a + bi + cj + dk$ опера-

тор (11.89), причем оператор $\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}$ соответствует сопряженному кватерниону $\bar{\alpha}$.

Будем называть оператор (11.89) *оператором, представляющим кватернион* $\alpha$.

Операторы, представляющие кватернионы, для которых $|\mathbf{A}| = 1$, удовлетворяют условию

$$\bar{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \tag{11.92}$$

Такие операторы называются *унитарными операторами.*

Так как $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$, *унитарные операторы образуют группу по умножению.* Формула (11.84) показывает, что *группа вращений первого рода 3-пространства гомоморфна группе унитарных операторов комплексного 2-пространства*, причем каждому вращению соответствуют два оператора $\mathbf{A}$ и $-\mathbf{A}$, т. е. *ядро гомоморфизма состоит из операторов* $\mathbf{I}$ *и* $-\mathbf{I}$. Поэтому *группа вращений первого рода 3-пространства изоморфна фактор-группе группы унитарных операторов комплексного 2-пространства по его подгруппе, состоящей из операторов* $\mathbf{I}$ *и* $-\mathbf{I}$. Будем называть *спинорами* 3-пространства векторы комплексного 2-пространства, операторы которого представляют группу вращений этого пространства, а представление вращений 3-пространства унитарными операторами будем называть *спинорным представлением* этих вращений.

В том случае, когда кватернион $\alpha$ имеет наиболее простой вид $\cos\frac{\varphi}{2} + k\sin\frac{\varphi}{2}$, оператор $\mathbf{A}$, представляющий этот кватернион, имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix},$$

кватернион $\xi = -\bar{\xi}$ может быть записан в виде $x^1 i + x^2 j + x^3 k$ и представляется оператором

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} ix^3 & x^1 + ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & -ix^3 \end{pmatrix}$$

и преобразование (11.84) может быть записано в виде

$$'\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix^3 & x^1 + ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & -ix^3 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix^3 & e^{-i\varphi}(x^1 + ix^2) \\ e^{i\varphi}(-x^1 + ix^2) & -ix^3 \end{pmatrix},$$

равносильном вращению с матрицей

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**11.3.10. Спинорное представление вращений 4-пространства.** Если мы будем называть *прямым произведением* двух групп $G$ и $H$ группу пар $(g, h)$ элементов этих групп, умножающихся по закону

$$(g_1, h_1)\cdot(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1h_2),$$

то формула (11.79) показывает, что группа вращений первого рода 4-пространства гомоморфна прямому произведению двух групп унитарных операторов комплексного 2-пространства, причем каждому вращению соответствуют две пары операторов $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ и $(-\mathbf{A}, -\mathbf{B})$, т. е. ядро гомоморфизма состоит из пар операторов $(\mathbf{I}, \mathbf{I})$ и $(-\mathbf{I}, -\mathbf{I})$. Поэтому *группа вращений первого рода 4-пространства изоморфна фактор-группе прямого произведния двух групп унитарных операторов комплексного 2-пространства по его группе, состоящей из пар операторов* $(\mathbf{I}, \mathbf{I})$ *и* $(-\mathbf{I}, -\mathbf{I})$. Будем называть *спинорами* 4-пространства векторы комплексного 2-пространства, операторы которого представляют группу вращений этого пространства, а представление вращений 4-пространства парами унитарных операторов будем называть *спинорным представлением* этих вращений.

В том случае, когда кватернионы $\alpha$ и $\beta$ имеют наиболее простой вид $\cos\varphi + k\sin\varphi$ и $\cos\psi + k\sin\psi$, операторы

**A** и **B**, представляющие эти кватернионы, имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{pmatrix},$$

кватернион $\xi$ может быть записан в виде $x^3 + x^1 i + x^2 j + x^4 k$ и представляется оператором

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x^3 + ix^4 & x^1 + ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & x^3 - ix^4 \end{pmatrix},$$

представление (11.79) может быть записано в виде

$$'\mathbf{X} = \mathbf{AXB} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 + ix^4 & x^1 + ix^2 \\ -x^1 + ix^2 & x^3 - ix^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\psi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i(\varphi+\psi)}(x^3 + ix^4) & e^{i(\varphi-\psi)}(x^1 + ix^2) \\ e^{-i(\varphi-\psi)}(-x^1 + ix^2) & e^{-i(\varphi+\psi)}(x^3 - ix^4) \end{pmatrix},$$

равносильном вращению с матрицей

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \\ & \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi-\psi) & -\sin(\varphi-\psi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi-\psi) & \cos(\varphi-\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ 0 & 0 & \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix}.$$

В случае, когда $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ или $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, имеем $\varphi = 0$ или $\psi = 0$ и вращение представляет собой паратактический поворот.

**11.3.11. Инверсии относительно окружностей и сфер.** Инверсия (11.6) относительно окружности 2-плоскости или сферы 4-пространства

$$|\xi - \xi_0| = R \tag{11.93}$$

может быть записана с помощью комплексных чисел или кватернионов в виде

$$'\xi = \xi_0 + R^2 (\bar{\xi} - \bar{\xi}_0)^{-1}. \tag{11.94}$$

Если мы запишем уравнение окружности 2-плоскости или сферы 4-пространства в виде

$$a\xi\bar{\xi} + \beta\bar{\xi} + \xi\bar{\beta} + c = 0, \tag{11.95}$$

то в силу (6.7) центр и радиус окружности или сферы (11.95) связаны с коэффициентами $\alpha$, $\beta$, $c$ уравнения (11.95) соотношениями

$$\xi_0 = -\frac{\beta}{a}, \quad R^2 = \frac{\beta\bar{\beta} - ac}{a^2}. \tag{11.96}$$

Подставляя эти значения $\xi_0$ и $R^2$ в формулу (11.94), мы получим выражение инверсии относительно окружности или сферы (11.95) в виде

$$'\xi = (-\beta\bar{\xi} - c)(a\bar{\xi} + \bar{\beta})^{-1}. \tag{11.97}$$

**11.3.12. Круговые преобразования 2-плоскости и конформные преобразования 4-пространства.** Дополнению обычных 2-плоскости и 4-пространства до конформных 2-плоскости и 4-пространства соответствует дополнение плоскости комплексного переменного и пространства кватернионов бесконечно удаленной точкой $\infty$. Инверсии (11.94) и (11.97) на расширенной плоскости комплексного переменного и в расширенном пространстве кватернионов являются взаимно однозначными преобразованиями. Подобия (11.77) и (11.78) на 2-плоскости и (11.82) и (11.83) в 4-пространстве и инверсии (11.97) являются частными случаями дробно-линейных преобразований

$$'\xi = (\alpha\xi + \beta)(\gamma\xi + \delta)^{-1} \tag{11.98}$$

и

$$'\xi = (\alpha\bar{\xi} + \beta)(\gamma\bar{\xi} + \delta)^{-1}. \tag{11.99}$$

Покажем, что преобразования (11.98) и (11.99) в случае комплексных чисел являются *круговыми преобразованиями* 2-плоскости, а в случае кватернионов являются *конформными преобразованиями* 4-пространства [16]. В самом деле, преобразование (11.98) можно представить в виде

$$\begin{aligned} '\xi &= (\alpha\xi + \beta)(\gamma\xi + \delta)^{-1} = \\ &= (\alpha\gamma^{-1}\gamma\xi + \alpha\gamma^{-1}\delta - \alpha\gamma^{-1}\delta + \beta)(\gamma\xi + \delta)^{-1} = \\ &= \alpha\gamma^{-1} + (\beta - \alpha\gamma^{-1}\delta)(\gamma\xi + \delta)^{-1}, \end{aligned}$$

т. е. это преобразование является произведением преобразований

$$'\xi = \alpha\gamma^{-1} + (\beta - \alpha\gamma^{-1}\delta)\xi_1, \qquad \xi_1 = \bar{\xi}_2^{-1}, \qquad \xi_2 = \bar{\xi}\bar{\gamma} + \bar{\delta},$$

первое и третье из которых являются подобиями, а второе — инверсией. Преобразование (11.99) является произведением преобразования (11.98) и отражения от прямой. Так как подобия, отражение от прямой и инверсия относительно окружности на 2-плоскости являются круговыми преобразованиями 2-плоскости, их произведение также является круговым преобразованием 2-плоскости, а так как подобия, отражение от прямой и инверсия относительно сферы в 4-пространстве являются конформными преобразованиями 4-пространства, их произведение также является конформным преобразованием 4-пространства.

Из того, что всякое круговое преобразование 2-плоскости и всякое конформное преобразование 4-пространства является инверсией, подобием или их произведением, следует, что *всякое круговое преобразование 2-плоскости комплексного переменного и всякое конформное преобразование 4-пространства кватернионов представляется в виде* (11.98) *или* (11.99). Если мы поставим в соответствие комплексному дробно-линейному преобразованию 11.98) оператор комплексного 2-пространства

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \tag{11.100}$$

то произведению дробно-линейных преобразований соответствует произведение операторов. Поэтому *группа круговых преобразований* (11.98) *гомоморфна группе обратимых операторов комплексного 2-пространства*. Так как дробно-линейное преобразование не изменяется при умножении оператора $\mathbf{A}$ на произвольное комплексное число, *ядром гомоморфизма является группа операторов* $\lambda\mathbf{I}$. Поэтому *группа круговых преобразований* (11.98) *изоморфна фактор-группе группы операторов комплексного 2-пространства по ее подгруппе, состоящей из операторов* $\lambda\mathbf{I}$. Ограничиваясь в обеих группах операторами, определители матриц которых равны 1, мы сводим операторы $\lambda\mathbf{I}$ к двум операторам $\mathbf{I}$ и $-\mathbf{I}$. Поэтому группа круговых преобразований (11.98) изоморфна фактор-группе группы операторов комплексного 2-пространства, определители *матриц которых равны* $+1$, *по ее подгруппе, состоя-*

*щей из операторов* I *и* —I. Эта группа зависит от 6 вещественных параметров.

Заметим, что круговые преобразования 2-плоскости, которым при стереографической проекции 2-сферы на 2-плоскость, соответствуют вращения 2-сферы, имеют вид

$$'\xi = \frac{\alpha\xi + \beta}{-\bar{\beta}\xi + \bar{\alpha}}, \tag{11.101}$$

т. е. оператор (11.100) в этом случае удовлетворяет условию (11.88) и умножением на комплексное число может быть сделан унитарным оператором.

Для получения аналогичного представления конформных преобразований 4-пространства (11.98) определим *кватернионное линейное n-пространство*[17] с помощью аксиом I—III (см. 1.2.2, 1.2.3 и 1.2.5), в которых скаляры являются не вещественными числами, а кватернионами, вследствие своей некоммутативности, умножаемые на векторы только с одной стороны. Линейные операторы в этом пространстве представляются кватернионными матрицами, что доказывается так же, как в случае вещественного и комплексного пространства. Так как кватернионы представляются операторами комплексного 2-пространства (11.89), операторы кватернионного $n$-пространства представляются операторами комплексного $2n$-пространства, определители матриц которых вещественны и неотрицательны. Будем называть определитель матрицы комплексного $n$-пространства, представляющего оператор кватернионного $n$-пространства, *полуопределителем*[18] матрицы оператора кватернионного $n$-пространства; если мы обозначим полуопределитель матрицы оператора **A** кватернионного пространства через $|\mathbf{A}|^2$, то из его определения следует, что $|\mathbf{AB}|^2 = |\mathbf{A}|^2\,|\mathbf{B}|^2$. В случае кватернионного 2-пространства полуопределитель матрицы (11.100) имеет вид

$$|\mathbf{A}|^2 = \alpha\bar{\alpha}\delta\bar{\delta} - \alpha\bar{\gamma}\delta\bar{\beta} - \beta\bar{\delta}\gamma\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}\gamma\bar{\gamma}. \tag{11.102}$$

Обозначение $|\mathbf{A}|^2$ объясняется тем, что в случае, когда матрица (11.100) — комплексная, выражение (11.102) является квадратом определителя $|\mathbf{A}|$. Нетрудно проверить, что в случае оператора **A** кватернионного 2-про-

странства с матрицей (11.100)

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|^2}\begin{pmatrix} \bar{\delta}\bar{\delta}\bar{\alpha} - \bar{\gamma}\bar{\delta}\bar{\beta} & \bar{\beta}\bar{\beta}\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\delta} \\ \bar{\gamma}\bar{\gamma}\bar{\beta} - \bar{\delta}\bar{\gamma}\bar{\alpha} & \bar{\alpha}\bar{\alpha}\bar{\delta} - \bar{\beta}\bar{\alpha}\bar{\gamma} \end{pmatrix}. \qquad (11.103)$$

Если мы поставим в соответствие кватернионному дробно-линейному преобразованию (11.98) оператор кватернионного 2-пространства (11.100), то произведению дробно-линейных преобразований соответствует произведение операторов. Поэтому *группа конформных преобразований 4-пространства* (11.98) *гомоморфна группе обратимых операторов кватернионного 2-пространства*. Так как дробно-линейное преобразование не изменяется при умножении оператора **A** на произвольное вещественное число, *ядром гомоморфизма является группа операторов* $\lambda\mathbf{I}$, где $\lambda = \bar{\lambda}$. Ограничиваясь в обеих группах операторами, полуопределители матриц которых равны 1, мы сводим операторы $\lambda\mathbf{I}$ к двум операторам $\mathbf{I}$ и $-\mathbf{I}$. Поэтому *группа конформных преобразований 4-пространства* (11.98) *изоморфна фактор-группе группы операторов кватернионного 2-пространства, полуопределители матриц которых равны 1, по ее подгруппе, состоящей из операторов* $\mathbf{I}$ *и* $-\mathbf{I}$. Эта группа зависит от 15 вещественных параметров.

**11.3.13. Двойное отношение четырех комплексных чисел или кватернионов.** Будем называть *двойным отношением* $\overline{\xi_1\xi_2, \xi_3\xi_4}$ четырех комплексных чисел или кватернионов соответственно комплексное число или кватернион

$$\omega = \overline{\xi_1\xi_2, \xi_3\xi_4} = \\ = (\xi_3 - \xi_1)^{-1}(\xi_3 - \xi_2)(\xi_4 - \xi_2)^{-1}(\xi_4 - \xi_1). \qquad (11.104)$$

В случае комплексных чисел двойное отношение (11.104) можно записать в виде, отличающемся от двойного отношения (9.12) только заменой вещественных чисел $X_\alpha$ на комплексные числа $\xi_\alpha$.

Двойное отношение (11.104), очевидно, не изменяется при преобразовании $'\xi = \xi + \beta$, так как при этом преобразовании не изменяются все разности $\xi_3 - \xi_1$, $\xi_3 - \xi_2$, $\xi_4 - \xi_1$, $\xi_4 - \xi_2$, входящие в состав этого двойного отношения. При преобразовании $'\xi = \alpha\xi$ двойное отношение

(11.104) также не изменяется, так как

$$\overline{\alpha\xi_1, \alpha\xi_2; \alpha\xi_3, \alpha\xi_4} = \\ = (\xi_3 - \xi_1)^{-1}\alpha^{-1}\alpha(\xi_3 - \xi_2)(\xi_4 - \xi_2)^{-1}\alpha^{-1}\alpha(\xi_4 - \xi_1) = \omega.$$

При преобразовании $'\xi = \xi\alpha$ двойное отношение (11.104) переходит в

$$\overline{\xi_1\alpha, \xi_2\alpha; \xi_3\alpha, \xi_4\alpha} = \\ = \alpha^{-1}(\xi_3 - \xi_1)^{-1}(\xi_3 - \xi_2)\alpha\cdot\alpha^{-1}(\xi_4 - \xi_2)^{-1}(\xi_4 - \xi_1)\alpha = \alpha^{-1}\omega\alpha.$$

При преобразовании $'\xi = \xi^{-1}$ двойное отношение (11.104) переходит в

$$\overline{\xi_1^{-1}, \xi_2^{-1}; \xi_3^{-1}, \xi_4^{-1}} = \\ = (\xi_3^{-1} - \xi_1^{-1})^{-1}(\xi_3^{-1} - \xi_2^{-1})(\xi_4^{-1} - \xi_2^{-1})^{-1}(\xi_4^{-1} - \xi_1^{-1}) = \\ = \xi_1(\xi_1 - \xi_3)^{-1}\xi_3\xi_3^{-1}(\xi_2 - \xi_3)\xi_2^{-1}\xi_2(\xi_2 - \xi_4)^{-1}\xi_4\xi_4^{-1}(\xi_1 - \xi_4)\xi_1^{-1} = \\ = \xi_1\omega\xi_1^{-1}.$$

Так как преобразование (11.98) является произведением преобразований этих видов, *при произвольном преобразовании* (11.98) *двойное отношение* $\omega$ *в случае комплексных чисел не изменяется, а в случае кватернионов подвергается преобразованию*

$$'\omega = \rho^{-1}\omega\rho. \tag{11.105}$$

Так как преобразование (11.99) является произведением преобразования (11.98) на преобразование $'\xi = \overline{\xi}$, то *при произвольном преобразовании* (11.99) *двойное отношение* $\omega$ *в случае комплексных чисел переходит в сопряженное число* $\overline{\omega}$, *а в случае кватернионов подвергается преобразованию*

$$'\omega = \rho^{-1}\overline{\omega}\rho. \tag{11.106}$$

Если мы запишем кватернионное двойное отношение $\omega$ в виде $\omega_0 + \omega_1$, где $\omega_0 = \overline{\omega}_0$, $\omega_1 = -\overline{\omega}_1$, то при преобразованиях (11.105) и (11.106) слагаемое $\omega_0$ не изменяется, а слагаемое $\omega_1$ преобразованиями (11.105) и (11.106) всегда можно привести к виду $i|\omega_1|$, так как преобразования (11.105) и (11.106) в этом случае являются частными случаями преобразований (11.84) и (11.85), т. е. представляют собой вращения 3-пространства кватернионов вида $bi +$

$+ cj + dk$, а вращением этого 3-пространства можно направление любого вектора совместить с направлением вектора $i$. С другой стороны, если мы запишем комплексное двойное отношение $\omega_0$ в виде $\omega_0 + i\omega_1$, то в случае, когда $\omega_1 < 0$, преобразованием $'\omega = \bar{\omega}$ можно также преобразовать его к виду $\omega_0 + i|\omega_1|$. Поэтому 4 комплексных числа или кватерниона $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ *обладают при дробно-линейных преобразованиях* (11.98) *и* (11.99) *двумя вещественными инвариантами* $\omega_0$ *и* $|\omega_1|$.

В случае, если двойное отношение $\overline{\xi_1\xi_2,\ \xi_3\xi_4}$ равно $-1$, будем говорить, что пара элементов $\xi_1, \xi_2$ *гармонически делит* пару элементов $\xi_3, \xi_4$.

С другой стороны, 4 точки конформного $n$-пространства можно рассматривать как две 0-сферы, конформные инварианты которых являются частными случаями конформных инвариантов двух $m$-сфер $n$-пространства, определенных нами в 11.2.2. В случае круговой 2-плоскости эти инварианты равны стационарным углам между окружностями, проходящими через первую и вторую пару точек, причем, как мы видели, две окружности, проходящие через одну пару точек и через разные пары точек и соответствующие неравным стационарным углам, пересекаются под прямым углом. Для того чтобы найти эти стационарные углы, переведем дробно-линейным преобразованием плоскости комплексного переменного две точки, одновременно гармонически делящие обе данные пары точек, в 0 и $\infty$, а одну из точек первой пары — в 1. Тогда вторая точка первой пары перейдет в $-1$ и если первая точка второй пары перейдет в $\alpha$, то вторая точка второй пары перейдет в $-\alpha$. Четырьмя окружностями круговой плоскости, проходящими через эти пары точек и пересекающимися с двумя другими из этих окружностей под прямыми углами, являются прямые, проходящие через 0, и окружности с центром в точке 0, соединяющие точки каждой пары (рис. 11.5). Стационарными углами являются угол $\varphi_0$ между прямыми, равный аргументу

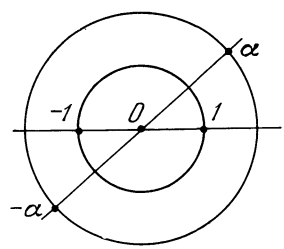


Рис. 11.5.

комплексного числа $\alpha = re^{i\varphi_0}$, и мнимый угол $\varphi_1$ между концентрическими окружностями, который в силу (6.54) равен $i \ln r$. С другой стороны, двойное отношение этих четырех точек равно

$$\omega = \overline{1, -1;\ \alpha, -\alpha} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} : \frac{-\alpha - 1}{+\alpha + 1} = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)^2.$$

Так как комплексное число $\alpha$ можно записать в виде $\alpha = re^{i\varphi_0} = e^{\ln r + i\varphi_0} = e^{i(\varphi_0 - \varphi_1)}$, то двойное отношение $\omega$ равно

$$\omega = \left(\frac{e^{i(\varphi_0-\varphi_1)} - 1}{e^{i(\varphi_0-\varphi_1)} + 1}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{e^{i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}} - e^{-i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}}}{e^{i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}} + e^{-i\frac{\varphi_0-\varphi_1}{2}}}\right)^2 = -\frac{\sin^2\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}}{\cos^2\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}} = -\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2},$$

т. е.

$$\omega = -\operatorname{tg}^2\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}. \tag{11.107}$$

Формула (11.107) устанавливает связь между инвариантами $\omega_0$ и $\omega_1$ четырех точек и стационарными углами $\varphi_0$ и $\varphi_1$.

В случае конформного $n$-пространства при $n > 3$ через 4 точки всегда можно провести 2-сферу, единственную в том случае, когда эти точки не лежат на одной окружности; эту 2-сферу можно перевести конформным преобразованием в любую 2-плоскость. Поэтому в случае пространства кватернионов 4 точки всегда можно перевести дробно-линейным преобразованием в 4 точки, находящиеся на 2-плоскости кватернионов вида $a + bi$ и притом так, что двойное отношение этих 4 точек является комплексным числом $\omega = \omega_0 + i\,|\omega_1|$. Это комплексное число связано со стационарными углами $\varphi_0$ и $\varphi_1$ данных 4 точек тем же соотношением (11.107), что и в случае плоскости комплексного переменного. В том случае, когда $\omega_1 = 0$, формула (11.107) показывает, что $\varphi_0 = 0$ или $\varphi_1 = 0$, т. е. 4 точки лежат на одной прямой или на одной окружности, т. е. на одной окружности конформного 4-пространства. В этом случае эти точки можно перевести дробно-линейным преобразованием в 4 точки вещественной оси.