

## Пространство и время

### § 1. Пространство — время и псевдоевклидовы пространства

**12.1.1. Пространство — время классической механики.** Аналогия между пространством и временем была известна еще древним грекам. Аристотель<sup>1</sup> включал время в число непрерывных величин наряду с линиями, поверхностями и телами. Однако впервые рассматривал время как координату наряду с пространственными координатами только Галилей<sup>2</sup>. Творцы дифференциального исчисления часто интерпретировали независимое переменное в виде времени. Время систематически рассматривалось в качестве координаты в теоретической механике.

Будем характеризовать положение материальной точки в пространстве в данный момент времени пространственными координатами  $x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) и временной координатой  $t$ . В *классической механике Галилея — Ньютона*<sup>3</sup> переход от исходной системы координат  $x^i, t$  к другой системе, движущейся относительно нее прямолинейно и равномерно, определяется формулами

$$\left. \begin{aligned} x^i &= A_i^j x^j - v^i t + a^i, \\ t &= t' + a, \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

где  $v^i$  — координаты вектора движения первой системы по отношению ко второй. Формулы (12.1) показывают, что если при переходе от одной системы координат к другой системе, движущейся по отношению к ней, пространственные координаты во второй системе выражаются не только через пространственные координаты в первой системе, но и через временную координату в этой системе, то вре-

менные координаты во второй системе могут отличаться от временных координат в первой системе только изменением начала отсчета, т. е. время в механике Галилея — Ньютона *абсолютно*.

Механика Галилея — Ньютона хорошо согласуется с практикой при малых скоростях, но при больших скоростях, сравнимых со скоростью света, эта механика заметно расходится с практикой; согласно механике Галилея — Ньютона, если скорость света по отношению к некоторой системе координат равна  $c$ , то по отношению к системе координат, движущейся в том же или обратном направлении со скоростью  $v$ , эта скорость соответственно должна быть равна  $c - v$  или  $c + v$ . Но, как показывает эксперимент, скорость света одна и та же по отношению ко всем системам координат, движущихся друг относительно друга прямолинейно и равномерно. Если скорость  $v$  во много раз меньше  $c$ , скорости  $c - v$  и  $c + v$  практически неотличимы от скорости  $c$ , но в случае, когда скорость  $v$  сравнима со скоростью  $c$ , отличие скорости света от скоростей  $c - v$  и  $c + v$  легко заметить.

**12.1.2. Пространство — время специальной теории относительности.** Для того чтобы выполнялось условие постоянства скорости света для всех систем координат, движущихся прямолинейно и равномерно друг относительно друга, достаточно, чтобы для всех таких систем прямоугольных координат выполнялось соотношение

$$\sum_i \left( \frac{x_2^i - x_1^i}{t_2 - t_1} \right)^2 = \sum_i \left( \frac{x_2^{i'} - x_1^{i'}}{t_2' - t_1'} \right)^2 = c^2,$$

т. е.

$$\sum_i (x_2^i - x_1^i)^2 - c^2 (t_2 - t_1) = \sum_i (x_2^{i'} - x_1^{i'})^2 - c^2 (t_2' - t_1'). \quad (12.2)$$

Это условие не может быть выполнено в механике Галилея — Ньютона, где координата  $t'$  не может зависеть от координат  $x^i$ . Для того чтобы удовлетворить этому условию, следует отказаться от понятия об абсолютном времени и принять, что пространство и время — не изолированные

друг от друга формы существования материи, а две стороны одной и той же формы существования материи.

Этому условию удовлетворяет механика *специальной теории относительности* Эйнштейна<sup>4</sup>, дающая при скоростях, сравнимых со скоростью света, значительно большее согласие с практикой, чем механика Галилея — Ньютона. Если мы обозначим произведение  $ct$ , имеющее размерность длины, через  $x^4$ , то, согласно специальной теории относительности, при переходе от одной системы прямоугольных координат к другой такой системе, движущейся относительно нее прямолинейно и равномерно, координаты  $x^i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) преобразуются по закону

$$x^i = A_{i'}^i x^{i'} + a^i, \quad (12.3)$$

причем

$$\sum_i \varepsilon_i (x_2^i - x_1^i)^2 = \sum_i \varepsilon_{i'} (x_2^{i'} - x_1^{i'})^2, \quad (12.4)$$

где  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ ,  $\varepsilon_4 = -1$ .

Формула (12.3) совпадает с формулой (2.21) преобразования прямоугольных координат обычного  $n$ -пространства при  $n = 4$ , но формула (12.4) отличается от соответственного условия в 4-пространстве, в котором все  $\varepsilon_i = 1$ .

Поэтому в случае специальной теории относительности можно по аналогии с обычным 4-пространством определить в 4-пространстве, точки которого изображают положения материальных точек в разные моменты времени, расстояния между точками, считая за расстояние между точками  $M_1$  и  $M_2$  с координатами  $x_1^i$  и  $x_2^i$  квадратный корень из выражения  $\sum_i \varepsilon_i (x_1^i - x_2^i)^2$ . Определенное таким образом расстояние может быть как вещественным, так и чисто мнимым и равным нулю. В первом случае существует такая система координат, в которой точки  $M_1$  и  $M_2$  одновременны и расстояние  $M_1 M_2$  равно обычному расстоянию между ними в этой системе координат. Во втором случае существует такая система координат, в которой эти точки имеют одинаковые пространственные координаты и расстояние  $M_1 M_2$  равно произведению  $ic$  на отрезок времени между этими точками в этой системе коорди-

нат. В третьем случае  $M_1 M_2 = 0$  и точки  $M_1$  и  $M_2$  можно соединить лучом света.

Определенное нами 4-пространство называют *пространством Минковского*<sup>5</sup> по имени математика, предложившего эту геометрическую интерпретацию пространства — времени специальной теории относительности. Преобразования (12.3) при  $a^i = 0$ , удовлетворяющие условиям (12.4), называют *преобразованиями Лоренца*<sup>6</sup>.

Этот пример, с одной стороны, показывает плодотворность математического понятия 4-пространства, а с другой стороны, указывает на необходимость расширения понятия евклидова  $n$ -пространства в сторону отказа от знакоопределенности квадратичной формы, выражающей скалярный квадрат вектора  $x$  в функции координат.

**12.1.3. Аксиомы псевдоевклидовых пространств.** Будем называть пространство, отличающееся от евклидова пространства тем, что квадратичная форма, выражающая скалярный квадрат  $x^2$  в функции координат  $x^i$ , является знаконеопределенной, *псевдоевклидовым пространством*<sup>7</sup>.

Дадим аксиоматическое определение этого пространства. *Псевдоевклидовым  $n$ -пространством индекса  $l$*  будем называть множество элементов любой природы, называемых точками, удовлетворяющих аксиомам I—IV аффинного  $n$ -пространства и, сверх того, удовлетворяющих метрическим аксиомам:

V, 1°. Каждым двум векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  поставлено в соответствие определенное число, обозначаемое

$$k = \mathbf{a}E\mathbf{b} \quad (12.5)$$

и называемое *скалярным произведением* векторов.

V, 2°. Скалярное произведение векторов *коммутативно*, т. е.

$$\mathbf{a}E\mathbf{b} = \mathbf{b}E\mathbf{a}, \quad (12.6)$$

V, 3°. Скалярное произведение векторов *дистрибутивно* относительно сложения векторов, т. е.

$$\mathbf{a}E(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}E\mathbf{b} + \mathbf{a}E\mathbf{c}. \quad (12.7)$$

V, 4°. Вещественный множитель можно вынести за знак скалярного произведения, т. е.

$$(ka)\mathbf{E}\mathbf{b} = ka\mathbf{E}\mathbf{b}. \quad (12.8)$$

V, 5°. Существуют такие  $n$  векторов  $\mathbf{a}_i$ , что

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_a \mathbf{E} \mathbf{a}_a &> 0 \ (a \leq l), \\ \mathbf{a}_u \mathbf{E} \mathbf{a}_u &< 0 \ (u > l), \ \mathbf{a}_i \mathbf{E} \mathbf{a}_j = 0 \text{ при } i \neq j. \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

Как мы видим, аксиомы V, 1°—4° по существу совпадают с соответственными аксиомами евклидова  $n$ -пространства и отличаются только тем, что мы обозначаем здесь скалярное произведение не  $\mathbf{ab}$ , а  $\mathbf{aE}\mathbf{b}$ . По существу псевдоевклидово пространство отличается от евклидова только аксиомой V, 5°.

Векторы

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}_a}{\sqrt{\mathbf{a}_a \mathbf{E} \mathbf{a}_a}}, \quad \mathbf{e}_u = \frac{\mathbf{a}_u}{\sqrt{-\mathbf{a}_u \mathbf{E} \mathbf{a}_u}} \quad (12.10)$$

обладают тем свойством, что

$$\mathbf{e}_a \mathbf{E} \mathbf{e}_a = 1, \quad \mathbf{e}_u \mathbf{E} \mathbf{e}_u = -1, \quad \mathbf{e}_i \mathbf{E} \mathbf{e}_j = 0 \text{ при } i \neq j. \quad (12.11)$$

Поэтому если мы примем векторы  $\mathbf{e}_i$  за базисные, скалярный квадрат  $\mathbf{xEx}$  вектора  $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$  примет вид

$$\mathbf{xEx} = \sum_i \varepsilon_i (x^i)^2, \quad \varepsilon_a = 1, \quad \varepsilon_u = -1. \quad (12.12)$$

Мы видим, что 4-пространство Минковского является псевдоевклидовым 4-пространством индекса 3.

**12.1.4. Закон инерции.** В псевдоевклидовых пространствах имеет место теорема, которую можно рассматривать как *закон инерции квадратичной формы*<sup>8</sup> (12.12): *в псевдоевклидовом  $n$ -пространстве индекса  $l$  во всякой системе  $n$  векторов  $\mathbf{b}_i$ , для которых  $\mathbf{b}_i \mathbf{E} \mathbf{b}_i \neq 0$ ,  $\mathbf{b}_i \mathbf{E} \mathbf{b}_j = 0$  при  $i \neq j$ , число векторов  $\mathbf{b}_i$ , для которых  $\mathbf{b}_i \mathbf{E} \mathbf{b}_i > 0$ , равно  $l$ , а число векторов  $\mathbf{b}_i$ , для которых  $\mathbf{b}_i \mathbf{E} \mathbf{b}_i < 0$ , равно  $n - l$ .* В самом деле, предположим, что число векторов  $\mathbf{b}_{a'}$ , для которых  $\mathbf{b}_{a'} \mathbf{E} \mathbf{b}_{a'} > 0$ , равно  $l' > l$ , а число векторов  $\mathbf{b}_{u'}$ , для которых  $\mathbf{b}_{u'} \mathbf{E} \mathbf{b}_{u'} < 0$ , равно  $n - l'$ . Так как

$l' > l$ ,  $l'$ -плоскость векторов  $\lambda^{a'}\mathbf{b}_{a'}$  пересекается с  $(n - l)$ -плоскостью векторов  $\lambda^u\mathbf{a}_u$  по  $(l' - l)$ -плоскости. Если  $\mathbf{c}$  — вектор этой  $(l' - l)$ -плоскости, его можно представить в виде  $\mathbf{c} = c^{a'}\mathbf{b}_{a'} = c^u\mathbf{e}_u$ . Но  $(c^u\mathbf{e}_u)\mathbf{E}(c^v\mathbf{e}_v) = (c^u)^2 \mathbf{e}_u\mathbf{E}\mathbf{e}_v < 0$ , а  $(c^{a'}\mathbf{b}_{a'})\mathbf{E}(c^{b'}\mathbf{b}_{b'}) = (c^{a'})^2 \mathbf{b}_{a'}\mathbf{E}\mathbf{b}_{a'} > 0$ . Полученное противоречие показывает, что неравенство  $l' > l$  невозможно. Аналогично доказывается невозможность неравенства  $l' < l$ .

**12.1.5. Модели псевдоевклидовых пространств.** Принятое нами обозначение  $\mathbf{a}\mathbf{E}\mathbf{b}$  для скалярного произведения векторов в псевдоевклидовом пространстве не случайно имеет вид билинейной формы, определяемой линейным оператором  $\mathbf{E}$ ; нетрудно проверить, что если  $\mathbf{E}$  — линейный оператор гиперболоида индекса  $l$

$$\mathbf{x}\mathbf{E}\mathbf{x} = r^2 \quad (12.13)$$

в аффинном  $n$ -пространстве, то билинейная форма  $\mathbf{x}\mathbf{E}\mathbf{y}$  удовлетворяет всем аксиомам  $V$ ,  $1^\circ - 5^\circ$  псевдоевклидова  $n$ -пространства индекса  $l$ : выполнение аксиом  $V, 3^\circ - 4^\circ$  вытекает из того, что  $\mathbf{E}$  — линейный оператор, выполнение аксиомы  $V, 2^\circ$  — из того, что  $\mathbf{E}^t = \mathbf{E}$ , выполнение аксиомы  $V, 5^\circ$  следует из того, что, как мы видели в 7.2.7, такой гиперболоид можно привести аффинным преобразованием к виду (7.63), левая часть которого совпадает с квадратичной формой (12.12), откуда вытекает, что имеется система аффинных координат, в которых форма  $\mathbf{x}\mathbf{E}\mathbf{x}$  принимает вид (12.12) и базисные векторы  $\mathbf{e}_i$  этой системы координат удовлетворяют требованию аксиомы  $V, 5^\circ$ . Аффинное  $n$ -пространство, в котором определено скалярное произведение  $\mathbf{a}\mathbf{E}\mathbf{b}$  с помощью линейного оператора  $\mathbf{E}$ , представляет собой *геометрическую модель* псевдоевклидова  $n$ -пространства.

Арифметической моделью псевдоевклидова  $n$ -пространства индекса  $l$  является арифметическая модель линейного  $n$ -пространства, в которой векторы изображаются системами  $n$  вещественных чисел, если определить скалярное произведение систем чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  как

$$k = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ly_l - x_{l+1}y_{l+1} - \dots - x_ny_n.$$

**12.1.6. Расстояния между точками.** Определим *модуль*  $|a|$  вектора  $a$  псевдоевклидова  $n$ -пространства как неотрицательный корень  $\sqrt{aEa}$ , если  $aEa \geq 0$ , и как корень  $\sqrt{|aEa|}$  из верхней полуплоскости комплексного переменного, если  $aEa < 0$ . В обоих случаях условимся записывать модуль вектора в виде

$$|a| = +\sqrt{aEa}. \quad (12.14)$$

Векторы, модули которых равны 1 и  $i$ , будем называть соответственно *единичными* и *мнимоединичными* векторами.

Векторы вещественного модуля называют также *пространственноподобными*, а векторы мнимого модуля — *времениподобными*, так как в 4-пространстве Минковского оси пространственных координат направлены по векторам вещественного модуля, а ось временной координаты направлена по вектору мнимого модуля.

Будем считать *расстоянием* между точками  $A$  и  $B$  модуль вектора  $\overrightarrow{AB}$ ; будем обозначать это расстояние  $AB$ . Таким образом, расстояние  $AB$  между точками  $A(x)$  и  $B(y)$  определяется соотношением

$$AB^2 = |y - x|^2 = (y - x) E (y - x). \quad (12.15)$$

Из определения расстояния видно, что из свойств 1°—3° метрического пространства (см. 2.1.3. и 2.1.4) псевдоевклидово пространство обладает только *симметричностью* расстояния

$$AB = BA. \quad (12.16)$$

Расстояние  $AB$  положительно, если  $(y - x) E (y - x) > 0$ , чисто мнимо, если  $(y - x) E (y - x) < 0$ , и расстояние  $AB$  равно нулю при несовпадении точек  $A$  и  $B$ , если  $(y - x) E (y - x) = 0$ . Неравенство треугольника и неравенство Коши, существенно опирающиеся на аксиому V, 5° евклидова пространства, в псевдоевклидовом пространстве не имеют места.

Из определения псевдоевклидова пространства видно, что между псевдоевклидовыми  $n$ -пространствами индексов  $l$  и  $n-l$  можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором точкам  $A$  и  $B$  первого пространства,

для которых  $AB = d$  вещественно, соответствуют точки  $A'$  и  $B'$  второго пространства, для которых  $A'B' = d'$  чисто мнимо, причем  $d' = id$ , а точкам  $A$  и  $B$ , для которых  $AB = d$  чисто мнимо, соответствуют точки  $A'$  и  $B'$ , для которых  $A'B' = d'$  вещественно, причем  $d = id'$ .

### 12.1.7. Изотропный конус.

Векторы  $x$ , для которых

$$xEx = 0, \quad (12.17)$$

обладают нулевым модулем. Эти векторы, так же как аналогичные мнимые векторы евклидова пространства (см. 4.2.9), называются *изотропными векторами*. Направления изотропных векторов называются *изотропными направлениями*.

Уравнение (12.17) является уравнением конуса второго порядка, являющегося геометрическим местом точек, отстоящих от точки  $O(0)$  на нулевом расстоянии. Этот конус называется *изотропным конусом*.

**12.1.8. Сфера.** Сферой псевдоевклидова пространства, как и в евклидовом пространстве, называется геометрическое место точек, равноотстоящих от одной точки. Уравнение сферы с центром в точке  $O(0)$  и радиусом  $r$  имеет вид (12.13). В псевдоевклидовом пространстве имеется три

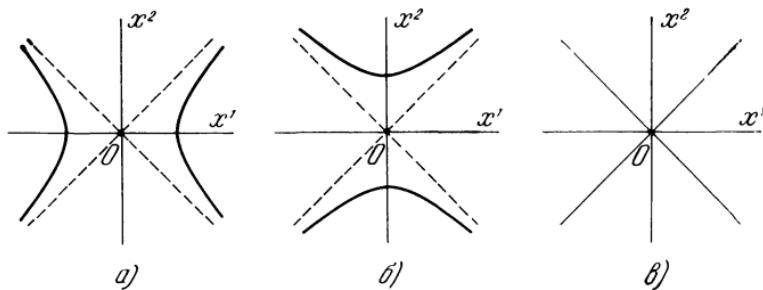


Рис. 12.1.

вида сфер — сферы вещественного радиуса, сферы мнимого радиуса и сферы нулевого радиуса, совпадающие с изотропными конусами. На рис. 12.1 изображены окружности

$$(x^1)^2 - (x^2)^2 = r^2 \quad (12.18)$$

на псевдоевклидовой 2-плоскости индекса 1 — окружности вещественного и мнимого радиусов (рис. 12.1, *a* и *б*), имеющие вид гипербол, и окружность нулевого радиуса, являющаяся парой изотропных прямых (рис. 12.1, *в*).

На рис. 12.2 изображены сферы

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = r^2 \quad (12.19)$$

в псевдоевклидовом 3-пространстве индекса 2 — сфера вещественного радиуса, имеющая вид однополостного

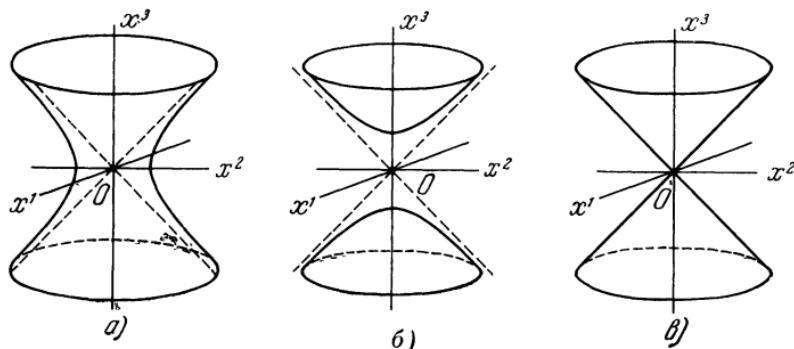


Рис. 12.2.

гиперболоида (рис. 12.2, *а*), сфера мнимого радиуса, имеющая вид двуполостного гиперболоида (рис. 12.2, *б*) и сфера нулевого радиуса, т. е. изотропный конус (рис. 12.2, *в*).

Формула (12.17) показывает, что изотропные направления в псевдоевклидовом пространстве являются асимптотическими направлениями относительно сферы (12.13), а изотропный конус является асимптотическим конусом этой сферы.

**12.1.9. Углы между векторами.** Определим угол  $\varphi$  между векторами **a** и **b** по формуле

$$\cos^2 \varphi = \frac{(\mathbf{a}\mathbf{b})^2}{(\mathbf{a}\mathbf{a})(\mathbf{b}\mathbf{b})}, \quad (12.20)$$

аналогичной формуле (2.12). В том случае, когда векторы **a** и **b** и любая их линейная комбинация являются векторами вещественного модуля, эти векторы определяют евклидову 2-плоскость, в ней имеет место неравенство

Коши (2.11), которое мы здесь перепишем в виде

$$|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \geq (\mathbf{aE}\mathbf{b})^2. \quad (12.21)$$

Поэтому в этом случае  $\cos^2 \varphi \leq 1$  и угол  $\varphi$  является вещественным числом. В том случае, когда векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и любая их линейная комбинация являются векторами мнимого модуля, эти векторы определяют псевдоевклидову 2-плоскость индекса 0, в которой также имеет место неравенство Коши (12.21). Поэтому в этом случае, так же как на евклидовой 2-плоскости,  $\cos^2 \varphi \leq 1$  и угол  $\varphi$  веществен. В том случае, когда среди линейных комбинаций векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  имеются два перпендикулярных вектора, модуль одного из которых веществен, а другой мним, неравенство Коши (12.21) не имеет места и в том случае, когда  $\mathbf{aE}\mathbf{a}$  и  $\mathbf{bE}\mathbf{b}$  имеют одинаковые знаки,  $\cos^2 \varphi > 1$ , а в том случае, когда  $\mathbf{aE}\mathbf{a}$  и  $\mathbf{bE}\mathbf{b}$  имеют разные знаки,  $\cos^2 \varphi < 0$ . В обоих этих случаях выполняется неравенство

$$|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 < (\mathbf{aE}\mathbf{b})^2, \quad (12.22)$$

так как в первом случае  $(\mathbf{aE}\mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \varphi$ , а во втором случае  $|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 < 0$ , а  $(\mathbf{aE}\mathbf{b})^2 > 0$ . Из неравенства (12.22) следует, что на псевдоевклидовых 2-плоскостях индекс 1 имеет место неравенство

$$AC \geq AB + BC. \quad (12.23)$$

В случае, когда  $\cos \varphi > 1$ , применяем формулу (6.52), т. е.  $\cos \varphi = \operatorname{ch} \psi = \cos i\psi$  и угол  $\varphi$  в этом случае чисто мним. В случае, когда  $\cos \varphi < -1$ ,

$$\cos \varphi = -\operatorname{ch} \psi = -\cos i\psi = \cos(\pi - i\psi), \quad (12.24)$$

т. е. угол  $\varphi$  является комплексным числом вида  $\pi - i\psi$ . В случае, когда  $\cos^2 \varphi < 0$ ,  $\cos \varphi$  — чисто мнимое число, которое мы можем обозначить  $i \operatorname{sh} \psi$  и, так как  $i \operatorname{sh} \psi = \sin i\psi$ , мы можем записать  $\cos \varphi$  в виде

$$\cos \varphi = i \operatorname{sh} \psi = \sin i\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\psi\right), \quad (12.25)$$

т. е. угол  $\varphi$  является комплексным числом вида  $\frac{\pi}{2} - i\psi$ .

На рис. 12.3 изображены углы между вектором  $e_1 = \{1, 0\}$  и векторами  $\mathbf{a} = \{\operatorname{ch} \psi, \operatorname{sh} \psi\}$ ,  $\mathbf{b} = \{\operatorname{sh} \psi, \operatorname{ch} \psi\}$  и  $\mathbf{c} = \{-\operatorname{ch} \psi, \operatorname{sh} \psi\}$  на псевдоевклидовой 2-плоскости: в этих случаях  $\cos \varphi$  соответственно равен  $\operatorname{ch} \psi$ ,  $i \operatorname{sh} \psi$  и  $-\operatorname{ch} \psi$  и угол  $\varphi$  соответственно равен  $i\psi$ ,  $\frac{\pi}{2} - i\psi$  и  $\pi - i\psi$ .

Заметим, что угол  $\varphi$  между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  псевдоевклидовой 2-плоскости индекса 1 веществен только в случае, когда векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны ( $\varphi = 0$ , если  $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ ,  $k > 0$ , и  $\varphi = \pi$ , если  $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ ,  $k < 0$ ), и когда векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  перпендикулярны — в этом случае

$$\mathbf{aE}\mathbf{b} = 0 \quad (12.26)$$

и  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (углы  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  и  $\varphi = \pi$  являются частными случаями углов  $\varphi = \frac{\pi}{2} - i\psi$  и  $\varphi = \pi - i\psi$  при  $\psi = 0$ ).

Формула (12.26) показывает, что *перпендикулярные направления в псевдоевклидовом пространстве являются сопряженными направлениями относительно сферы* (12.13).

Мы видим, что равенство  $\cos^2 \varphi = 1$ , равносильное равенству

$$|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{aE}\mathbf{b})^2, \quad (12.27)$$

на псевдоевклидовой 2-плоскости имеет место только в том случае, когда векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  коллинеарны. Равенство (12.27)

для неколлинеарных векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  может иметь место только в тех случаях, когда среди линейных комбинаций этих векторов нельзя найти двух перпендикулярных комбинаций этих векторов, например, в случае векторов  $e_1 = \{1, 0, 0\}$  и  $\mathbf{a} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  в псевдоевклидовом 3-м пространстве индекса 2, так как для этих векторов  $|e_1| = 1$ ,  $|\mathbf{a}| = \alpha$ ,  $e_1 \mathbf{E} \mathbf{a} = \alpha$ .

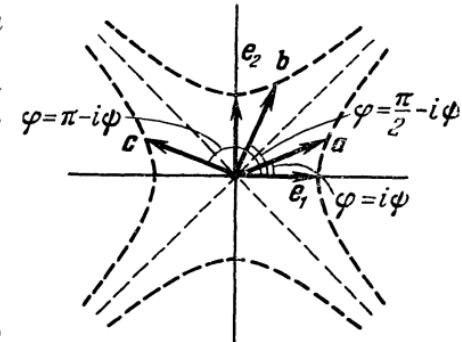


Рис. 12.3.

**12.1.10. Теорема косинусов.** На псевдоевклидовых 2-плоскостях, так же как на евклидовой 2-плоскости, имеет место *теорема косинусов*: в треугольнике  $ABC$  со сторонами  $a, b, c$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \quad (12.28)$$

В самом деле, рассмотрим векторы  $\mathbf{a} = \overrightarrow{CB}$  и  $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$ . Тогда  $a = |\overrightarrow{BC}| = |\mathbf{a}|$ ,  $b = |\overrightarrow{AC}| = |\mathbf{b}|$ ,  $c = |\overrightarrow{AB}| = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$  и  $c^2 = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos C$ , откуда вытекает формула (12.28).

При  $C = \frac{\pi}{2}$  в качестве частного случая формулы (12.28) мы получаем *теорему Пифагора*

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (12.29)$$

**12.1.11. Интерпретация многообразия евклидовых сфер на псевдоевклидовой сфере.** В 11.1.7 мы показали, что сферы конформного  $n$ -пространства определяются  $n+2$  ( $n+2$ )-сферическими координатами  $s^\alpha$ , связанными соотношением (11.26), которое можно рассматривать как уравнение  $(n+1)$ -сферы в псевдоевклидовом  $(n+2)$ -пространстве индекса  $n+1$ , причем в силу (11.32) угол между сферами  $n$ -пространства равен углу между радиусами-векторами соответственных точек  $(n+1)$ -сферы, т. е. сферическому расстоянию этих точек  $(n+1)$ -сферы.

Так как  $(n+2)$ -сферические координаты  $s^\alpha$  и  $-s^\alpha$  определяют одну и ту же сферу  $n$ -пространства, для установления взаимно однозначного соответствия между сферами  $n$ -пространства и точками  $(n+1)$ -сферы  $(n+2)$ -пространства следует различать *ориентацию сфер*, связывая, например, положительную ориентацию сферы с внешней стороной ее поверхности, а отрицательную ориентацию — с внутренней стороной.

Будем приписывать радиусу сферы положительный и отрицательный знак в случае соответственно положительной и отрицательной ориентации, а угол между сферами с центрами  $M_1(x_1)$  и  $M_2(x_2)$  и радиусами  $R_1$  и  $R_2$  определим по формуле, отличающейся от формулы (6.47), отсут-

ствием знака абсолютной величины в правой части, т. е.

$$\cos \varphi = \frac{R_1^2 + R_2^2 - (x_2 - x_1)^2}{2R_1 R_2}. \quad (12.30)$$

В случае двух сфер, отличающихся только ориентацией, когда  $x_1 = x_2$  и  $R_2 = -R_1$ , формула (12.30) дает  $\cos \varphi = -1$ , т. е.  $\varphi = \pi$  и, значит, две сферы, отличающиеся только ориентацией, изображаются диаметрально противоположными точками  $(n+1)$ -сферы. Тем самым мы установили взаимно однозначное соответствие между сферами конформного  $n$ -пространства и точками  $(n+1)$ -сферы. Так как правая часть равенства (12.30) может быть записана в виде  $sEt$ , где  $s$  и  $t$  — векторы  $(n+2)$ -пространства, изображающие данные сферы, мы получаем, что если принять за расстояние между двумя сферами угол между ними, многообразие ориентированных сфер конформного  $n$ -пространства изометрично  $(n+1)$ -сфере радиуса 1 в псевдоевклидовом  $(n+2)$ -пространстве индекса  $n+1$ .

**12.1.12. Интерпретация многообразия евклидовых сфер в псевдоевклидовом пространстве**<sup>9</sup>. Рассмотрим многообразие ориентированных сфер евклидова  $n$ -пространства. Будем, как и раньше, связывать положительную и отрицательную ориентацию сфер с внешней и внутренней стороной ее поверхности и будем приписывать радиусу сферы положительный и отрицательный знак соответственно в случае положительной и отрицательной ориентации. Если две сферы обладают общими касательными, эти касательные являются прямолинейными образующими конуса или цилиндра. У двух сфер может быть два таких конуса или конус и цилиндр, но мы будем рассматривать только тот конус или цилиндр, на котором обе сферы определяют одну и ту же ориентацию, считая ориентацию конуса или цилиндра также связанной с одной из сторон его поверхности. На рис. 12.4, а изображены общие касательные двух сфер одинаковой ориентации, на рис. 12.4, б — общие касательные двух сфер противоположной ориентации. Для двух сфер, обладающих общими касательными, определим *касательное расстояние* между ними — длину отрезка одной из рассматриваемых нами общих касательных

между точками касания. Все эти отрезки равны, так как их можно совместить поворотом вокруг прямой, соединяющей центры сфер. Если мы проведем из центра  $M_1$  одной из сфер прямую  $M_1N$ , параллельную одной из общих касательных, то центры  $M_1$  и  $M_2$  сфер и точка  $N$

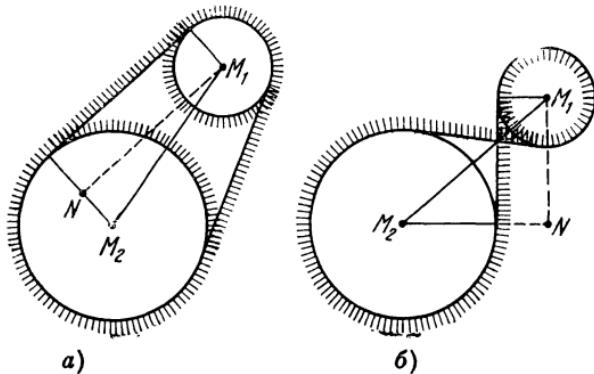


Рис. 12.4.

пересечения проведенной нами прямой с радиусом, проведенным в точку касания второй сферы, являются вершинами прямоугольного треугольника  $M_1M_2N$ . Гипotenуза этого треугольника равна расстоянию  $M_1M_2$ , а катеты — касательному расстоянию  $d$  сфер и абсолютному значению  $|R_2 - R_1|$  разности радиусов сфер (с учетом их знака), т. е.

$$d^2 = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2 - (R_2 - R_1)^2. \quad (12.31)$$

В том случае, когда для двух сфер нельзя определить касательного расстояния, правая часть выражения (12.31) отрицательна или равна нулю. В первом случае (рис. 12.5, а) будем называть чисто мнимое число, определяемое соотношением (12.31), *мнимым касательным расстоянием*, во втором случае (рис. 12.5, б) будем считать касательное расстояние равным нулю.

Если поставим в соответствие сфере с центром  $M$  ( $\mathbf{x}$ ) и радиусом  $R$  (со знаком, определяем ориентацией сферы) точку афинного  $(n+1)$ -пространства с координатами  $x^i$ ,  $x^{n+1} = R$  и будет считать расстоянием между точками этого  $(n+1)$ -пространства касательное рас-

стояние между соответственными сферами, то аффинное  $(n + 1)$ -пространство станет псевдоевклидовым  $(n + 1)$ -пространством индекса  $n$ . Таким образом, если принять за расстояние между двумя сферами их касательное расстояние, многообразие ориентированных сфер евклидова  $n$ -пространства изометрично псевдоевклидову  $(n + 1)$ -пространству индекса  $n$ .

Совершенно аналогично, различая ориентацию сфер псевдоевклидова пространства, связывая ее с внешней и внутренней стороной поверхности сферы и тем, является ли вещественный радиус положительным или отрицательным числом, а мнимый радиус — числом из верхней или нижней полуплоскости комплексного переменного, и рассматривая многообразие сфер вещественного или мнимого радиуса и определяя касательное расстояние между двумя сферами вещественного или мнимого радиуса, мы найдем, что это расстояние определяется по той же формуле (12.31), что и для сфер евклидова пространства. В случае псевдоевклидова  $n$ -пространства индекса  $l$  правую часть (12.31) можно рассматривать как квадрат расстояния между двумя точками псевдоевклидова  $(n + 1)$ -пространства индекса  $l$  в случае сфер вещественного радиуса и индекса  $l + 1$  в случае сфер мнимого радиуса. Поэтому, если принять за расстояние между двумя ориентированными сферами вещественного или мнимого радиуса псевдоевклидова  $n$ -пространства индекса  $l$  их касательное расстояние, многообразие ориентированных сфер изометрично псевдоевклидову  $(n + 1)$ -пространству соответственно индекса  $l$  или  $l + 1$ .

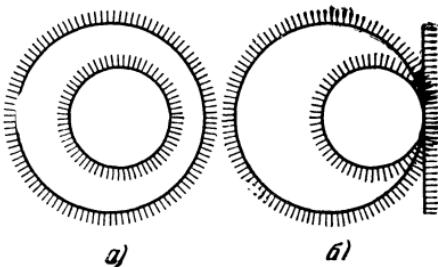


Рис. 12.5.

**12.1.13. Прямоугольные координаты.** Системой прямоугольных координат называют такую систему аффинных координат псевдоевклидова пространства, все базисные векторы которой единичны или мнимоединичны и

взаимно перпендикулярны, в случае псевдоевклидова  $n$ -пространства индекса  $l$  базисные векторы такой системы координат всегда можно перенумеровать таким образом, чтобы имели место соотношения (12.11), которые можно переписать в виде

$$\mathbf{e}_i \mathbf{E} \mathbf{e}_j = \varepsilon_i \delta_{ij}, \quad \varepsilon_a = 1, \quad \varepsilon_u = -1. \quad (12.32)$$

В этом случае скалярное произведение  $\mathbf{x} \mathbf{E} \mathbf{y}$  имеет вид

$$\mathbf{x} \mathbf{E} \mathbf{y} = \sum_i \sum_j \varepsilon_i \delta_{ij} x^i y^j = \sum_i \varepsilon_i x^i y^i, \quad (12.33)$$

откуда следует, что скалярный квадрат  $\mathbf{x} \mathbf{E} \mathbf{x}$  имеет вид (12.12), а расстояние  $AB$  определяется формулой

$$AB^2 = \sum_i \sum_j \varepsilon_i \delta_{ij} (y^i - x^i) (y^j - x^j) = \sum_i \varepsilon_i (y^i - x^i)^2. \quad (12.34)$$

Закон преобразования прямоугольных координат в общем случае имеет вид (12.3), где  $i = 1, 2, \dots, n$ , а коэффициенты  $A_{i'}^i$ , как и в общем случае аффинных координат, определяются соотношениями (1.16), т. е.  $\mathbf{e}_{i'} = A_{i'}^i \mathbf{e}_i$ . Поэтому в силу соотношения (12.32) и аналогичного соотношения

$$\mathbf{e}_{i'} \mathbf{E} \mathbf{e}_{j'} = \varepsilon_{i'} \delta_{i' j'}, \quad (12.35)$$

мы находим, что

$$\mathbf{e}_{i'} \mathbf{E} \mathbf{e}_{j'} = \varepsilon_{i'} \delta_{i' j'} = A_{i'}^i A_{j'}^j \mathbf{e}_i \mathbf{E} \mathbf{e}_j = \sum_i \sum_j \varepsilon_i \delta_{ij} A_{i'}^i A_{j'}^j,$$

т. е. элементы  $A_{i'}^i$  связаны условием

$$\sum_i \sum_j \varepsilon_i \delta_{ij} A_{i'}^i A_{j'}^j = \varepsilon_{i'} \delta_{i' j'}, \quad (12.36)$$

которые можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ab} A_{a'}^a A_{b'}^b - \delta_{uv} A_{u'}^u A_{v'}^v &= \delta_{a'b'}, \\ \delta_{ab} A_{u'}^a A_{v'}^b - \delta_{uv} A_{u'}^u A_{v'}^v &= -\delta_{u'v'}, \\ \delta_{ab} A_{a'}^a A_{u'}^b - \delta_{uv} A_{a'}^u A_{u'}^v &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.37)$$

Матрицы  $(A_{i'}^i)$ , элементы которых связаны этими условиями, называются *псевдоортогональными матрицами индекса  $l$* . Поэтому закон преобразования прямоугольных координат в псевдоевклидовом  $n$ -пространстве индекса  $l$  имеет вид (12.3), где  $(A_{i'}^i)$  — псевдоортогональная матрица индекса  $l$ .

Условия (12.36) мы получим также, требуя, чтобы при преобразованиях координат (12.3) выполнялось условие (12.4). Так как определитель матрицы  $(\varepsilon_i \delta_{ij})$  равен 1 или  $-1$ , то формула (12.36) показывает, что определитель псевдоортогональной матрицы также равен 1 или  $-1$ .

**12.1.14. Прямые и плоскости.** В псевдоевклидовом  $n$ -пространстве индекса  $l$  имеется 3 вида прямых — прямые, направляющие векторы которых являются соответственно векторами вещественного модуля, векторами мнимого модуля и изотропными векторами. Эти прямые называются соответственно *евклидовыми, псевдоевклидовыми и изотропными прямыми*. На рис. 12.6 изображены евклидова прямая  $a$ , псевдоевклидова прямая  $b$  и изотропная прямая  $c$  в псевдоевклидовом 3-пространстве индекса 2.

В псевдоевклидовом  $n$ -пространстве индекса  $l$  имеются 3 вида плоскостей — плоскости, нормальные векторы которых являются соответственно векторами вещественного модуля, векторами мнимого модуля и изотропными векторами.

Так как во всякой системе  $n$  взаимно перпендикулярных неизотропных векторов псевдоевклидова  $n$ -пространства индекса  $l$  всегда  $l$  векторов вещественного модуля и  $n-l$  векторов мнимого модуля, то *плоскости псевдоевклидова  $n$ -пространства индекса  $l$ , нормальные векторы которых имеют вещественный или мнимый модуль, являются соответственно псевдоевклидовыми  $(n-1)$ -пространствами индекса  $l-1$  и  $l$ , а плоскости*

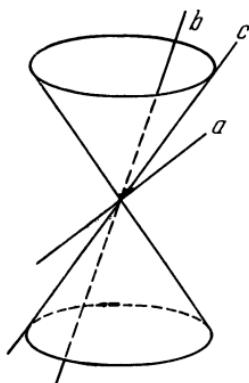


Рис. 12.6.

псевдоевклидова  $n$ -пространства индекса  $n-1$ , нормальные векторы которых имеют мнимый модуль, являются евклидовыми ( $n-1$ )-пространствами.

В случае плоскости с изотропным нормальным вектором из того, что этот вектор перпендикулярен всем векторам этой плоскости и, как видно из условия изотропности (12.17), перпендикулярен сам себе, следует, что *плоскость с изотропным нормальным вектором содержит этот вектор*.

Плоскости с изотропными нормальными векторами являются аффинными ( $n-1$ )-пространствами, метрика которых не является ни евклидовой, ни псевдоевклидовой.

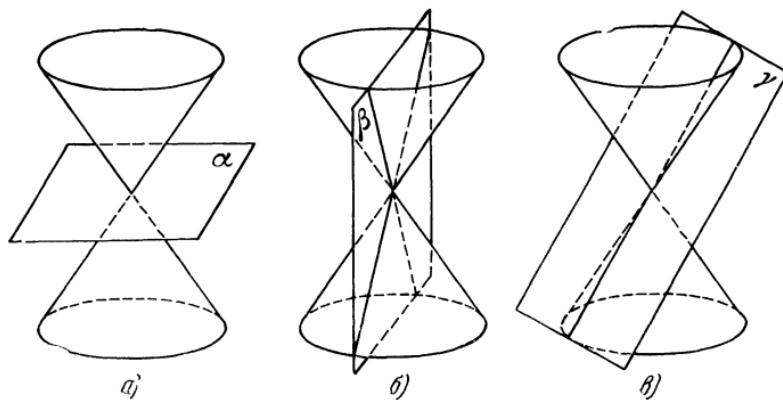


Рис. 12.7.

Такие ( $n-1$ )-пространства называются *изотропными полуевклидовыми* или ( $n-1$ )-пространствами<sup>10</sup>.

Аналогично производится классификация  $m$ -плоскостей псевдоевклидова  $n$ -пространства. В частности, как мы видели, 2-плоскости, на которых имеются два перпендикулярных неизотропных вектора, могут быть *евклидовыми* и *псевдоевклидовыми* индекса 1 и 0; 2-плоскости, на которых нельзя найти двух перпендикулярных векторов, называются *изотропными* 2-плоскостями.

На рис. 12.7, *a* изображена евклидова 2-плоскость  $\alpha$ , на рис. 12.7, *б* — изотропная 2-плоскость  $\beta$ , на рис. 12.7, *в* — полуевклидова 2-плоскость  $\gamma$  в псевдоевклидовом 3-пространстве индекса 2.

$m$ -плоскости, все векторы которых изотропны, называются *вполне изотропными  $m$ -плоскостями*.

Так как (см. 7.1.3) направления прямолинейных образующих квадрики являются асимптотическими направлениями этой квадрики, *прямолинейные образующие сферы псевдоевклидова пространства являются изотропными прямыми, откуда следует, что  $m$ -плоские образующие сферы псевдоевклидова пространства являются изотропными  $m$ -плоскостями.*

Так как сферу (12.13) вещественного радиуса в псевдоевклидовом  $n$ -пространстве индекса  $l$  можно рассматривать как гиперболоид индекса  $l$  в аффинном  $n$ -пространстве, а, как мы видели в 7.2.9, такой гиперболоид при  $l > \frac{n}{2}$  обладает плоскими образующими размерностей  $m \leq n-l$ , а при  $l \leq \frac{n}{2}$  — плоскими образующими размерностей  $m \leq l-1$ , мы получаем, что *в псевдоевклидовом  $n$ -пространстве индекса  $l$  при  $l > \frac{n}{2}$  имеются вполне изотропные  $m$ -плоскости размерностей  $m \leq n-l$ , а при  $l \leq \frac{n}{2}$  — вполне изотропные  $m$ -плоскости размерностей  $m \leq l-1$ .*

Углы между прямыми и плоскостями псевдоевклидова  $n$ -пространства, а также стационарные углы и длина общего перпендикуляра двух  $m$ -плоскостей этого  $n$ -пространства определяются аналогично определению этих углов и кратчайшего расстояния двух  $m$ -плоскостей евклидова  $n$ -пространства (см. 3.3.13 и 3.3.15). Заметим, что при изображении сфер конформного  $n$ -пространства точками  $(n+1)$ -сферы в псевдоевклидовом  $(n+2)$ -пространстве индекса  $n+1$   $m$ -сфера конформного  $n$ -пространства изображается сечениями  $(n+1)$ -сферы  $(n-m)$ -плоскостями, проходящими через ее центр, и стационарные углы  $m$ -сфер совпадают со стационарными углами изображающих их  $(n-m)$ -плоскостей псевдоевклидова  $(n+2)$ -пространства, так что изложенный в 11.2.2 метод определения стационарных углов  $m$ -сфер можно рассматривать как метод определения стационарных углов  $(n-m)$ -плоскостей псевдоевклидова  $(n+2)$ -пространства.