

при которых в первом случае все расстояния умножаются на положительное число λ , а во втором случае все вещественные расстояния умножаются на $i\lambda$, а мнимые расстояния умножаются на $-i\lambda$. Так же, как в случае подобий евклидова пространства (см. 4.3.1), доказывается, что *всякое подобие является произведением движения и гомотетии с коэффициентом λ , а антиподобие является произведением антидвижения и гомотетии с тем же коэффициентом.*

§ 3. Конформные преобразования и псевдоконформное пространство

12.3.1. Конформные преобразования. *Конформным преобразованием* псевдоевклидова n -пространства будем, так же как в случае евклидова пространства, называть преобразование, определяемое дифференцируемой векторной функцией $'x = f(x)$, при котором не изменяются углы между линиями. Простейшими случаями конформных преобразований являются *подобия* и, при $n = 2l$, *антиподобия*.

Так как при конформном преобразовании дифференциал вектора dx переходит в дифференциал вектора $d'x$, получаемый из дифференциала dx подобием или антиподобием, то из того, что $|dx| = 0$, следует, что $|d'x| = 0$, т. е. *конформные преобразования переводят изотропные линии в изотропные линии*.

Покажем, что на псевдоевклидовой 2-плоскости конформные преобразования переводят изотропные прямые в изотропные прямые. Так как изотропные прямые имеются только на псевдоевклидовой 2-плоскости индекса 1 (в случае плоскости индекса 2 все прямые псевдоевклидовы), рассмотрим эту плоскость. Условие $|dx| = 0$ на этой плоскости имеет вид

$$(dx^1)^2 - (dx^2)^2 = 0,$$

что равносильно дифференциальному уравнению

$$\frac{dx^2}{dx^1} = \pm 1.$$

Решением этого уравнения являются прямые, $x^2 = \pm x^1 + C$, являющиеся изотропными прямыми.

При $n \geq 3$ в псевдоевклидовом n -пространстве, так же, как в евклидовом пространстве, можно доказать теорему Лиувилля¹⁴ (см. 11.1.2), т. е. при $n \geq 3$ в псевдоевклидовом n -пространстве конформные преобразования переводят сферы в сферы и плоскости. Так как прямолинейные образующие сфер — изотропные прямые, отсюда следует, что в псевдоевклидовом n -пространстве при $n \geq 3$ конформные преобразования также переводят изотропные прямые в изотропные прямые.

12.3.2. Инверсия относительно сферы. Определим инверсию относительно сферы в псевдоевклидовом n -пространстве как преобразование, переводящее всякую точку M пространства за исключением центра M_0 сферы

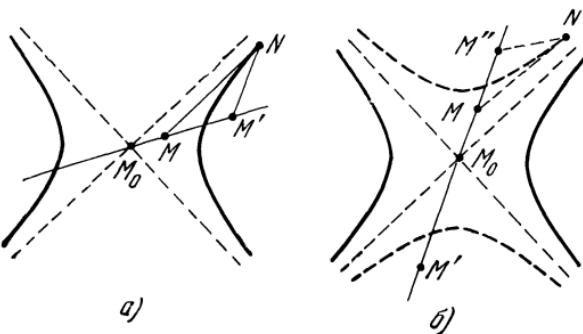


Рис. 12.8.

радиуса r в точку M' прямой M_0M , для которой (рис. 12.8)

$$\overline{M_0M} \cdot \overline{M_0M'} = r^2, \quad (12.60)$$

где $\overline{M_0M}$ и $\overline{M_0M'}$ — ориентированные длины, равные расстояниям M_0M и M_0M' , когда направления ориентированных отрезков $\overline{M_0M}$ и $\overline{M_0M'}$ совпадают с положительным направлением прямой M_0M , и отличающиеся от этих расстояний множителем -1 , когда направления этих ориентированных направлений противоположны положительному направлению прямой M_0M . В том случае,

когда прямая M_0M пересекается со сферой при $r^2 > 0$, расстояния M_0M и M_0M' вещественны, а при $r^2 < 0$ эти расстояния мнимы, поэтому при $r^2 > 0$ произведение вещественных ориентированных расстояний $\overline{M_0M}$ и $\overline{M_0M'}$ положительно, а при $r^2 < 0$ произведение мнимых ориентированных расстояний $\overline{M_0M}$ и $\overline{M_0M'}$ отрицательно. В том случае, когда прямая M_0M не пересекается со сферой, при $r^2 > 0$ расстояния M_0M и M_0M' мнимы, а при $r^2 < 0$ эти расстояния вещественны, поэтому при $r^2 > 0$ произведение мнимых ориентированных расстояний $\overline{M_0M}$ и $\overline{M_0M'}$ положительно, а при $r^2 < 0$ произведение вещественных ориентированных расстояний отрицательно. Поэтому в случае, когда прямая M_0M пересекается со сферой, точки M и M' находятся по одну сторону от M_0 , а в случае, когда прямая M_0M не пересекается со сферой, точки M и M' находятся по разные стороны от M_0 . В первом случае точка M' строится с помощью того же построения, что в евклидовом пространстве, во втором случае для построения точки M' следует построить точку M'' , в которую точка M переходит при инверсии относительно сферы с тем же центром M_0 и радиусом ir , если $r^2 > 0$, и $-ir$, если $r^2 < 0$, и точка M' получается из точки M'' отражением от точки M_0 . На рис. 12.8 изображены инверсии относительно окружности вещественного радиуса на псевдоевклидовой 2-плоскости индекса 1.

Инверсия относительно сферы

$$(x - x_0)E(x - x_0) = r^2$$

имеет вид

$$'x = x_0 + \frac{r^2}{(x - x_0)E(x - x_0)}(x - x_0). \quad (12.61)$$

В частности, при $x_0 = \mathbf{o}$ инверсия (12.61) принимает вид

$$'x = \frac{r^2}{xE} \cdot x. \quad (12.62)$$

Так как производная $\frac{d'x}{dx}$ в этом случае является оператором

$$A = \frac{r^2}{xE} \left(I - 2 \frac{x \cdot Ex}{xE} \right), \quad (12.63)$$

а оператор

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{Ex}}{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \quad (12.64)$$

удовлетворяет условию (12.42) псевдоортогональности, то оператор (12.63) является оператором подобия и инверсия в псевдоевклидовом пространстве является конформным преобразованием.

12.3.3. Псевдоконформное пространство. Инверсия (12.64) определена для всех точек псевдоевклидова пространства за исключением точки M_0 и точек изотропного конуса

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) E (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$$

с вершиной в этой точке. Поэтому при рассмотрении инверсий псевдоевклидова пространства целесообразно дополнить это пространство новыми точками, присоединение которых сделало бы инверсии взаимно однозначными преобразованиями. Но произведение двух инверсий

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_1 + \frac{r_1^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) E (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)$$

и

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}_2 + \frac{r_2^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) E (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)$$

является преобразованием

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x}_2 + \\ &+ \frac{r_2^2 [(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) E (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) + r_1^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)]}{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) E (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) E (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + 2r_1^2 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) E (\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + r_1^4}, \end{aligned} \quad (12.65)$$

переводящим точку M_1 в точку M_2 , а изотропный конус с вершиной в точке M_1 в изотропный конус с вершиной в точке M_2 . Но точка M_1 и точки конуса с вершиной в ней при первой инверсии переходят в точки, добавляемые нами для взаимной однозначности первой инверсии, а точка M_2 и точки изотропного конуса с вершиной в ней

получаются при второй инверсии из точек, добавляемых нами для взаимной однозначности второй инверсии. Поэтому добавляемые нами новые точки одни и те же для всех инверсий.

Будем называть *псевдоконформным n -пространством¹⁵ индекса l* псевдоевклидово n -пространство индекса l , дополненное конусом, точки которого можно считать образами точек изотропного конуса с вершиной в центре каждой сферы при инверсии относительно этой сферы. Будем называть добавляемый образ самого центра сферы *бесконечно удаленной точкой*, а остальные добавляемые точки — *идеальными точками¹⁶* псевдоевклидова n -пространства при его дополнении до псевдоконформного n -пространства.

Так как идеальные точки переходят при инверсиях в точки изотропного конуса, множество идеальных точек называют *идеальным конусом*; бесконечно удаленная точка играет роль вершины этого конуса.

В псевдоконформном n -пространстве, так же, как в конформном n -пространстве плоскости, m -плоскости и прямые после дополнения можно рассматривать как сферы, m -сферы и окружности, проходящие через бесконечно удаленную точку.

12.3.4. Стереографическая проекция. Покажем, что псевдоконформное n -пространство индекса l находится во взаимно однозначном и взаимно непрерывном соответствии со сферой вещественного радиуса псевдоевклидова $(n+1)$ -пространства индекса $l+1$. Такое соответствие можно установить с помощью *стереографической проекции* сферы $(n+1)$ -пространства на плоскость $(n+1)$ -пространства, аналогичную стереографической проекции в евклидовом пространстве (см. 11.1.5). Рассмотрим стереографическую проекцию сферы

$$\mathbf{x} \mathbf{E} \mathbf{x} + (x^{n+1})^2 = 1 \quad (12.66)$$

псевдоевклидова $(n+1)$ -пространства индекса $l+1$ с центром $O(0, 0)$ из ее полюса $S(0, 1)$ на экваториальную плоскость $x^{n+1} = 0$ (рис. 12.9). Так же, как в случае стереографической проекции в евклидовом пространстве,

показывается, что точка $M(x, x^{n+1})$ связана с ее проекцией $N(y, 0)$ соотношением

$$x = \frac{2y}{yEy + 1}, \quad x^{n+1} = \frac{yEy - 1}{yEy + 1}. \quad (12.67)$$

Стереографическая проекция устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и

точками сферы, из которых следует исключить точку S и другие точки пересечения сферы с плоскостью $x^{n+1} = 1$ и к которым следует добавить бесконечно удаленные точки прямолинейных образующих сферы при дополнении $(n + 1)$ -пространства до проективного $(n + 1)$ -пространства.

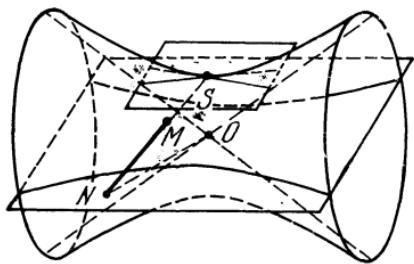


Рис. 12.9.

Так как при инверсии

$$'y = \frac{1}{yEy} y$$

на плоскости $x^{n+1} = 0$, как видно из формул (12.67), в $(n + 1)$ -пространстве происходит преобразование

$$'x = x, \quad 'x^{n+1} = -x^{n+1},$$

при котором пересечение сферы с плоскостью $x^{n+1} = -1$, являющееся проекцией конуса $yEy = 0$, переходит в пересечение сферы с плоскостью $x^{n+1} = 1$, точка S и остальные точки пересечения сферы с плоскостью $x^{n+1} = 1$ соответствуют бесконечно удаленной и идеальной точкам псевдоевклидова пространства при его дополнении до псевдоконформного пространства. При дополнении сферы бесконечно удаленными точками ее прямолинейных образующих сфера превращается в квадрику проективного $(n + 1)$ -пространства. Определенная нами стереографическая проекция сферы на плоскость определяет взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение псевдоконформного n -пространства индекса l на квадрику индекса $l + 1$ в проективном $(n + 1)$ -пространстве. Из формул (12.67) вытекает, что точка $N(y)$ псевдоконформного

n -пространства при этом изображается точкой проективного $(n+1)$ -пространства с проективными координатами

$$s^0 = \frac{1}{2} (yEy + 1), \quad s^i = y^i, \quad s^{n+1} = \frac{1}{2} (yEy - 1), \quad (12.68)$$

удовлетворяющими уравнению квадрики индекса $l+1$

$$-(s^0)^2 + sEs + (s^{n+1})^2 = 0. \quad (12.69)$$

Так же, как в случае евклидова пространства, доказывается, что *при стереографической проекции $(n-1)$ -сфера на сфере псевдоевклидова $(n+1)$ -пространства переходят в сферы псевдоконформного пространства и что при этой проекции углы между линиями сохраняются*.

Если мы поставим в соответствие каждой сфере псевдоконформного n -пространства точку проективного $(n+1)$ -пространства, являющуюся полюсом плоскости, высекающей из квадрики (12.69) изображение этой сферы, то сфере псевдоконформного пространства с центром $M_0(\mathbf{x}_0)$ и вещественным или мнимым радиусом R соответствует точка проективного $(n+1)$ -пространства с проективными координатами

$$s^0 = \frac{\mathbf{x}_0 E \mathbf{x}_0 - R^2 + 1}{2|R|}, \quad s^i = \frac{\mathbf{x}_0^i}{|R|}, \quad s^{n+1} = \frac{\mathbf{x}_0 E \mathbf{x}_0 - R^2 - 1}{2|R|}, \quad (12.70)$$

которые при вещественном и мнимом радиусе R соответственно связаны условиями

$$-(s^0)^2 + sEs + (s^{n+1})^2 = 1 \quad (12.71)$$

и

$$-(s^0)^2 + sEs + (s^{n+1})^2 = -1. \quad (12.72)$$

Координаты s^i , связанные условием (12.71) или (12.72), здесь также называются $(n+2)$ -сферическими координатами сфер. Мы получили отображение сфер вещественного и мнимого радиуса псевдоконформного n -пространства на две области проективного $(n+1)$ -пространства, на которые она делится квадрикой (12.69).

Так же, как в случае евклидова пространства, показывается, что *всякое конформное преобразование псевдоев-*

клидова n -пространства при $n \geq 3$ и всякое круговое преобразование псевдоевклидовой 2-плоскости является инверсией, подобием или антиподобием или их произведением, откуда вытекает, что всякое конформное преобразование псевдоконформного n -пространства является инверсией относительно сферы или произведением таких инверсий, а всякое круговое преобразование псевдоконформной 2-плоскости является инверсией относительно окружности или произведением таких инверсий.

Так же, как в случае конформного пространства, показывается, что угол между сферами псевдоконформного n -пространства с $(n+2)$ -сферическими координатами s^α и t^α выражается через эти координаты по формуле

$$\cos \Phi = | -s^0 t^0 + s^1 t^1 + \dots + s^{n+1} t^{n+1} |. \quad (12.73)$$

Так же, как в случае конформного n -пространства, показывается, что конформные преобразования псевдоконформного n -пространства изображаются в проективном $(n+1)$ -пространстве коллинеациями, переводящими в себя квадрику (12.69).

Если под вектором s иметь в виду не вектор $\{s^i\}$ n -пространства, а вектор $\{s^\alpha\}$ $(n+2)$ -пространства, а под оператором E — оператор $(n+2)$ -пространства, с помощью которого уравнение квадрики (12.69) записывается в виде

$$sEs = 0, \quad (12.74)$$

то конформные преобразования псевдоконформного n -пространства можно записать в виде

$$'s = Us, \quad (12.75)$$

где

$$U^T EU = E. \quad (12.76)$$

С помощью оператора E $(n+2)$ -пространства условия нормирования (12.70) и (12.71) записываются в виде

$$sEs = 1 \quad (12.77)$$

и

$$sEs = -1, \quad (12.78)$$

а формула (12.73) — в виде

$$\cos \varphi = |\mathbf{sEt}|. \quad (12.79)$$

12.3.5. Интерпретация многообразия псевдоевклидовых сфер на псевдоевклидовой сфере. Введенные нами $(n + 2)$ -сферические координаты сфер определены с точностью до умножения на -1 . Если мы будем различать ориентацию сфер, связывая ее с внешней и внутренней стороной поверхности сферы и знаком радиуса, мы установим взаимно однозначное соответствие между сферами вещественного и мнимого радиуса псевдоконформного пространства и соответственно точками $(n + 1)$ -сфер (12.77) и (12.78) в псевдоевклидовом $(n + 2)$ -пространстве. В этом случае угол φ между сферами выражается по формуле, отличающейся от формулы (12.79) тем, что в случае сфер вещественного радиуса правая часть этой формулы заменяется на sEt , а в случае сфер мнимого радиуса — на $-sEt$. Поэтому, если принять за расстояние между двумя сферами угол между ними, многообразие ориентированных сфер вещественного и мнимого радиуса псевдоконформного n -пространства индекса l изометрично ($n + 1$)-сфере соответственно радиуса 1 и i в псевдоевклидовом $(n + 2)$ -пространстве индекса $l + 1$.

12.3.6. Геометрия m -сфер. Так же, как в случае конформного n -пространства, определяются m -сфера псевдоконформного n -пространства, стационарные углы между ними, паратактические и сопряженные m -сфера (см. 11.2.2). Многообразие сфер, проходящих через m -сферу, здесь также изображается $(n - m - 1)$ -плоскостью проективного $(n + 1)$ -пространства, изображающего многообразие сфер n -пространства, полярной $(m + 1)$ -плоскости, высекающей из квадрики, изображающей псевдоконформное n -пространство, изображение m -сферы.

В отличие от конформного n -пространства, эта $(n - m - 1)$ -плоскость в случае псевдоконформного n -пространства пересекается с квадрикой и высекает из нее изображение $(n - m - 2)$ -сферы. Так как $(m + 1)$ -плоскость и $(n - m - 1)$ -плоскость, высекающие из квадрики изображения m -сферы и $(n - m - 2)$ -сферы, полярны относительно квадрики, каждая сфера, проходящая через m -сферу,

пересекается с каждой сферой, проходящей через $(n-m-2)$ -сферу под прямым углом. Поэтому будем называть эти m -сферу и $(n-m-2)$ -сферу *сопряженными* m -сферой и $(n-m-2)$ -сферой.

Инволюционная $(m+1)$ -гомология проективного $(n+1)$ -пространства, плоскостями которой являются $(m+1)$ -плоскость и $(n-m-1)$ -плоскость, высекающие из квадрики изображения сопряженных m -сферы и $(n-m-2)$ -сферы, определяет в псевдоконформном n -пространстве инволюционное конформное преобразование, которое мы будем называть *инверсией относительно m -сферы и сопряженной с ней $(n-m-2)$ -сферы*.

Стационарные углы двух m -сфер равны стационарным углам двух $(n-m)$ -плоскостей псевдоевклидова $(n+2)$ -пространства, высекающих из сферы этого пространства изображения многообразий сфер, проходящих через данные m -сфера.

§ 4. Применение двойных чисел и антикватернионов

12.4.1. Двойные числа и антикватернионы. Во многом подобны алгебрам комплексных чисел и кватернионов (см. 11.3.1) алгебры двойных чисел и антикватернионов. Алгеброй двойных чисел¹⁷ называется 2-алгебра с базисом 1, e , причем $e^2 = +1$, а алгеброй антикватернионов¹⁸ называется 4-алгебра с базисом 1, i , e , f , причем

$$i^2 = -1, \quad e^2 = 1, \quad ie = -ei = f, \quad (12.80)$$

откуда вытекает, что

$$f^2 = 1, \quad ef = -fe = -i, \quad fi = -if = e. \quad (12.81)$$

Будем записывать двойные числа в виде $a + be$, а антикватернионы — в виде $a + bi + ce + df$.

Двойные числа и антикватернионы называют также *расщепленными комплексными числами и кватернионами*.

Двойные числа образуют *коммутативное кольцо*, а антикватернионы образуют *некоммутативное кольцо*.

В алгебрах двойных чисел и антикватернионов определен переход от элемента α к сопряженному элементу $\bar{\alpha}$, имеющему соответственно вид

$$\bar{a} = a - be, \quad \bar{\alpha} = a - bi - ce - df, \quad (12.82)$$