пересекается с каждой сферой, проходящей через $(n-m-2)$-сферу под прямым углом. Поэтому будем называть эти m-сферу и $(n-m-2)$-сферу *сопряженными* m-сферой и $(n-m-2)$-сферой.

Инволюционная $(m+1)$-гомология проективного $(n+1)$-пространства, плоскостями которой являются $(m+1)$-плоскость и $(n-m-1)$-плоскость, высекающие из квадрики изображения сопряженных m-сферы и $(n-m-2)$-сферы, определяет в псевдоконформном n-пространстве инволюционное конформное преобразование, которое мы будем называть *инверсией относительно m-сферы и сопряженной с ней $(n-m-2)$-сферы.*

Стационарные углы двух m-сфер равны стационарным углам двух $(n-m)$-плоскостей псевдоевклидова $(n+2)$-пространства, высекающих из сферы этого пространства изображения многообразий сфер, проходящих через данные m-сферы.

§ 4. Применение двойных чисел и антикватернионов

12.4.1. Двойные числа и антикватернионы. Во многом подобны алгебрам комплексных чисел и кватернионов (см. **11.3.1**) алгебры *двойных чисел* и *антикватернионов. Алгеброй двойных чисел* [17] называется 2-алгебра с базисом 1, e, причем $e^2 = +1$, а *алгеброй антикватернионов* [18] называется 4-алгебра с базисом 1, i, e, f, причем

$$i^2 = -1, \quad e^2 = 1, \quad ie = -ei = f, \tag{12.80}$$

откуда вытекает, что

$$f^2 = 1, \quad ef = -fe = -i, \quad fi = -if = e. \tag{12.81}$$

Будем записывать двойные числа в виде $a + be$, а антикватернионы — в виде $a + bi + ce + df$.

Двойные числа и антикватернионы называют также *расщепленными комплексными числами* и *кватернионами.*

Двойные числа образуют *коммутативное кольцо*, а антикватернионы образуют *некоммутативное кольцо.*

В алгебрах двойных чисел и антикватернионов определен переход от элемента α к сопряженному элементу $\bar{\alpha}$, имеющему соответственно вид

$$\bar{\alpha} = a-be, \qquad \bar{\alpha} = a-bi-ce-df, \tag{12.82}$$

причем здесь, так же как в случае комплексных чисел и кватернионов, выполняются условия (11.66), самосопряженные элементы ($\alpha = \bar{\alpha}$) имеют вид $l \cdot 1$, а произведение $\alpha\bar{\alpha}$ соответственно равно

$$\alpha\bar{\alpha} = a^2 - b^2, \quad \alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2 - c^2 - d^2. \tag{12.83}$$

Можно показать, что алгебры комплексных и двойных чисел, кватернионов и антикватернионов — единственные алгебры с единицей, обладающие переходом к сопряженному элементу $\alpha \to \bar{\alpha}$, для которого выполнены свойства (11.66) и в которых самосопряженные элементы имеют вид $l \cdot 1$, а произведение $\alpha\bar{\alpha}$ является невырожденной квадратичной формой от координат элемента α.

Квадратный корень из произведения $\alpha\bar{\alpha}$, положительный, если $\alpha\bar{\alpha} > 0$, и из верхней полуплоскости комплексного переменного, если $\alpha\bar{\alpha} < 0$, называется *модулем* двойного числа или антикватерниона и обозначается $|\alpha|$. Заметим, что $|1| = |i| = 1$, $|e| = |f| = i$, так как $1 \cdot \bar{1} = i\bar{i} = 1$, $e\bar{e} = f\bar{f} = -1$. Из того, что $\alpha\beta\overline{\alpha\beta} = \alpha\beta\bar{\beta}\bar{\alpha}$, здесь следует, что

$$|\alpha\beta|^2 = |\alpha|^2 |\beta|^2. \tag{12.84}$$

Обратный элемент α^{-1} для элемента α здесь, так же как для комплексных чисел и кватернионов, имеет вид $\alpha^{-1} = \dfrac{\bar{\alpha}}{|\alpha|}$. Элементы, для которых $\alpha\bar{\alpha} = 0$, не имеют обратных элементов и в случае, когда $\alpha \neq 0$, являются делителями нуля. Двойные числа

$$e_+ = \frac{1+e}{2}, \quad e_- = \frac{1-e}{2} \tag{12.85}$$

обладают свойствами

$$e_+^2 = e_+, \quad e_-^2 = e_-, \quad e_+e_- = 0. \tag{12.86}$$

Поэтому, если мы запишем двойное число α в виде $\alpha = Ae_+ + Be_-$, то

$$\alpha + \beta = (Ae_+ + Be_-) + (Ce_+ + De_-) = (A + C)e_+ + (B + D)e_-, \tag{12.87}$$

$$\alpha\beta = (Ae_+ + Be_-)(Ce_+ + De_-) = ACe_+ + BDe_-. \tag{12.88}$$

Формулы (12.87) и (12.88) показывают, что каждому двойному числу α ставится во взаимно однозначное соответствие два вещественных числа A и B, причем сумме и произведению двух двойных чисел соответствуют сумма и произведение соответственных вещественных чисел. Поэтому говорят, что *алгебра двойных чисел изоморфна прямой сумме двух полей вещественных чисел*, чем и объясняется название «расщепленные комплексные числа».

Нетрудно проверить также, что

$$\bar{\alpha} = (A\bar{e}_+ + B\bar{e}_-) = Be_+ + Ae_-, \quad \alpha\bar{\alpha} = AB, \tag{12.89}$$

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{Ae_+ + Be_-} = \frac{1}{A}e_+ + \frac{1}{B}e_-, \tag{12.90}$$

$$\alpha\beta^{-1} = \frac{Ae_+ + Be_-}{Ce_+ + De_-} = \frac{A}{C}e_+ + \frac{B}{D}e_-. \tag{12.91}$$

Алгебра антикватернионов изоморфна полному кольцу квадратных операторов 2-пространства, так как если мы поставим в соответствие антикватерниону $\alpha = a + bi + ce + dj$ оператор

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+d & b+c \\ -b+c & a-d \end{pmatrix}, \tag{12.92}$$

это соответствие взаимно однозначно и, как легко проверить, сумме и произведению антикватернионов соответствует сумма и разность операторов.

Нетрудно проверить, что сопряженному антикватерниону соответствует оператор

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a-d & -b-c \\ b-c & a+d \end{pmatrix}, \tag{12.93}$$

а произведению $\alpha\bar{\alpha}$ соответствует произведение единичного оператора на определитель матрицы оператора $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\cdot\mathbf{I} = |\mathbf{A}|\cdot\mathbf{I}. \tag{12.94}$$

12.4.2. Плоскость двойного переменного и пространство антикватернионов. Если мы примем за расстояние между двумя двойными числами или антикватернионами α и β модуль $|\beta - \alpha|$ их разности, мы превратим ал-

гебру двойных чисел в *псевдоевклидову 2-плоскость* индекса 1, называемую *плоскостью двойного переменного*, а алгебру антикватернионов — в *псевдоевклидово 4-пространство индекса 2*, называемое *пространством антикватернионов*.

При определенном нами расстоянии между двумя элементами алгебр двойных чисел и антикватернионов скалярное произведение элементов α и β, рассматриваемых как псевдоевклидовы векторы, имеет тот же вид (11.70), что и в случае комплексных чисел и кватернионов. Определение скалярного произведения (α, β) позволяет определить углы между элементами, рассматриваемые как векторы, по формуле $\cos\varphi = \frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|}$. При этом определении элементы 1, i, e, f, рассматриваемые как векторы,

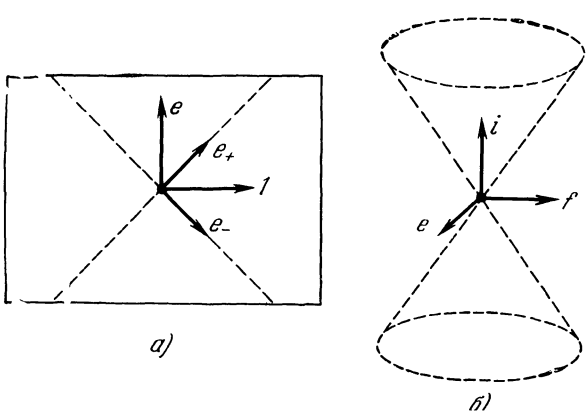

Рис. 12.10.

взаимно перпендикулярны, так как, например,

$$(1, e) = \frac{1}{2}(e + \bar{e}) = \frac{1}{2}(e - e) = 0,$$
$$(i, e) = \frac{1}{2}(i\bar{e} - e\bar{i}) = \frac{1}{2}(-f + f) = 0.$$

На рис. 12.10, *а* изображены двойные числа 1, e, e_+ и e_- и все двойные числа, являющиеся делителями нуля, на

рис. 12.10, *б* изображены антикватернионы i, e, f и все делители нуля вида $bi + ce + df$.

Так же, как в случае комплексных чисел и кватернионов, преобразование

$$'\xi = \xi + \beta \tag{12.95}$$

является переносом на вектор β, а преобразование

$$'\xi = \alpha\xi, \tag{12.96}$$

где $\alpha = \bar{\alpha}$, является гомотетией с центром 0 и коэффициентом α и на плоскости двойного переменного и в пространстве антикватернионов.

12.4.3. Повороты и антиповороты. Двойное число единичного модуля имеет вид

$$\alpha = \operatorname{ch}\varphi + e \operatorname{sh}\varphi \tag{12.97}$$

или

$$\alpha = -\operatorname{ch}\varphi - e \operatorname{sh}\varphi, \tag{12.98}$$

и преобразование (12.96), где $|\alpha| = 1$, в случае двойных чисел является *поворотом* соответственно на угол $i\varphi$ и на угол $\pi - i\varphi$.

Двойное число мнимоединичного модуля имеет вид

$$\alpha = \operatorname{sh}\varphi + e \operatorname{ch}\varphi \tag{12.99}$$

или

$$\alpha = -\operatorname{sh}\varphi - e \operatorname{ch}\varphi, \tag{12.100}$$

и преобразование (12.96), где $|\alpha| = i$, переводит двойное число ξ вещественного модуля $|\xi|$ в число мнимого модуля $i|\xi|$, а число ξ мнимого модуля $|\xi|$ в число вещественного модуля $-i|\xi|$, т. е. является *антивращением*. Так как угол между векторами ξ и $\alpha\xi$ соответственно равен $\frac{\pi}{2} - i\varphi$ и $\frac{\pi}{2} + i\varphi$, преобразование (12.96) при $|\alpha| = i$ в случае двойных чисел является *антиповоротом* соответственно на угол $\frac{\pi}{2} - i\varphi$ и $\frac{\pi}{2} + i\varphi$. Преобразование $'\xi = e\xi$ представляет собой *антиповорот на прямой угол.*

Антикватернион единичного модуля можно записать в виде

$$\alpha = \cos\varphi + \alpha_0 \sin\varphi, \tag{12.101}$$

$$\alpha = \operatorname{ch}\varphi + \alpha_0 \operatorname{sh}\varphi \tag{12.102}$$

или

$$\alpha = -\operatorname{ch}\varphi + \alpha_0 \operatorname{sh}\varphi, \tag{12.103}$$

где $\alpha_0 = -\bar{\alpha}_0$, причем в первом случае $|\alpha_0| = 1$, а во втором и третьем случаях $|\alpha_0| = i$. Антикватернион мнимоединичного модуля можно записать в виде

$$\alpha = \operatorname{sh}\varphi + \alpha_0 \operatorname{ch}\varphi \tag{12.104}$$

или

$$\alpha = -\operatorname{sh}\varphi - \alpha_0 \operatorname{ch}\varphi, \tag{12.105}$$

где $|\alpha_0| = i$. Преобразования (12.96) и

$$'\xi = \xi\alpha \tag{12.106}$$

в случае антикватернионов при $|\alpha|^2 = \pm 1$ являются центроаффинными преобразованиями, которые при $|\alpha| = 1$ в силу равенства $|'\xi| = |\alpha||\xi| = |\xi|$ являются *вращениями*, а при $|\alpha| = i$ в силу равенства $|'\xi|^2 = |\alpha|^2|\xi|^2 = -|\xi|^2$ являются *антивращениями*. Так же, как в случае кватернионов, показывается, что эти преобразования обладают тем свойством, что угол между элементами ξ и $'\xi$ не зависит от элемента α. Поэтому антикватернионные преобразования (12.96) и (12.106) являются при $|\alpha| = 1$ *паратактическими поворотами* 4-пространства на угол φ, $i\varphi$ и $\pi - i\varphi$ в соответствии с тем, имеет ли элемент α вид (12.101), (12.102) или (12.103), а при $|\alpha| = i$ — *паратактическими антиповоротами* на угол $\frac{\pi}{2} - i\varphi$ и $\frac{\pi}{2} + i\varphi$ в соответствии с тем, имеет ли элемент α вид (12.104) или (12.105). Преобразование

$$'\xi = \bar{\xi} \tag{12.107}$$

здесь также в обоих случаях является отражением от вещественной оси.

12.4.4. Движения, антидвижения, подобия и антиподобия. Так же, как для комплексных чисел, доказывается, что преобразования

$$'\xi = \alpha\xi + \beta \tag{12.108}$$

и

$$'\xi = \alpha\bar{\xi} + \beta \tag{12.109}$$

в случае двойных чисел при $|\alpha| = 1$ являются соответственно *движениями первого и второго рода псевдоевклидовой 2-плоскости индекса* 1 и *что всякое движение первого и второго рода этой 2-плоскости представляется соответственно* в виде (12.108) и (12.109) при $|\alpha| = 1$. В случае, когда $|\alpha| = i$, преобразования (12.108) и (12.109) являются *антидвижениями*. В случае, когда $\alpha\bar{\alpha} > 0$, эти преобразования являются произведениями движений на гомотетию (12.96) при $\alpha = \bar{\alpha}$, т. е. *подобиями*. В случае, когда $\alpha\bar{\alpha} < 0$, они являются произведениями антидвижений на гомотетию, т. е. *антиподобиями*.

Так же, как для кватернионов, доказывается, что преобразования

$$'\xi = \alpha\xi\beta + \gamma \tag{12.110}$$

и

$$'\xi = \alpha\bar{\xi}\beta + \gamma \tag{12.111}$$

в случае антикватернионов при $|\alpha| = |\beta| = 1$ и $|\alpha| = |\beta| = i$ являются соответственно *движениями первого и второго рода псевдоевклидова 4-пространства индекса* 2 и что *всякое движение первого и второго рода этого 4-пространства представляется соответственно в виде* (12.110) и (12.111) *при* $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = \pm 1$. В случае, когда $|\alpha|^2 = -|\beta|^2 = \pm 1$, преобразования (12.110) и (12.111) являются *антидвижениями*. В случае, когда $\alpha\bar{\alpha}\cdot\beta\bar{\beta} > 0$, эти преобразования являются произведениями движений на гомотетию, т. е. *подобиями*, а в случае, когда $\alpha\bar{\alpha}\cdot\beta\bar{\beta} < 0$, они являются произведениями антидвижений на гомотетию, т. е. *антиподобиями*.

Так же, как для кватернионов, доказывается, что

$$'\xi = \alpha^{-1}\xi\alpha + \beta \quad (\xi = -\bar{\xi}) \tag{12.112}$$

и

$$'\xi = -\alpha^{-1}\xi\alpha + \beta \quad (\xi = -\bar{\xi}) \tag{12.113}$$

в случае антикватернионов являются *движениями первого и второго рода псевдоевклидова 3-пространства индекса 1 и что всякое движение первого и второго рода этого 3-пространства представляется соответственно в виде* (12.112) *и* (12.113).

12.4.5. Круговые преобразования 2-плоскости и конформные преобразования 4-пространства. Инверсия (12.61) относительно окружности псевдоевклидовой 2-плоскости индекса 1 и сферы $|\xi - \xi_0| = R$ псевдоевклидова 4-пространства индекса 2 может быть записана с помощью двойных чисел или антикватернионов в виде

$$'\xi = \xi_0 + R^2 (\bar{\xi} - \bar{\xi}_0)^{-1}. \qquad (12.114)$$

Если мы запишем уравнение окружности или сферы в виде

$$a\xi\bar{\xi} + \beta\bar{\xi} + \xi\bar{\beta} + c = 0, \qquad (12.115)$$

то, так же как в случае комплексных чисел и кватернионов, показывается, что инверсия (12.114) может быть записана в виде

$$'\xi = (-\beta\bar{\xi} - c)(a\bar{\xi} + \bar{\beta})^{-1}. \qquad (12.116)$$

Если мы дополним 2-плоскость двойного переменного и 4-пространство антикватернионов бесконечно удаленной и идеальными точками, дополняющими псевдоевклидовы 2-плоскость и 4-пространство до псевдоконформных 2-плоскости и 4-пространства, мы получим расширенную плоскость двойного переменного и расширенное пространство антикватернионов, на которых инверсии (12.114) и (12.116) являются взаимно однозначными преобразованиями. В случае 2-плоскости двойного переменного роль идеального конуса играют две *идеальные прямые*, пересекающиеся в бесконечно удаленной точке и переходящие при инверсиях в пары изотропных прямых.

Подобия и антиподобия (12.108) и (12.109) на 2-плоскости и (12.110) и (12.111) в 4-пространстве и инверсии (12.116) являются частными случаями дробно-линейных преобразований

$$'\xi = (\alpha\xi + \beta)(\gamma\xi + \delta)^{-1} \qquad (12.117)$$

и

$$'\xi = (\alpha\bar{\xi} + \beta)(\gamma\bar{\xi} + \delta)^{-1}. \qquad (12.118)$$

Так же, как в случае комплексных чисел и кватернионов, показывается, что преобразование (12.117), у которого γ — не делитель нуля, является произведением преобразований

$$'\xi = \alpha\gamma^{-1} + (\beta - \alpha\gamma^{-1}\delta)\,\xi_1,\ \xi_1 = \bar{\xi}_2^{-1},\ \xi_2 = \bar{\xi}\gamma + \bar{\delta},$$

первое и третье из которых являются подобием или антиподобием, а второе — инверсией. Преобразование (12.118), у которого γ — не делитель нуля, является произведением этих преобразований на отражение от прямой $'\xi = \bar{\xi}$. Поэтому преобразования (12.117) и (12.118), у которых γ — не делитель нуля, являются круговыми преобразованиями 2-плоскости и конформными преобразованиями 4-пространства. Так как преобразования (12.117) и (12.118), у которых γ — делитель нуля, могут быть получены предельным переходом из преобразования, у которого γ — не делитель нуля, а пределом преобразований, сохраняющих углы между линиями, являются преобразования, обладающие тем же свойством, преобразования (12.117) и (12.118), у которых γ — делитель нуля, также являются круговыми преобразованиями 2-плоскости и конформными преобразованиями 4-пространства. Из того, что всякое круговое преобразование псевдоконформной 2-плоскости и всякое конформное преобразование псевдоконформного 4-пространства являются инверсией, подобием или антиподобием или их произведением, следует, что *всякое круговое преобразование 2-плоскости двойного переменного и всякое конформное преобразование 4-пространства антикватернионов представляется в виде* (12.117) *или* (12.118).

В случае двойных чисел и антикватернионов можно, так же как в случае комплексных чисел и кватернионов, определить двойные и антикватернионные линейные n-пространства и линейные операторы в этих пространствах и показать, что группы дробно-линейных преобразований (12.117) изоморфны фактор-группам групп операторов, соответственно, двойного или антикватернионного

2-пространств по некоторым фактор-группам. Однако в силу изоморфизма алгебры двойных чисел прямой сумме двух полей вещественных чисел, а алгебры антикватернионов — кольцу квадратных операторов вещественного 2-пространства, аналогичные теоремы могут быть сформулированы без введения этих новых понятий.

Если мы запишем коэффициенты двойного дробно-линейного преобразования (12.117) в виде $\alpha = A_+e_+ + A_-e_-$, $\beta = B_+e_+ + B_-e_-$, $\gamma = C_+e_+ + C_-e_-$, $\delta = D_+e_+ + D_-e_-$ и поставим в соответствие этому преобразованию два оператора вещественного 2-пространства

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_+ & B_+ \\ C_+ & D_+ \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} A_- & B_- \\ C_- & D_- \end{pmatrix}, \tag{12.119}$$

то произведению дробно-линейных преобразований соответствуют произведения соответственных операторов. Поэтому группа круговых преобразований (12.117) гомоморфна прямому произведению двух групп обратимых операторов вещественного 2-пространства. Так как при умножении двойных чисел α, β, γ, δ на произвольное двойное число $ke_+ + le_-$, операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ умножаются на произвольные вещественные числа, а дробно-линейное преобразование не изменяется, ядром гомоморфизма является группа, состоящая из пар операторов ($k\mathbf{I}$, $l\mathbf{I}$). Поэтому *группа круговых преобразований* (12.117) *изоморфна фактор-группе прямого произведения двух групп операторов 2-пространства по ее подгруппе, состоящей из пар операторов* ($k\mathbf{I}$, $l\mathbf{I}$). Ограничиваясь в обеих группах парами операторов, определители матриц которых равны ± 1, мы сводим пары операторов к четырем парам $(\mathbf{I}, \mathbf{I})$, $(\mathbf{I}, -\mathbf{I})$, $(-\mathbf{I}, \mathbf{I})$, $(-\mathbf{I}, -\mathbf{I})$. Поэтому *группа круговых преобразований* (12.117) *изоморфна фактор-группе прямого произведения двух групп операторов 2-пространства, определители матриц которых равны* ± 1, *по ее подгруппе, состоящей из пар операторов* $(\mathbf{I}, \mathbf{I})$, $(\mathbf{I}, -\mathbf{I})$, $(-\mathbf{I}, \mathbf{I})$, $(-\mathbf{I}, -\mathbf{I})$. Эта группа зависит от 6 вещественных параметров.

Если мы заменим в дробно-линейном преобразовании (12.117) антикватернионы ξ и $'\xi$ представляющими их операторами $\overline{\mathbf{X}}$ и $'\overline{\mathbf{X}}$ 2-пространства, а антикватернионы

α, β, γ, δ — представляющими их операторами $\mathbf{A}_0^0$, $\mathbf{A}_0^1$, $\mathbf{A}_1^0$, $\mathbf{A}_1^1$ комплексного 2-пространства, то мы получим преобразование (9.86), изображающее коллинеацию 3-пространства в аффинных операторных координатах прямых этого пространства. Поэтому *группа конформных преобразований 4-пространства* (12.117) *изоморфна группе коллинеаций проективного 3-пространства и, следовательно, эта группа изоморфна фактор-группе группы операторов 4-пространства, определители матриц которых равны* 1, *по ее подгруппе, состоящей из операторов* **I** и $-\mathbf{I}$. Эта группа зависит от 15 вещественных параметров.

12.4.6. Двойное отношение четырех двойных чисел или антикватернионов. Будем называть *двойным отношением* $\overline{\xi_1\xi_2,\ \xi_3\ \xi_4}$ четырех двойных чисел или антикватернионов соответственно двойное число или антикватернион

$$\omega = \overline{\xi_1\xi_2,\ \xi_3\xi_4} = (\xi_3 - \xi_1)^{-1}(\xi_3 - \xi_2)(\xi_4 - \xi_2)^{-1}(\xi_4 - \xi_1). \tag{12.120}$$

Так же, как для комплексных чисел и кватернионов, доказывается, что *при произвольном преобразовании* (12.117) *двойное отношение* ω *в случае двойных чисел не изменяется, а в случае антикватернионов подвергается преобразованию*

$$'\omega = \rho^{-1}\omega\rho, \tag{12.121}$$

при преобразованиях (12.118) *двойное отношение* ω *в случае двойных чисел переходит в сопряженное число* $\overline{\omega}$, *а в случае антикватернионов подвергается преобразованию*

$$'\omega = \rho^{-1}\overline{\omega}\,\rho. \tag{12.122}$$

Если мы запишем антикватернионное двойное отношение ω в виде $\omega_0 + \omega_1$ где $\omega_0 = \overline{\omega}_0$, $\omega_1 = -\overline{\omega}_1$, то при преобразованиях (12.121) и (12.122) слагаемое ω_0 не изменяется, а слагаемое ω_1 в случаях, когда модуль двойного числа ω_1 вещественен, мним и равен нулю, преобразованиями (12.121) и (12.122) всегда можно привести соответственно к виду $i|\,\omega_1\,|$, $f\|\omega_1\|$ и $i + f\,(\|\omega_1\|$ —веществен-

ный модуль мнимого числа $|\omega_1|$). Действительно, преобразования (12.121) и (12.122) являются частными случаями преобразований (12.112) и (12.113) при $\beta = 0$, т. е. представляют собой вращения 3-пространства антикватернионов вида $bi + ce + df$, а вращением этого 3-пространства можно направление любого вектора вещественного или мнимого модуля совместить соответственно с направлением вектора i или f, а любой изотропный вектор можно совместить с вектором $i + f$. С другой стороны, если мы запишем двойное число ω в виде $\omega_0 + e\omega_1$, то в случае, когда $\omega_1 < 0$, преобразованием $'\omega = \bar{\omega}$ можно привести его к виду $\omega_0 + e|\omega_1|$. Поэтому четыре двойных числа или антикватерниона ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 обладают при дробно-линейных преобразованиях (12.117) и (12.118) двумя вещественными инвариантами ω_0 и $|\omega_1|$ или $\|\omega_1\|$. В случае, когда $\omega_1 = 0$, четыре точки, так же как в случае пространства кватернионов, лежат на одной окружности псевдоконформного 4-пространства.

12.4.7. Сопряженные пары точек 2-плоскости. Так как пары точек псевдоконформной 2-плоскости являются частным случаем m-сфер при $m = 0$, а каждой m-сфере псевдоконформного n-пространства соответствует сопряженная с ней $(n—m—2)$-сфера, то на псевдоконформной 2-плоскости каждой паре точек соответствует *сопряженная* с ней пара точек. Так как сопряженные m-сфера и $(n—m—2)$-сфера изображаются в проективном $(n + 1)$- пространстве полярными $(m + 1)$-плоскостью и $(n—m—n)$-плоскостью, высекающими из квадрики, изображающей псевдоконформное n-пространство, изображения этих m-сферы и $(n—m—n)$-сферы, то сопряженные пары точек псевдоконформной 2-плоскости изображаются двумя полярными прямыми проективного 3-пространства, высекающими из квадрики изображения этих пар точек. Заметим, что если мы выберем за базисные точки 3-пространства точки E_0, E_1 и E_2, E_3 пересечения квадрики с этими прямыми, уравнение квадрики примет вид (9.125) и, следовательно, прямые E_0E_2, E_0E_3, E_1E_2, E_1E_3 — прямолинейные образующие квадрики (см. рис. 9.30,*б*).

Поэтому сопряженные пары точек псевдоконформной 2-плоскости изображаются на 2-плоскости двойного

переменного такими двойными числами, что если первая пара точек изображается числами

$$\alpha = Ae_+ + Be_-, \quad \beta = Ce_+ + De_-,$$

то вторая пара точек изображается числами

$$\gamma = Ae_+ + De_- \text{ и } \delta = Ce_+ + Be_-.$$

Эти четыре двойных числа изображены на рис. 12.11. Заметим, что если двойные числа α и β являются корнями квадратного уравнения, то двойные числа γ и δ также являются корнями этого уравнения: в области двойных чисел квадратный корень из положительного числа a^2 имеет четыре значения a, $-a$, ea и $-ea$ и квадратное уравнение

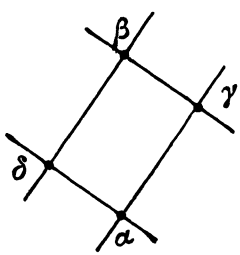

Рис. 12.11.

$$\xi^2 - (\alpha + \beta)\xi + \alpha\beta = 0,$$

корнями которого являются α и β, имеет четыре решения

$$\frac{(\alpha+\beta) \pm (\alpha-\beta)}{2} = \begin{cases} \alpha, \\ \beta, \end{cases} \qquad \frac{\alpha+\beta \pm e(\alpha-\beta)}{2} = \begin{cases} \alpha e_+ + \beta e_- = \gamma, \\ \beta e_+ + \alpha e_- = \delta. \end{cases}$$

12.4.8. Конформные преобразования псевдоевклидовой 2-плоскости. На плоскости двойного переменного, так же как на плоскости комплексного переменного, можно определить *аналитические функции*, которые мы определим как функции двойного переменного, представляемые с помощью степенных рядов

$$'\xi = \varphi(\xi) = \sum_k \alpha_k \xi^k. \tag{12.123}$$

Если мы положим

$$\xi = Xe_+ + Ye_-, \quad '\xi = 'Xe_+ + 'Ye_-, \quad \alpha_k = A_k e_+ + B_k e_-,$$

то в силу (12.86) ряд (12.122) можно записать в виде

$$\sum_k \alpha_k \xi^k = \left(\sum_k A_k X^k\right) e_+ + \left(\sum_k B_k Y^k\right) e_-.$$

Поэтому если мы запишем произвольную функцию двойного переменного $'\xi = \varphi(\xi)$ в виде

$$'\xi = 'Xe_+ + 'Ye_- = F(X, Y)\,e_+ + G(X, Y)\,e_-,$$

то в случае аналитической функции (12.123) функция $F(X, Y)$ зависит только от X, а функция $G(X, Y)$ — только от Y, т. е.

$$\frac{\partial F}{\partial Y} = \frac{\partial G}{\partial X} = 0, \tag{12.124}$$

и мы можем записать эти функции в виде

$$F(X) = \sum_k A_k X^k, \quad G(Y) = \sum_k B_k Y^k.$$

Эти функции являются аналитическими функциями вещественного переменного.

Если мы введем обозначение

$$\xi = x + ey, \quad '\xi = u + ev,$$

то

$$x = X + Y, \; y = X - Y \text{ и } u = 'X + 'Y, \; v = 'X - 'Y.$$

Из общей формулы дифференциального исчисления

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial t}\frac{\partial}{\partial Y}$$

следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial (X+Y)} = \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial Y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial (X-Y)} = \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial Y}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial ('X + 'Y)}{\partial X} + \frac{\partial ('X + 'Y)}{\partial Y} = \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial G}{\partial Y} =$$

$$= \frac{\partial ('X - 'Y)}{\partial X} - \frac{\partial ('X - 'Y)}{\partial Y} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial ('X + 'Y)}{\partial X} - \frac{\partial ('X + 'Y)}{\partial Y} = \frac{\partial F}{\partial X} - \frac{\partial G}{\partial Y} =$$

$$= \frac{\partial ('X - 'Y)}{\partial X} + \frac{\partial ('X - 'Y)}{\partial Y} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{12.125}$$

Нетрудно доказать и обратное—из условий (12.125) вывести условия (12.124) аналитичности функции $\varphi(\xi)$. Условия (12.125) аналогичны условиям Коши—Римана аналитичности функции комплексного переменного [19], от которых они отличаются только знаком перед $\frac{\partial v}{\partial x}$.

Частными случаями аналитических функций являются функции, у которых все коэффициенты α_k вещественны, и, следовательно, $A_k = B_k$. Такую функцию можно записать в виде

$$'\xi = F(\xi) = F(X)\, e_+ + F(Y)\, e_-.$$

В частности, если мы будем здесь обозначать функцию e^x, где e — основание натуральных логарифмов, через $\exp x$, так как в этой главе e — обозначение двойной единицы, то

$$\exp \xi = \exp(Xe_+ + Ye_-) = e_+ \exp X + e_- \exp Y =$$

$$= \frac{1+e}{2} \exp X + \frac{1-e}{2} \exp Y =$$

$$= \frac{1}{2}(\exp X + \exp Y) + \frac{e}{2}(\exp X - \exp Y). \quad (12.126)$$

В частности, если $Y = -X$,

$$\exp[X(e_+ - e_-)] = \exp(eX) = \operatorname{ch} X + e \operatorname{sh} X. \quad (12.127)$$

Поэтому двойные числа единичного и мнимоединичного модуля можно записать не только в «тригонометрической форме» (12.97) — (12.100), но и в «показательной форме», имеющей соответственно вид

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = \exp(e\varphi), & \alpha = -\exp(e\varphi), \\ \alpha = e \cdot \exp(e\varphi), & \alpha = -e \cdot \exp(e\varphi). \end{array}\right\} \quad (12.128)$$

Аналитические функции двойного переменного можно дифференцировать, причем производная функции (12.122) имеет вид

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{dF}{dX} e_+ + \frac{dG}{dY} e_-. \quad (12.129)$$

Преобразования плоскости двойного переменного вида

$$'\xi = \varphi(\xi) \text{ и } '\xi = \overline{\varphi(\xi)},$$

где $\varphi(\xi)$ — аналитическая функция, являются конформными преобразованиями, так как в этих случаях преобразования

$$d'\xi = \frac{d\varphi}{d\xi} d\xi \quad \text{и} \quad d'\xi = \frac{\overline{d\varphi}}{d\xi} \overline{d\xi}$$

являются подобиями или антиподобиями.

Формула (12.124) показывает, что при преобразованиях $'\xi = \varphi(\xi)$, где $\varphi(\xi)$ — аналитическая функция, изотропные прямые плоскости двойного переменного вида $X = \text{const}$ и вида $Y = \text{const}$ переходят в изотропные прямые того же вида, откуда следует, что при преобразованиях $'\xi = \overline{\varphi(\xi)}$ изотропные прямые одного вида переходят в изотропные прямые другого вида.

12.4.9. Спинорные представления вращений 3-пространства. В силу изоморфизма алгебры антикватернионов и кольца квадратных операторов вещественного 2-пространства формула (12.112) при $\beta = 0$ показывает, что *связная группа вращений псевдоевклидова* 3-*пространства индекса* 1, а следовательно, *и изоморфная ей группа вращений псевдоевклидова* 3-*пространства индекса* 2 *гомоморфны группе операторов вещественного* 2-*пространства, определители матриц которых равны* 1, причем каждому вращению соответствуют два оператора **A** и —**A**, т. е. ядро гомоморфизма состоит из операторов **I** и —**I**. Поэтому *связная группа вращений псевдоевклидова* 3-*пространства индекса* 2 *изоморфна фактор-группе группы операторов* 2-*пространства, определители матриц которых равны* 1, *по ее подгруппе, состоящей из операторов* **I** *и* —**I**. Будем называть *спинорами* псевдоевклидовых 3-пространств векторы 2-пространства, операторы которого представляют антикватернионы, а представление вращений псевдоевклидова 3-пространства операторами этого 2-пространства будем называть *спинорным представлением.*

В том случае, когда антикватернион α имеет один из трех видов

$$\alpha = \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \alpha = \operatorname{ch}\frac{\varphi}{2} + e\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2}, \quad \alpha = 1 + \frac{t}{2}(i+e),$$

к которым его можно привести преобразованием $'\xi = \rho^{-1}\xi\rho$, оператор $\mathbf{A}$, представляющий этот антикватернион, имеет соответственно вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}, \tag{12.130}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \exp\frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix}, \tag{12.131}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{12.132}$$

Заметим, что всякий оператор 2-пространства, определитель матрицы которого равен 1, может быть приведен изменением базиса и умножением на -1 к одному из трех видов (12.130) — (12.132): матрица такого оператора имеет два различных вещественных, два мнимо сопряженных или два равных собственных числа. Так как определитель матрицы равен 1, ее собственные числа взаимно обратны. Поэтому в первом случае эти собственные числа можно считать положительными и записать в виде $\exp\varphi$ и $\exp(-\varphi)$, во втором случае их можно записать в виде $\exp(i\varphi)$ и $\exp(-i\varphi)$, а в третьем случае их можно считать равными 1; во втором случае матрицу можно привести к вещественному виду (12.130), а в третьем случае, предполагая, что оператор не единичный, матрица имеет вид (12.132). В этом случае антикватернион $\xi = -\overline{\xi}$ может быть записан в виде $x^1 i + x^2 e + x^3 f$ и представляется оператором

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 + x^2 \\ -x^1 + x^2 & -x^3 \end{pmatrix};$$

преобразование (12.112) в этом случае может быть

записано соответственно в виде

$$'\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & -\sin\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 & x^1 + x^2 \\ -x^1 + x^2 & -x^3 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -x^1 \sin\varphi + x^3\cos\varphi & x^1 + x^2\cos\varphi + x^3\sin\varphi \\ -x^1 + x^2\cos\varphi + x^3\sin\varphi & x^2\sin\varphi - x^3\cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$'\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \exp\left(-\frac{\varphi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 & x^1 + x^2 \\ -x^1 + x^2 & -x^3 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \exp\frac{\varphi}{2} & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^3 & (x^1 + x^2)\exp(-\varphi) \\ (-x^1 + x^2)\exp\varphi & -x^3 \end{pmatrix},$$

$$'\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 & x^1 + x^2 \\ -x^1 + x^2 & -x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} tx^1 - tx^2 + x^3 & (t^2+1)x^1 + (-t^2+1)x^2 + 2tx^3 \\ -x^1 + x^2 & -tx^1 + tx^2 - x^3 \end{pmatrix},$$

равносильном соответственно вращению с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & \mathbf{U}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi & 0 \\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} & -\frac{t^2}{2} & t \\ \frac{t^2}{2} & 1 - \frac{t^2}{2} & t \\ t & -t & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. с одной из матриц (12.53).

12.4.10. Спинорные представления вращений 4-пространства. Доказанный нами изоморфизм групп конформных преобразований n-пространств группам вращений псевдоевклидовых $(n+2)$-пространств имеет место и при $n=2$, где роль конформных преобразований играют круговые преобразования 2-плоскостей. Поэтому группы вращений псевдоевклидовых 4-пространств индексов 3 и 2 изоморфны группам дробно-линейных преобразований соответственно на плоскостях комплексного и двойного переменного.

В случае $n=2$ формулы (11.21) и (12.68) можно переписать в виде

$$s^0=\frac{1}{2}(\xi\bar{\xi}+1),\quad s^1=\xi^1,\quad s^2=\xi^2,\quad s^3=\frac{1}{2}(\xi\bar{\xi}-1)$$

или

$$\left.\begin{aligned} s^0&=\frac{1}{2}(\xi\bar{\xi}-1),\quad s^1=\frac{1}{2}(\xi+\bar{\xi}),\\ s^2&=\frac{1}{2\theta}(\xi-\bar{\xi}),\quad s^3=\frac{1}{2}(\xi\bar{\xi}-1),\end{aligned}\right\}\qquad(12.133)$$

где в первом случае $\theta=i$, а во втором случае $\theta=e$. Так как координаты s^α вектора $\mathbf{s}$ удовлетворяют условию (12.69), вектор $\mathbf{s}$ является изотропным вектором псевдоевклидова 4-пространства.

Перейдем от комплексных или двойных чисел ξ к однородным координатам ξ^0, ξ^1, связанным с ξ соотношением $\xi=\frac{\xi^0}{\xi^1}$. В этом случае, умножая правые части равенств (12.133) на $\frac{1}{2}\xi^1\bar{\xi}^1$, мы получим выражение координат s^α через ξ^0 и ξ^1 в виде

$$\left.\begin{aligned} s^0&=\xi^0\bar{\xi}^0+\xi^1\bar{\xi}^1,\qquad s^1=\xi^0\bar{\xi}^1+\xi^1\bar{\xi}^0,\\ s^2&=\frac{1}{\theta}(\xi^0\bar{\xi}^1-\xi^1\bar{\xi}^0),\quad s^3=\xi^0\bar{\xi}^0-\xi^1\bar{\xi}^1.\end{aligned}\right\}\qquad(12.134)$$

Дробно-линейные преобразования (11.98) и (12.119) можно переписать в координатах ξ^0, ξ^1 в виде

$$'\xi^0=\alpha\xi^0+\beta\xi^1,\quad '\xi^1=\gamma\xi^0+\delta\xi^1.\qquad(12.135)$$

При преобразованиях (12.135) координаты (12.134) преобразуются по закону

$$
\left.
\begin{aligned}
{}'s^0 &= \tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}+\gamma\bar{\gamma}+\delta\bar{\delta})\,s^0+\tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\alpha}+\\
&\quad+\gamma\bar{\delta}+\delta\bar{\gamma})\,s^1+\tfrac{\theta}{2}(\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha}-\gamma\bar{\delta}+\delta\bar{\gamma})\,s^2+\\
&\qquad+\tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha}-\beta\bar{\beta}+\gamma\bar{\gamma}-\delta\bar{\delta})\,s^3,\\
{}'s^1 &= \tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\gamma}+\gamma\bar{\alpha}+\beta\bar{\delta}+\delta\bar{\beta})\,s^0+\tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\delta}+\delta\bar{\alpha}+\\
&\quad+\beta\bar{\gamma}+\gamma\bar{\beta})\,s^1+\tfrac{\theta}{2}(\alpha\bar{\delta}-\delta\bar{\alpha}-\beta\bar{\gamma}+\gamma\bar{\beta})\,s^2+\\
&\qquad+\tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\gamma}+\gamma\bar{\alpha}-\beta\bar{\delta}-\delta\bar{\beta})\,s^3,\\
{}'s^2 &= \tfrac{1}{2\theta}(\alpha\bar{\gamma}-\gamma\bar{\alpha}+\beta\bar{\delta}-\delta\bar{\beta})\,s^0+\tfrac{1}{2\theta}(\alpha\bar{\delta}-\delta\bar{\alpha}+\\
&\quad+\beta\bar{\gamma}-\gamma\bar{\beta})\,s^1+\tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\delta}+\delta\bar{\alpha}-\beta\bar{\gamma}-\gamma\bar{\beta})\,s^2+\\
&\qquad+\tfrac{1}{2\theta}(\alpha\bar{\gamma}-\gamma\bar{\alpha}-\beta\bar{\delta}+\delta\bar{\beta})\,s^3,\\
{}'s^3 &= \tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}-\gamma\bar{\gamma}-\delta\bar{\delta})\,s^0+\tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\beta}+\beta\bar{\alpha}-\\
&\quad-\gamma\bar{\delta}-\delta\bar{\gamma})\,s^1+\tfrac{\theta}{2}(\alpha\bar{\beta}-\beta\bar{\alpha}+\gamma\bar{\delta}-\delta\bar{\gamma})\,s^2+\\
&\qquad+\tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha}-\beta\bar{\beta}-\gamma\bar{\gamma}+\delta\bar{\delta})\,s^3.
\end{aligned}
\right\} \quad (12.136)
$$

В случае, когда $\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=1$, матрица преобразования (12.136) является псевдоортогональной матрицей соответственно индекса 3 или 2 и преобразование (12.136) представляет собой вращение псевдоевклидова 4-пространства того же индекса.

Если мы поставим в соответствие комплексному дробно-линейному преобразованию (11.98) оператор **A** комплексного 2-пространства, матрица которого имеет вид (11.100), и определитель, равный 1, то мы получим, что

связная группа вращений псевдоевклидова 4-пространства индекса 3 гомоморфна группе операторов комплексного 2-пространства, определители матриц которых равны 1, причем каждому вращению соответствуют два оператора **A** и —**A**, т. е. ядро гомоморфизма состоит из операторов **I** и —**I**. Поэтому *связная группа вращений псевдоевклидова 4-пространства индекса 3 изоморфна фактор-группе группы операторов комплексного 2-пространства, определители матриц которых равны* 1, *по ее подгруппе, состоящей из операторов* **I** и —**I**.

Если мы поставим в соответствие двойному дробно-линейному преобразованию (12.117) операторы **A** и **B** вещественного 2-пространства, матрицы которых имеют вид (12.119) и определители равны 1, то мы получим, что *связная группа вращений псевдоевклидова 4-пространства индекса 2 гомоморфна прямому произведению двух групп операторов вещественного 2-пространства, определители матриц которых равны* 1, *причем каждому вращению соответствует четыре пары операторов* (**A**, **B**), (**A**,—**B**), (—**A**, **B**) и (—**A**, —**B**), *т. е. ядро гомоморфизма состоит из пар операторов* (**I**, **I**), (**I**, —**I**), (—**I**, **I**), (—**I**, —**I**). Поэтому *связная группа вращений псевдоевклидова 4-пространства индекса 2 изоморфна фактор-группе прямого произведения двух групп операторов 2-пространства, определители матриц которых равны* 1, *по его фактор-группе, состоящей из пар операторов* (**I**, **I**), (**I**, —**I**), (—**I**, **I**) *и* (—**I**, —**I**).

Будем называть *спинорами* псевдоевклидовых 4-пространств индекса 3 и 2 векторы соответственно комплексного и вещественного 2-пространств, операторы которых представляют группы вращений этих псевдоевклидовых пространств, а представления вращений псевдоевклидовых 4-пространств операторами комплексного 2-пространства или парами операторов вещественного 2-пространства будем называть *спинорными представлениями* этих вращений. Спинорное представление вращений псевдоевклидова 4-пространства индекса 2 можно получить и аналогично спинорному представлению евклидова 4-пространства, исходя из формулы (12.110).

Всякий оператор комплексного 2-пространства, определитель матрицы которого равен единице, может быть

приведен к одному из видов

$$\begin{pmatrix} \exp\frac{\varphi_2 - i\varphi_1}{2} & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{\varphi_2 - i\varphi_1}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{12.137}$$

и (12.132), так как матрица такого оператора имеет два взаимно обратных различных или совпадающих комплексных собственных числа.

Полагая в формуле (12.136) $\theta = i$ и принимая за α, β, γ, δ элементы матрицы (12.137) в общем случае, а также при $\varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = \varphi$ и при $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \varphi$ и матрицы (12.132), мы получим вращения из связной группы вращений псевдоевклидова 4-пространства индекса 3 с матрицами

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \\ & \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi_2 & 0 & 0 & \operatorname{sh}\varphi_2 \\ 0 & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ 0 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ \operatorname{sh}\varphi_2 & 0 & 0 & \operatorname{ch}\varphi_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & 0 & 0 & \operatorname{sh}\varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}\varphi & 0 & 0 & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_0 & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{t^2}{2} & t & 0 & -\frac{t^2}{2} \\ t & 1 & 0 & -t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 0 & 1-\frac{t^2}{2} \end{pmatrix},$$

т. е. с матрицами (12.54).

Полагая в формуле (12.136) $\theta = e$ и принимая за α, β, γ, δ двойные числа

$$\alpha = A_0^0 e_+ + B_0^0 e_-, \quad \beta = A_1^0 e_+ + B_1^0 e_-,$$

$$\gamma = A_0^1 e_+ + B_0^1 e_-, \quad \delta = A_1^1 e_+ + B_1^1 e_-,$$

где (A_β^α) и (B_β^α) — матрицы операторов **A** и **B**, мы получим вращения из связной группы вращений псевдоевклидова 4-пространства индекса 4. Так как каждый из операторов **A** и **B** может принимать вид (12.130), (12.131) и (12.132) и, в случае, когда эти операторы **A** и **B** имеют один и тот же вид, они могут соответствовать различным или одинаковым значениям параметров φ и t, мы получаем 12 видов этих вращений.

В частности, при следующих значениях операторов **A** и **B** оператор **U** этого вращения имеет следующий вид:

Таблица 12.1

A	B	U
(12.130) при $\varphi = \varphi_1$	(12.130) при $\varphi = \varphi_2$	$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \\ & \mathbf{U}_2 \end{pmatrix}$
(12.130) при $\varphi = \varphi_1$	(12.130) при $\varphi = \varphi_1$	$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
(12.130)	I	$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & \\ & \mathbf{U}_1 \end{pmatrix}$
(12.131) при $\varphi = \varphi_1$	(12.131) при $\varphi = \varphi_2$	$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \\ & \mathbf{V}_2 \end{pmatrix}$
(12.131) при $\varphi = \varphi_1$	(12.131) при $\varphi = \varphi_1$	$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$
(12.131)	I	$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_1 & \\ & \mathbf{V}_1 \end{pmatrix}$
(12.130) при $\varphi = \varphi_1$	(12.131) при $\varphi = \varphi_2$	$\mathbf{W}_{12}$
(12.132) при $t = t_1$	(12.132) при $t = t_1$	$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_0 & \\ & 1 \end{pmatrix}$
(12.132)	I	$\mathbf{V}_0$

Мы получили матрицы (12.55). Остальные три типа вращений соответствуют оператору A вида (12.132) при $t = t_1$ и оператору B вида (12.130) —(12.132) при $t = t_2$.

12.4.11. Интерпретация многообразия прямых проективного 3-пространства в псевдоконформном 4-пространстве. Мы видели, что группа конформных преобразований псевдоконформного 4-пространства индекса 2 изоморфна группе коллинеаций проективного 3-пространства. Так как операторы 2-пространства, представляющие антикватернионы, изображающие точки псевдоконформного 4-пространства, можно рассматривать как аффинные операторные кооординаты $\overline{X}$ прямых проективного 3-пространства, мы получаем изображение точек псевдоевклидова 4-пространства индекса 2 прямыми 3-пространства, не пересекающимися с координатной прямой E_2E_3.

Из свойств аффинных операторных координат m-плоскостей проективного n-пространства (см. 9.4.4) вытекает, что необходимым и достаточным условием того, что две прямые 3-пространства пересекаются, является особенность матрицы оператора $\overline{Y}-\overline{X}$, где $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ — аффинные операторные координаты прямых, т. е.

$$|\,\overline{Y}-\overline{X}\,| = 0. \qquad (12.138)$$

Поэтому пересекающиеся прямые 3-пространства изображаются точками псевдоевклидова 4-пространства, соединяемыми изотропными прямыми. Отсюда вытекает, что совокупность прямых 3-пространства, пересекающих одну прямую проективного 3-пространства, изображается изотропным конусом псевдоевклидова 4-пространства.

Мы видели, что коллинеации проективного 3-пространства, которые записываются в аффинных операторных координатах в виде (9.86), изображают конформные преобразования (12.117) псевдоконформного 4-пространства. Покажем, что корреляции проективного 3-пространства, имеющие в аффинных операторных координатах вид (9.87), изображают конформные преобразования (12.118). В самом деле, всякое конформное преобразование (12.118) можно представить в виде произведения конформного

преобразования на инверсию

$$'\xi = \bar{\xi}^{-1}.$$

Нетрудно проверить, что если оператор A представляет антикватернион α, то антикватернион $\bar{\alpha}$ представляется оператором

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{J}, \tag{12.139}$$

где J — оператор $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, представляющий антикватернион i. Поэтому инверсия $'\xi = \bar{\xi}^{-1}$ изображается в проективном 3-пространстве преобразованием

$$'\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{J}^{-1}\,(\bar{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{J}, \tag{12.140}$$

являющимся частным случаем корреляции (9.87).

Так как всякая корреляция 3-пространства может быть представлена в виде произведения коллинеации на корреляцию (12.140), то *корреляции проективного 3-пространства изображают конформные преобразования* (12.118). Так как инверсия относительно сферы в 4-пространстве изображается корреляцией 3-пространства, при котором прямая, изображающая центр сферы, переходит в прямую E_2E_3, прямая E_2E_3 изображает бесконечно удаленную точку, а прямые, пересекающиеся с прямой E_2E_3, изображают идеальные точки при дополнении псевдоевклидова 4-пространства до псевдоконформного 4-пространства, мы получили, таким образом, *взаимно однозначное изображение псевдоконформного 4-пространства индекса 2 полным многообразием прямых проективного 3-пространства, причем проективные преобразования проективного 3-пространства изображают конформные преобразования* (12.117) *и* (12.118)[20].

Заметим, что двойное отношение (12.120), определяющее два инварианта четырех точек псевдоконформного 4-пространства соответствует двойному отношению (9.88), определяющему два инварианта четырех прямых проективного 3-пространства. В том случае, когда двойное отношение вещественно, четыре точки псевдоконформного 4-пространства лежат на одной окружности, а четыре прямые проективного 3-пространства принадлежат одно-

му семейству прямолинейных образующих линейчатой квадрики. Поэтому *семейства прямолинейных образующих линейчатых квадрик проективного 3-пространства изображают окружности псевдоконформного 4-пространства*. Так как каждая образующая одного семейства квадрики пересекается с каждой образующей другого семейства, каждая точка окружности, изображающей первое семейство, соединяется изотропной прямой с каждой точкой окружности, изображающей второе семейство, т. е. два семейства прямолинейных образующих квадрики изображаются двумя сопряженными окружностями.

Из того, что пересекающиеся прямые проективного 3-пространства изображаются точками псевдоконформного 4-пространства, соединяемыми изотропной прямой, следует, что пучки прямых *проективного 3-пространства изображают изотропные прямые псевдоконформного 4-пространства* (мы видели, что изотропные прямые переводятся конформными преобразованиями в изотропные прямые). Поэтому *связки прямых проективного 3-пространства* и *совокупности прямых этого пространства, лежащих в одной плоскости* («плоские поля»), *изображают вполне изотропные 2-плоскости псевдоконформного 4-пространства*.

Многообразия прямых проективного 3-пространства, изображающие 2-сферы и сферы псевдоконформного 4-пространства, называются соответственно *линейными конгруэнциями и линейными комплексами* прямых [21]. Линейная конгруэнция состоит из прямых, пересекающихся с двумя вещественными или мнимыми прямыми, изображаемыми в псевдоконформном 4-пространстве парой точек, сопряженной с 2-сферой, а линейный комплекс — из прямых, переходящих в себя при нуль-системе. Поэтому *инверсиц относительно сфер, 2-сфер и окружностей, псевдоконформного 4-пространства изображаются в проективном 3-пространстве соответственно нуль-системами* (см. **9.5.11**), *гиперболической или эллиптической инволюцией* (см. **9.4.11**) и *полярным преобразованием относительно квадрики*.

Из того, что псевдоконформное n-пространство индекса l изображается квадрикой индекса $l+1$ проективного $(n+1)$-пространства, причем конформные преобразования n-пространства изображаются коллинеациями

$(n+1)$-пространства, переводящими в себя квадрику, следует, что *многообразие прямых проективного 3-пространства изображается квадрикой индекса 3 проективного 5-пространства, причем проективные преобразования 3-пространства изображаются коллинеациями 5-пространства, переводящими в себя квадрику*. Эта интерпретация, известная под названием *интерпретации Плюккера*[22], может быть получена и непосредственно. Для этого поставим в соответствие прямой, соединяющей точки $A(\mathbf{x})$ и $B(\mathbf{y})$ проективного 3-пространства, кососимметрический оператор

$$\mathbf{P} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} - \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}. \tag{12.141}$$

Как мы видели в 10.3.8, при замене векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ любыми их линейными комбинациями $a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$ и $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ оператор $\mathbf{P}$ умножается на определитель $ad-bc$. Так как векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ определены с точностью до вещественного множителя, оператор $\mathbf{P}$, определяемый прямой, также определен с точностью до вещественного множителя. Координаты оператора (12.141)

$$P^{ij} = x^i y^j - y^i x^j, \tag{12.142}$$

называемые *плюккеровыми координатами* прямой, являются минорами второго порядка матрицы проективной операторной координаты $\mathbf{X}$ этой прямой. Если точки A и B прямой выбраны таким образом, чтобы операторы $\mathbf{X}^0$ и $\mathbf{X}^1$, определяемые оператором $\mathbf{X}$ по правилу (7.82), были бы равны соответственно единичному оператору $\mathbf{I}$ 2-пространства и аффинной операторной координате $\overline{\mathbf{X}}$ той же прямой, то элементы матрицы $\overline{\mathbf{X}}$ представляют собой плюккеровы координаты:

$$\overline{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} X_0^2 & X_1^2 \\ X_0^3 & X_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P^{12} & P^{02} \\ -P^{13} & P^{03} \end{pmatrix}. \tag{12.143}$$

Так как, кроме того, $P^{01} = |\mathbf{I}| = 1$, а $P^{23} = |\overline{\mathbf{X}}|$, то мы получаем равенство

$$P^{01}P^{23} - P^{02}P^{13} + P^{03}P^{12} = 0, \tag{12.144}$$

которому удовлетворяют плюккеровы координаты. Плюккеровы координаты можно рассматривать как проективные координаты точек проективного 5-пространства, а уравнение (12.144) — как уравнение квадрики индекса 3 в этом 5-пространстве, точки которой изображают прямые 3-пространства.

Условие (12.144) *является необходимым и достаточным условием того, что кососимметрический оператор* **P** *может быть представлен в виде* (12.141). В самом деле, не нарушая общности, мы можем считать, что координата P^{01} *оператора* **P** отлична от нуля. Тогда, умножая все координаты P^{ij} этого оператора на $\frac{1}{P^{01}}$, мы можем переписать условие (12.144) в виде

$$P^{23} = \begin{vmatrix} -P^{12} & P^{02} \\ -P^{13} & P^{03} \end{vmatrix}$$

и поставить в соответствие оператору **P** аффинную операторную координату $\overline{\mathbf{X}}$ некоторой прямой проективного 3-пространства. Но эта прямая определяется проективной операторной координатой **X**, матрица которого состоит из матриц единичного оператора **I** и оператора $\overline{\mathbf{X}}$, т. е. за векторы **x** и **y** можно принять векторы

$$\mathbf{x} = \{1, 0, X_0^2, X_0^3\} = \{1, 0, -P^{12}, -P^{13}\}$$

и

$$\mathbf{y} = \{0, 1, X_1^2, X_1^3\} = \{0, 1, P^{02}, P^{03}\}.$$

Нетрудно проверить, что прямолинейные образующие квадрики (12.143) изображают пучки прямых 3-пространства, а 2-плоские образующие квадрики, принадлежащие к двум семействам, изображают связки и плоские поля прямых. Так как каждые две связки и каждые два плоских поля прямых имеют по одной общей прямой, а связка и плоское поле или не имеют общей прямой или имеют целый общий пучок прямых, мы видим, что две 2-плоские образующие квадрики (12.143), принадлежащие к одному семейству, пересекаются в точке, а две 2-плоские образующие, принадлежащие к разным семействам,

не пересекаются или пересекаются по прямой, что вытекает и из общей теоремы о плоских образующих гиперболоидов, доказанной нами в **7.2.10**. Сечения квадрики (12.143) 2-плоскостями, 3-плоскостями и плоскостями соответствуют окружностям, 2-сферам и сферам псевдоконформного 4-пространства, изображают соответственно семейства прямолинейных образующих квадрик, линейные конгруэнции и линейные комплексы прямых проективного 3-пространства.

§ 5. Геометрия и физика

12.5.1. Псевдоримановы пространства. Отказываясь в определении *риманова пространства* (см. **10.3.10**) от положительной определенности квадратичной формы $a_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$, мы получим *псевдориманово пространство*[23]. Если с каждой точкой риманова n-пространства связано евклидово пространство, образованное векторами в этой точке риманова пространства со скалярным произведением $\mathbf{ab} = a_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta$, то с каждой точкой псевдориманова n-пространства связано псевдоевклидово пространство, образованное векторами в этой точке псевдориманова пространства с тем же скалярным произведением. В том случае, когда индекс этого псевдоевклидова n-пространства равен l, будем называть *псевдориманово* пространство *псевдоримановым n-пространством индекса l*. В каждой точке псевдориманова пространства можно определить тензоры, причем векторы и тензоры здесь преобразуются по тем же законам (10.177) и (10.178), что и в римановых пространствах. Длины линий здесь определяются по формулам (10.122), углы между линиями — по формулам (10.123), параллельный перенос векторов и тензоров — с помощью дифференциальных уравнений (10.215), (10.216) и (10.217), геодезическая кривизна линий определяется по формуле (10.218), геодезические линии — с помощью дифференциальных уравнений (10.225), кривизна в 2-мерном направлении — по формуле (10.238).

Если риманово n-пространство в малой области мало отличается от евклидова n-пространства, образованного векторами в одной из точек области риманова пространства, то псевдориманово n-пространство в малых участках