не пересекаются или пересекаются по прямой, что вытекает и из общей теоремы о плоских образующих гиперболоидов, доказанной нами в **7.2.10**. Сечения квадрики (12.143) 2-плоскостями, 3-плоскостями и плоскостями соответствуют окружностям, 2-сферам и сферам псевдоконформного 4-пространства, изображают соответственно семейства прямолинейных образующих квадрик, линейные конгруэнции и линейные комплексы прямых проективного 3-пространства.

§ 5. Геометрия и физика

12.5.1. Псевдоримановы пространства. Отказываясь в определении *риманова пространства* (см. **10.3.10**) от положительной определенности квадратичной формы $a_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$, мы получим *псевдориманово пространство*[23]. Если с каждой точкой риманова n-пространства связано евклидово пространство, образованное векторами в этой точке риманова пространства со скалярным произведением $\mathbf{ab} = a_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta$, то с каждой точкой псевдориманова n-пространства связано псевдоевклидово пространство, образованное векторами в этой точке псевдориманова пространства с тем же скалярным произведением. В том случае, когда индекс этого псевдоевклидова n-пространства равен l, будем называть *псевдориманово* пространство *псевдоримановым n-пространством индекса l*. В каждой точке псевдориманова пространства можно определить тензоры, причем векторы и тензоры здесь преобразуются по тем же законам (10.177) и (10.178), что и в римановых пространствах. Длины линий здесь определяются по формулам (10.122), углы между линиями — по формулам (10.123), параллельный перенос векторов и тензоров — с помощью дифференциальных уравнений (10.215), (10.216) и (10.217), геодезическая кривизна линий определяется по формуле (10.218), геодезические линии — с помощью дифференциальных уравнений (10.225), кривизна в 2-мерном направлении — по формуле (10.238).

Если риманово n-пространство в малой области мало отличается от евклидова n-пространства, образованного векторами в одной из точек области риманова пространства, то псевдориманово n-пространство в малых участках

мало отличается от псевдоевклидова n-пространства, образованного векторами в одной из точек области псевдориманова пространства.

Псевдориманово пространство, так же как риманово пространство, является частным случаем *пространства аффинной связности*.

В псевдоевклидовом пространстве можно построить дифференциальную геометрию линий и поверхностей, аналогичную дифференциальной геометрии линий и поверхностей евклидова пространства, рассматривавшейся нами в десятой главе. *Поверхности псевдоевклидова n-пространства являются римановыми и псевдоримановыми* $(n-1)$-*пространствами* в зависимости от того, являются ли касательные плоскости к ним евклидовыми или псевдоевклидовыми.

12.5.2. Неевклидовы пространства. В 10.3.8 мы видели, что на сфере радиуса r евклидова $(n+1)$-пространства осуществляется риманова геометрия постоянной положительной кривизны $\frac{1}{r^2}$. Пары диаметрально противоположных точек сферы находятся во взаимно однозначном соответствии с точками бесконечно удаленной плоскости $(n+1)$-пространства при его дополнении до проективного пространства. Поэтому можно определить на этой плоскости, являющейся проективным n-пространством, метрику, считая за расстояние между точками этой плоскости, то из расстояний между соответственными точками сферы, которое $<\pi r$. Это пространство, которое можно определить как сферу с отождествленными диаметрально противоположными точками, также является римановым пространством постоянной кривизны. Геодезические линии этого пространства, соответствующие большим окружностям сферы, являются прямыми линиями — бесконечно удаленными прямыми 2-плоскостей, высекающих из сферы большие окружности. Это n-пространство называется *эллиптическим неевклидовым n-пространством или неевклидовым n-пространством Римана*[24].

На сферах псевдоевклидовых пространств также имеет место риманова или псевдориманова геометрия постоян-

ной кривизны. Так как касательная плоскость к сфере мнимого радиуса iq в псевдоевклидовом $(n+1)$-пространстве индекса n евклидова, на этой сфере имеет место риманова геометрия постоянной отрицательной кривизны $-\frac{1}{q^2}$. Сферы вещественного радиуса r в псевдоевклидовых пространствах любого индекса и сфера мнимого радиуса iq в псевдоевклидовых пространствах индекса $<n$ являются псевдоримановыми пространствами соответственно положительной кривизны $\frac{1}{r^2}$ или отрицательной кривизны $-\frac{1}{q^2}$. Проектируя пары диаметрально противоположных точек сферы $(n+1)$-пространства их диаметрами на бесконечно удаленную плоскость $(n+1)$-пространства при его дополнении до проективного пространства и принимая за расстояние между полученными точками одно из расстояний между соответственными точками сферы, мы получим сферы псевдоевклидовых пространств с отождествленными диаметрально противоположными точками. Эти пространства являются римановыми или псевдоримановыми n-пространствами постоянной кривизны, ограниченными квадриками, состоящими из бесконечно удаленных точек сфер $(n+1)$-пространства. Геодезическими линиями этих пространств являются прямые, не пересекающие квадрик, или хорды этих квадрик. Эти n-пространства называются *гиперболическими неевклидовыми n-пространствами*. В случае сферы мнимого радиуса псевдоевклидова $(n+1)$-пространства индекса n, когда геометрия гиперболического пространства риманова, мы получаем *неевклидово n-пространство Лобачевского*[25].

На сферах псевдоевклидовых пространств и, следовательно, в неевклидовых пространствах имеют место формулы *сферической тригонометрии*, которые доказываются так же, как на сферах евклидова пространства. В случае сфер вещественного радиуса r и неевклидовых пространств кривизны $\frac{1}{r^2}$ мы получаем здесь *теорему косинусов* (6.57), *теорему синусов* (6.61) и *двойственную теорему косинусов* (6.65). Точно таким же образом доказываются аналогичные теоремы в случае сфер мнимого радиуса qi. Формулы сферической тригонометрии в этом

случае отличаются от формул сферической тригонометрии на сферах вещественного радиуса только заменой радиуса r на qi. Поэтому в силу соотношений

$$\cos i\psi = \operatorname{ch}\psi, \quad \sin i\psi = i \operatorname{sh}\psi$$

мы получаем следующие *формулы сферической тригонометрии на сферах мнимого радиуса псевдоевклидова пространства*: *теорему косинусов*

$$\operatorname{ch}\frac{a}{q} = \operatorname{ch}\frac{b}{q}\operatorname{ch}\frac{c}{q} - \operatorname{sh}\frac{b}{q}\operatorname{sh}\frac{c}{q}\cos A, \qquad (12.145)$$

теорему синусов

$$\frac{\sin A}{\operatorname{sh}\frac{a}{q}} = \frac{\sin B}{\operatorname{sh}\frac{b}{q}} = \frac{\sin C}{\operatorname{sh}\frac{c}{q}} \qquad (12.146)$$

и *двойственную теорему косинусов*

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\operatorname{ch}\frac{a}{q}. \qquad (12.147)$$

Формулы (12.145)—(12.147) являются формулами тригонометрии всех неевклидовых пространств кривизны $-\frac{1}{q^2}$ и, в частности, пространства Лобачевского[26].

На рис. 12.12 изображен сферической треугольник на сфере мнимого радиуса в псевдоевклидовом 3-пространстве индекса 2 и построение, аналогичное построению рис. 6.8 на сфере евклидова 3-пространства.

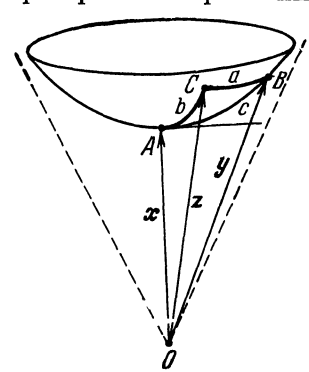

Рис. 12.12.

12.5.3. Сложение скоростей в специальной теории относительности. Так как пространство — время специальной теории относительности является псевдоевклидовым 4-пространством индекса 3, геометрия этого пространства может быть применена для решения различных задач этой теории. Найдем закон сложения скоростей в специальной теории относительности.

Если материальная частица движется в направлении Ox^1 некоторой системы координат, движущейся прямолинейно и равномерно, то ее движение выражается функцией $x^1 = f(x^4)$, где $x^4 = ct$, причем c — скорость света. На рис. 12.13 изображен график этой функции на псевдоевклидовой 2-плоскости x^1Ox^4 индекса 1. Скорость частицы равна

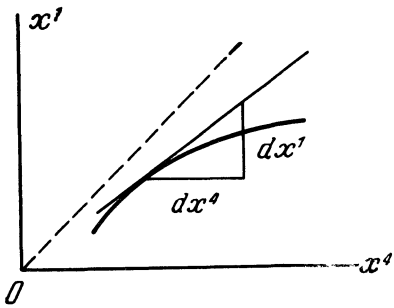

Рис. 12.13.

$$v = \frac{dx^1}{dt} = c\,\frac{dx^1}{dx^4}\,.$$

Так как дифференциал dx^1 измеряется по евклидовой прямой этой 2-плоскости, а дифференциал dx^4 измеряется по псевдоевклидовой прямой, длина вертикального катета дифференциального треугольника, определяемого дифференциалами dx^1 и dx^4, вещественна и равна dx^1, а длина горизонтального катета этого треугольника чисто мнима и равна idx^4. Поэтому тангенс угла наклона касательной к оси Ox^4 равен $i\frac{dx^1}{dx^4}$. Так как этот угол чисто мним, если мы обозначим его через $\varphi = i\psi$, то получим, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{i\operatorname{sh}\psi}{\operatorname{ch}\psi} = i\operatorname{th}\psi = ic\,\frac{dx^1}{dx^4}\,,$$

откуда находим, что скорость v частицы равна

$$v = c\,\frac{dx^1}{dx^4} = \operatorname{th}\psi. \qquad (12.148)$$

Соотношение (12.148) имеет место и при переходе от одной системы координат к другой системе, движущейся относительно первой системы с постоянной скоростью v вдоль оси Ox^1, причем начала координат обеих систем совпадают при $t = 0$ (рис. 12.14). В этом случае преобразование Лоренца (12.3) является преобразованием с

матрицей $\begin{pmatrix} V_1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ и может быть записано в виде

$$\left.\begin{aligned} x^{1'} = x^1 \operatorname{ch}\psi - x^4 \operatorname{sh}\psi, \quad x^{4'} = -x^1 \operatorname{sh}\psi + x^4 \operatorname{ch}\psi, \\ x^{2'} = x^2, \quad x^{3'} = x^3. \end{aligned}\right\} \quad (12.149)$$

Но из соотношения (12.148) следует, что

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{th}\psi = \frac{v}{c}, \quad \operatorname{ch}\psi = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ \operatorname{sh}\psi = \operatorname{th}\psi \operatorname{ch}\psi = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \quad (12.150)$$

Поэтому, заменяя x^4 на ct и опуская индекс 1 координаты x^1, перепишем первые две формулы (12.149):

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (12.151)$$

в котором их записывали основоположники теории относительности.

Формула (12.148) показывает, что скорость частицы относительно некоторой системы координат определяется углом $\varphi = i\psi$ между касательной к линии, описываемой этой частицей в пространстве—времени с направлением временно́й оси этой системы, а скорость движения системы координат, движущейся прямолинейно и равномерно относительно другой системы, определяется углом $\varphi = i\psi$ между прямой, описываемой началом координат первой системы в пространстве—времени с направлением временно́й оси второй системы; так как прямая, описываемая началом

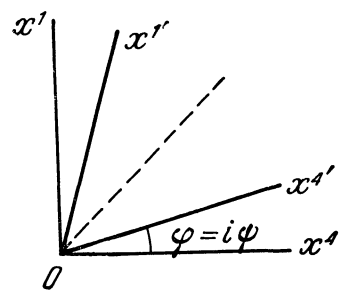

Рис. 12.14.

координат системы в пространстве — времени, совпадает с временно́й осью этой системы, последний угол представляет собой угол между временны́ми осями двух систем координат.

Так как и касательные к линиям, описываемым частицами в пространстве—времени и направления временны́х осей систем координат направлены по векторам мнимого модуля, каждое из этих направлений изображается точкой на сфере радиуса i в псевдоевклидовом 4-пространстве, высекаемой из нее лучом, проведенным в этом направлении из центра сферы.

Так как мы можем считать время t и, следовательно, координату x^4 неотрицательными, мы можем ограничиться рассмотрением только одной полости этой сферы мнимого радиуса, имеющей вид двуполостного гиперболоида; эту полусферу можно рассматривать как 3-пространство Лобачевского кривизны —1.

Если точки A и M сферы радиуса i соответствуют направлениям временно́й оси некоторой системы координат и касательной к линии, описываемой частицей в пространстве—времени, составляющим угол $\varphi = i\psi$, то сферическое расстояние между точками A и M равно ψ. Поэтому скорость частицы относительно этой системы координат связана со сферическим расстоянием ψ между соответственными точками сферы радиуса i сооотношением (12.148).

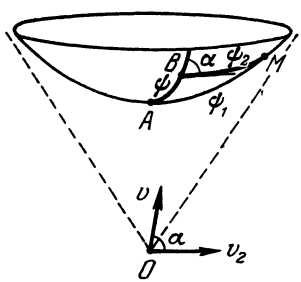

Рис. 12.15.

Пусть теперь имеются две системы координат, направлениям временны́х осей которых соответствуют точки A и B сферы и частица, описывающая в пространстве — времени линию, направление касательной к которой соответствует точке M сферы (рис. 12.15). Тогда скорости v_1 и v_2 частицы относительно этих систем координат связаны со сферическими расстояниями $\psi_1 = AM$ и $\psi_2 = BM$ соотношениями

$$v_1 = \operatorname{cth} \psi_1, \qquad v_2 = \operatorname{cth} \psi_2, \tag{12.152}$$

а скорость v второй системы относительно первой связана со сферическим расстоянием $\psi = AB$ соотношением (12.148).

Скорости v и v_2 — модули векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_2$, являющихся проекциями касательных векторов к линиям, описываемым частицей и началом координат второй системы, на плоскость пространственных координат первой системы в направлении ее временнóй оси. Поэтому угол α между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_2$ равен углу между параллельными этим векторам касательными к сторонам AB и BM сферического треугольника ABM, смежному с углом B этого треугольника. Запишем для этого треугольника сферическую теорему косинусов (12.145) в виде

$$\operatorname{ch}\psi_1 = \operatorname{ch}\psi \operatorname{ch}\psi_2 - \operatorname{sh}\psi \operatorname{sh}\psi_2 \cos(\pi - \alpha) = \\ = \operatorname{ch}\psi \operatorname{ch}\psi_2 + \operatorname{sh}\psi \operatorname{sh}\psi_2 \cos\alpha. \qquad (12.153)$$

В силу соотношений (12.150) и аналогичных соотношений для скоростей v_1 и v_2, формулу (12.153) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{1+\frac{vv_2}{c^2}\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}},$$

откуда получаем, что

$$\frac{v_1}{c} = \frac{\sqrt{\frac{v^2}{c^2}+\frac{v_2^2}{c^2}+2\frac{vv_2}{c^2}\cos\alpha-\left(\frac{vv_2}{c^2}\sin\alpha\right)^2}}{1+\frac{vv_2}{c^2}\cos\alpha}. \qquad (12.154)$$

Формула (12.154) представляет собой формулу сложения скоростей в специальной теории относительности[27].

Заметим, что при $\alpha = 0$, когда скорости v и v_2 направлены по одной прямой, формула сложения скоростей (12.154) принимает вид

$$\frac{v_1}{c} = \frac{\sqrt{\frac{v^2}{c^2}+\frac{v_2^2}{c^2}+2\frac{vv_2}{c^2}}}{1+\frac{vv_2}{c^2}} = \frac{\left|\frac{v}{c}+\frac{v_2}{c}\right|}{1+\frac{vv_2}{c^2}}. \qquad (12.155)$$

Формула (12.155) показывает, что даже складывая направленные по одной прямой скорости, сколь угодно мало отличающиеся от скорости света, мы не получим скорости большей скорости света: подставляя в (12.155) $\frac{v}{c} = \frac{v_2}{c} = \frac{n-1}{n}$, мы получим $\frac{v_1}{c} = \frac{2n(n-1)}{2n(n-1)+1}$.

12.5.4. Плоская электромагнитная волна в специальной теории относительности. Если в некоторой области пространства — времени задана плоская электромагнитная волна[28], то в каждой точке этой области задан вектор **e** напряженности электрического поля и вектор **h** напряженности магнитного поля, причем векторы **e** и **h** в каждой точке перпендикулярны друг другу, а их длины связаны соотношением $|\mathbf{h}| = c|\mathbf{e}|$, где c — скорость света, т. е.

$$\mathbf{eh} = 0, \qquad \mathbf{h}^2 = c^2\mathbf{e}^2. \tag{12.156}$$

Электрическое и магнитное поля, составляющие электромагнитное поле, представляют собой две формы единого процесса и при переходе от одной системы координат к другой, движущейся относительно нее прямолинейно и равномерно, координаты каждого из векторов **e** и **h** в новой системе выражаются через координаты обоих этих векторов в старой системе. Например, если электромагнитное поле вызывается электрическими зарядами, то в системе, относительно которой заряды неподвижны, имеется только электрическое поле, а в системе, движущейся относительно зарядов, движение зарядов определяет электрический ток и, следовательно, магнитное поле. Закон преобразования координат векторов **e** и **h** при преобразованиях Лоренца таков же, что и закон преобразования координат кососимметрического оператора $\mathbf{F} = -\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$, причем

$$\left.\begin{aligned} F^{4i} = -F^{i4} = ce^i, \qquad & F^{21} = -F^{12} = h^3, \\ F^{13} = -F^{31} = h^2, \qquad & F^{32} = -F^{23} = h^1. \end{aligned}\right\} \tag{12.157}$$

Выражая условия (12.156) через координаты F^{ij}, мы видим, что эти условия имеют вид

$$F^{01}F^{23} + F^{02}F^{31} + F^{03}F^{12} = 0 \tag{12.158}$$

и

$$(F^{12})^2 + (F^{13})^2 + (F^{23})^2 - (F^{14})^2 - (F^{24})^2 - (F^{34})^2 = 0. \tag{12.159}$$

Так как условие (12.158) совпадает с условием (12.144) для кососимметрического оператора **F**, этот оператор может быть записан в виде $\mathbf{F} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} - \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}$, т. е. определяет 2-плоскость. Левая часть условия (12.159) может быть записана через векторы **x** и **y** в виде

$$(F^{12})^2 + (F^{13})^2 + (F^{23})^2 - (F^{14})^2 - (F^{24})^2 - (F^{34})^2 = \\ = (\mathbf{xEx})\,(\mathbf{yEy}) - (\mathbf{xEy})^2. \tag{12.160}$$

В том случае, когда 2-плоскость евклидова, за **x** и **y** можно взять два единичных перпендикулярных вектора ($\mathbf{xEx} = \mathbf{yEy} = 1$, $\mathbf{xEy} = 0$) и $(\mathbf{xEx})(\mathbf{yEy}) - (\mathbf{xEy})^2 = 1$; в том случае, когда 2-плоскость псевдоевклидова, за **x** и **y** можно взять единичный и мнимоединичный перпендикулярные векторы ($\mathbf{xEx} = 1$, $\mathbf{yEy} = -1$, $\mathbf{xEy} = 0$) и $(\mathbf{xEx})(\mathbf{yEy}) - (\mathbf{xEy})^2 = -1$, поэтому в этих случаях условие (12.159) не выполняется. Это условие выполняется только в случае *изотропной* 2-плоскости, если мы возьмем за вектор **y** изотропный вектор, а за **x** — перпендикулярный ему неизотропный вектор ($\mathbf{yEy} = 0$, $\mathbf{xEy} = 0$).

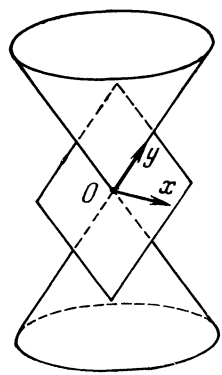

Рис. 12.16.

Поэтому в *каждой точке области пространства—времени, в которой определено электромагнитное поле плоской волны, задана проходящая через нее изотропная* 2-*плоскость*; эта 2-плоскость касается изотропного конуса с вершиной в этой точке по прямой, направление которой перпендикулярно всем направлениям этой 2-плоскости (рис. 12.16).

12.5.5. Спинорное представление группы Лоренца и спин электрона. Термин «спинорное представление» объясняется связью спинорного представления группы

Лоренца со *спином* электрона. Как выяснилось, с каждым электроном, кроме его пространственных координат, связана еще одна степень свободы, которая может принимать только два значения — «положительное» и «отрицательное» и поэтому первоначально ее связывали с направлением вращения электрона, чем и объясняется ее название «спин»[29].

В квантовой физике состояние каждой частицы описывается одной или несколькими комплекснозначными функциями ψ^α от пространственных координат и времени, причем интеграл от суммы модулей этих функций по данной пространственно—временно́й области равен вероятности того, что частица находится в этой области. Эти функции позволяют определить вероятности значений и других физических величин для данной частицы. Эти функции являются решениями волновых дифференциальных уравнений, вследствие чего их называют *волновыми функциями*, а пространственно—временна́я область, в которой они заданы — *волновым полем* частицы. Наличие спина электрона выражается в том, что волновые функции электрона делятся на две такие группы, что интеграл от суммы квадратов модулей значений функции первой или второй группы равен вероятности того, что частица находится в данной области и ее спин соответственно положителен или отрицателен. Как установил Дирак[30], волновое поле электрона задается в каждой точке пространственно—временно́й области четырьмя комплекснозначными функциями ψ^0, ψ^1, ψ^2, ψ^3, из которых функции ψ^0, ψ^1 преобразуются при преобразованиях Лоренца как координаты спинора 4-пространства Минковского, а функции ψ^2, ψ^3— как величины комплексно сопряженные с координатами спинора этого пространства.

Мы видели, что спиноры псевдоевклидова 4-пространства индекса 3 являются векторами комплексного 2-пространства, связанные с изотропными векторами s псевдоевклидова 4-пространства соотношениями (12.134), которые мы здесь перепишем в виде

$$\left.\begin{aligned} s^1 &= \psi^0\bar{\psi}^1 + \psi^1\bar{\psi}^0, & s^2 &= i\,(\psi^1\bar{\psi}^0 - \psi^0\bar{\psi}^1),\\ s^3 &= \psi^0\bar{\psi}^0 - \psi^1\bar{\psi}^1, & s^4 &= \psi^0\bar{\psi}^0 + \psi^1\bar{\psi}^1. \end{aligned}\right\} \quad (12.161)$$

Таким образом, функции ψ^0, ψ^1 определяют изотропный вектор **s** с координатами (12.161). Функции ψ^2, ψ^3, которые можно рассматривать как величины, комплексно сопряженные с координатами спинора, определяют другой изотропный вектор **t** с координатами

$$\left.\begin{aligned} t^1 &= \psi^2\bar{\psi}^3 + \psi^3\bar{\psi}^2, \quad t^2 = i\,(\psi^2\bar{\psi}^3 - \psi^3\bar{\psi}^2), \\ t^3 &= \psi^2\bar{\psi}^2 - \psi^3\bar{\psi}^3, \quad t^4 = \psi^2\bar{\psi}^2 + \psi^3\bar{\psi}^3. \end{aligned}\right\} \qquad (12.162)$$

Как известно, волновое поле электрона определяется в каждой своей точке вектор плотности тока **j**, координаты j^1, j^2, j^3 которого равны пространственному вектору плотности тока, а координата j^4 — плотности зарядов [31]. Эти координаты выражаются через функции ψ^α по формулам

$$\left.\begin{aligned} j^1 &= \psi^0\bar{\psi}^1 + \psi^1\bar{\psi}^0 + \psi^2\bar{\psi}^3 + \psi^3\bar{\psi}^2, \\ j^2 &= i\,(\psi^1\bar{\psi}^0 - \psi^0\bar{\psi}^1 + \psi^2\bar{\psi}^3 - \psi^3\bar{\psi}^2), \\ j^3 &= \psi^0\bar{\psi}^0 - \psi^1\bar{\psi}^1 + \psi^2\bar{\psi}^2 - \psi^3\bar{\psi}^3, \\ j^4 &= \psi^0\bar{\psi}^0 + \psi^1\bar{\psi}^1 + \psi^2\bar{\psi}^2 + \psi^3\bar{\psi}^3. \end{aligned}\right\} \qquad (12.163)$$

Сравнивая формулы (12.163) с формулами (12.161) и (12.162), мы замечаем, что

$$\mathbf{j} = \mathbf{s} + \mathbf{t},$$

т. е. *вектор плотности тока* **j** *является суммой изотропных векторов* **s** и **t**. Отсюда видно, что векторы **s** и **t** неколлинеарны: если бы они были коллинеарны, то вектор **j** был бы изотропным, но этот вектор имеет мнимую длину, так как в системе координат, неподвижной относительно зарядов $j^1 = j^2 = j^3 = 0$. Два неколлинеарных изотропных вектора определяют псевдоевклидову 2-плоскость индекса 1. Поэтому в *каждой точке области пространства — времени, в которой определено волновое поле электрона, задана проходящая через нее псевдоевклидова 2-плоскость индекса* 1; эта плоскость пересекает изотропный конус с вершиной в этой точке по тем двум его прямолинейным образующим, по которым направлены векторы **s** и **t** (рис. 12.17). Таким образом, и электромагнитное поле плоской волны, называемое также *волновым*

полем фотона, и волновое поле электрона характеризуются тем, что в каждой точке области пространства—времени, в которой определено поле, задана проходящая через нее 2-плоскость, но в первом случае эта 2-плоскость изотропная, а во втором случае — псевдоевклидова[32].

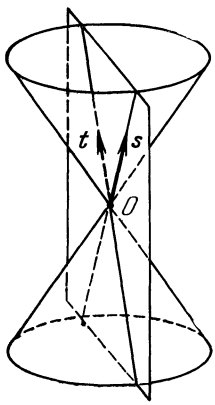

Рис. 12.17.

На примерах вывода закона сложения скоростей в специальной теории относительности и свойств волновых полей фотона и электрона мы наглядно видим, насколько важна геометрия псевдоевклидова 4-пространства для физики.

12.5.6. Пространство—время общей теории относительности. Описание пространства—времени с помощью псевдоевклидова 4-пространства индекса 3 в специальной теории относительности, согласующееся с практикой лучше, чем описание пространства—времени в классической механике, является только приближенным описанием пространства—времени. Следующее приближение было предложено самим Эйнштейном в его общей теории относительности[33]. Согласно этой теории пространство—время является псевдоримановым 4-пространством индекса 3, кривизна в 2-мерных направлениях которого больше там, где больше плотность материи. Таким образом, не только пространство и время оказываются взаимозависимыми, но их свойства оказываются зависящими от материи, формой существования которой они являются.

Из того, что в малой области геометрия псевдоримановых пространств близка к геометрии псевдоевклидова пространства, образованного векторами в одной из точек этой области, видно, что специальная теория относительности хорошо согласуется с практикой в сравнительно небольших областях пространства—времени, а в больших областях проявляются свойства, описываемые общей теорией относительности.

Хотя с прогрессом науки мы узнаем свойства все бо́льших областей пространства—времени, известная нам часть вселенной остается ограниченной и по свойствам этой части мира мы можем судить о геометрических свойствах мирового пространства—времени в целом только в порядке грубого приближения.

Наиболее грубое приближение к картине мирового пространства—времени в целом мы получим, если предположим, что материя распределена в пространстве—времени совершенно равномерно и, следовательно, пространство—время представляет собой псевдориманово 4-пространство индекса 3 постоянной кривизны. Если мы представим себе такое пространство в виде сферы вещественного или мнимого радиуса в псевдоевклидовом 5-пространстве соответственно индекса 4 или 3, а поверхности $t = \text{const}$ также в порядке грубого приближения представим себе сечениями этой сферы параллельными плоскостями, то с течением времени «пространственное сечение» мира уменьшается или расширяется в зависимости от положения секущей плоскости. В первом случае кривизна «пространственного сечения» — постоянная положительная, во втором случае — постоянная отрицательная.

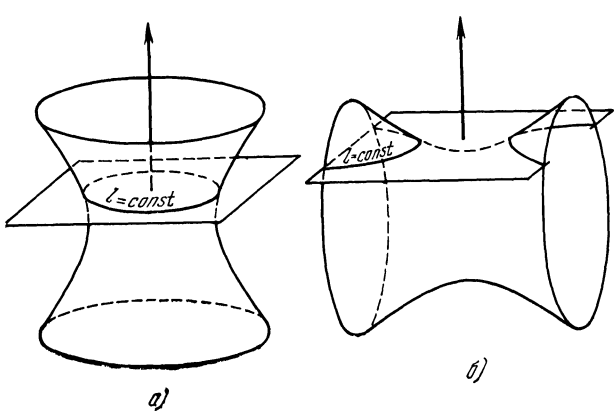

Рис. 12.18.

На рис. 12.18 изображены трехмерные аналоги сфер вещественного и мнимого радиуса в псевдоевклидовом

5-пространстве. Изложенная нами картина мира с первого взгляда кажется совершенно неправдоподобной, но она подтверждается астрономическими наблюдениями, свидетельствующими о расширении известной нам вселенной[34]. Это подтверждение указывает на возможность того, что реальное пространство—время, являющееся псевдоримановым пространством переменной кривизны, соответствует этой картине мира «в среднем».

12.5.7. Квантовая физика и геометрия. Изучение вещества на уровне атомов и электронов потребовало развития нового раздела физики — квантовой физики, которая также тесно связана с геометрией. Мы уже указывали, что частицы характеризуются в квантовой физике комплекснозначными волновыми функциями ψ^α от пространственных координат, причем в случае электрона это 4 функции, из которых функции ψ^0 и ψ^1 — координаты спинора 4-пространства Минковского, а функции ψ^2 и ψ^3 комплексно сопряжены с координатами такого спинора.

В случае других элементарных частиц волновые функции являются тензорами различного вида в том же комплексном 2-пространстве спиноров и также допускают геометрическую интерпретацию.

Волновые функции образуют функциональную модель линейного пространства (см. 1.2.1), отличающегося от линейного пространства, определенного в первой главе тем, что это пространство не вещественное, а комплексное, и тем, что в этом пространстве не выполняется аксиома размерности, но в нем можно выбрать базис, состоящий из счетного множества элементов. В этом линейном пространстве определено скалярное произведение функций (ψ, φ) в виде интеграла от произведения первой функции на функцию, комплексно сопряженную со второй функцией, взятого по области определения функций в пространстве—времени. Это скалярное произведение обладает свойствами, аналогичными свойствам (2.1)—(2.5), с той разницей, что здесь скалярное произведение (ψ,φ) — комплексное число, заменяющееся на комплексно сопряженное при перестановке сомножителей; скалярный квадрат (ψ, ψ) функции ψ неотрицателен.

Физическим величинам соответствуют линейные операторы A этого пространства, обладающие свойством $(A\psi, \varphi) = (\psi, A\varphi)$, аналогичным симметричности оператора в обычном пространстве; для каждого такого оператора можно определить вероятность того, что частица, определяемая данной волновой функцией, характеризуется значениями данной физической величины в данных пределах и находится в данной области пространства—времени. Например, пространственным координатам x^i и временно́й координате t частицы соответствуют операторы, определяющие умножение функций соответственно на x^i и t, а координатам p_i импульса и энергии H частицы соответствуют операторы $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x^i}$ и $\frac{ih}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}$, где h — постоянная Планка[35].

Линейные операторы в пространстве функций также могут обладать собственными векторами и инвариантными подпространствами; в отличие от конечномерных пространств собственные векторы и здесь не всегда являются функциями пространства, а иногда являются обобщенными функциями. В тех случаях, когда операторы обладают конечномерными инвариантными подпространствами, к решению физических задач, связанными с соответственными физическими величинами, применяется геометрия этих подпространств.

Ряд затруднений современной квантовой физики приводит к идее пересмотра того представления о непрерывности пространства и времени, которое лежит в основе как евклидовой и неевклидовых, так и римановых и псевдоримановых геометрий. Возможно, что эти затруднения удастся ликвидировать, заменив пространственные и временну́ю координаты линейными операторами более сложного строения, чем операторы умножения на x^i и t и соответственно изменив операторы импульса и энергии. В случае, если дальнейшее приближение математического описания пространства и времени к физическому пространству и времени пойдет именно по этому пути[36], новые представления о пространстве и времени будут относиться бы к классической теории как представления квантовой физики о волновых полях к классической механике и электродинамике.