

Основные формулы тригонометрии

Основные тождества и их следствия

1. $\operatorname{tga} = \frac{\sin a}{\cos a}$,
2. $\operatorname{ctga} = \frac{\cos a}{\sin a}$,
3. $\operatorname{tga} \cdot \operatorname{ctga} = 1$,
4. $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$,
5. $\sin a = \pm\sqrt{1 - \cos^2 a}$,
6. $\cos a = \pm\sqrt{1 - \sin^2 a}$,
7. $\sin^2 a = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$,
8. $\cos^2 a = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 a}$.

Формулы понижения степени

1. $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$,
2. $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$.

Формулы сложения и вычитания аргументов

1. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$,
2. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$,
3. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$,
4. $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$,

$$5. \quad \operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tgb}}{1 - \operatorname{tga}\operatorname{tgb}},$$

$$6. \quad \operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tgb}}{1 + \operatorname{tga}\operatorname{tgb}},$$

$$7. \quad \operatorname{ctg}(a + b) = \frac{\operatorname{ctg}a\operatorname{ctg}b - 1}{\operatorname{ctg}a + \operatorname{ctg}b},$$

$$8. \quad \operatorname{ctg}(a - b) = \frac{\operatorname{ctg}a\operatorname{ctg}b + 1}{\operatorname{ctg}a - \operatorname{ctg}b}.$$

Формулы двойного аргумента

$$1. \quad \sin 2a = 2 \sin a \cos a,$$

$$2. \quad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a,$$

$$3. \quad \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a},$$

$$4. \quad \operatorname{ctg} 2a = \frac{\operatorname{ctg}^2 a - 1}{2 \operatorname{ctg} a}.$$

Формулы половинного аргумента

$$1. \quad \sin \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}},$$

$$2. \quad \cos \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}},$$

$$3. \quad \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}},$$

$$4. \quad \operatorname{ctg} \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}}.$$

Формулы выражения основных тригонометрических функций через тангенс

$$1. \sin a = \frac{2tg \frac{a}{2}}{1 + tg^2 \frac{a}{2}},$$

$$2. \cos a = \frac{1 - tg^2 \frac{a}{2}}{1 + tg^2 \frac{a}{2}},$$

$$3. tga = \frac{2tg \frac{a}{2}}{1 - tg^2 \frac{a}{2}},$$

$$4. ctga = \frac{1 - tg^2 \frac{a}{2}}{2tg \frac{a}{2}}.$$

Формулы преобразования произведения в сумму

$$1. \sin a \sin b = \frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{2},$$

$$2. \cos a \cos b = \frac{\cos(a + b) + \cos(a - b)}{2},$$

$$3. \sin a \cos b = \frac{\sin(a + b) + \sin(a - b)}{2},$$

$$4. \cos a \sin b = \frac{\sin(a + b) - \sin(a - b)}{2},$$

$$5. tgatgb = \frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{\cos(a + b) + \cos(a - b)},$$

$$6. \quad ctgactgb = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{\cos(a-b) - \cos(a+b)},$$

$$7. \quad tgactgb = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{\sin(a+b) - \sin(a-b)},$$

$$8. \quad ctgatgb = \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{\sin(a+b) + \sin(a-b)}.$$

Формулы преобразования сумм в произведение

$$1. \quad \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

$$2. \quad \sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2},$$

$$3. \quad \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2},$$

$$4. \quad \cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{b-a}{2},$$

$$5. \quad tga + tgb = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b},$$

$$6. \quad tga - tgb = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b},$$

$$7. \quad ctga + ctgb = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b},$$

$$8. \quad ctga - ctgb = \frac{\sin(b-a)}{\sin a \sin b}.$$

Формулы преобразования в произведение выражения $a \sin a + b \cos a$

$$a \sin a + b \cos a = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin a + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos a \right).$$

Полагая $\sqrt{a^2 + b^2} = r$, $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos j$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin j$,

получим

$$a \sin a + b \cos a = r \sin(a + j).$$

Формулы преобразования в произведение выражений $a \sin a + b$, $a \cos a + b$, $atga + b$, $actga + b$

$$a \sin a + b = a(\sin a + \sin j) = 2a \sin \frac{a+j}{2} \cos \frac{a-j}{2},$$

где $\sin j = \frac{b}{a}$, при $0 < \|b\| \leq \|a\|$;

$$a \cos a + b = a(\cos a + \cos j) = 2a \cos \frac{a+j}{2} \cos \frac{a-j}{2},$$

где $\cos j = \frac{b}{a}$, при $0 < \|b\| \leq \|a\|$;

$$atga + b = a(tga + tgj) = \frac{a \sin(a+j)}{\cos a \cos j}, \text{ где } tgj = \frac{b}{a};$$

$$actga + b = a(ctga + ctgj) = \frac{a \sin(a+j)}{\sin a \sin j}, \text{ где } ctgj = \frac{b}{a}.$$