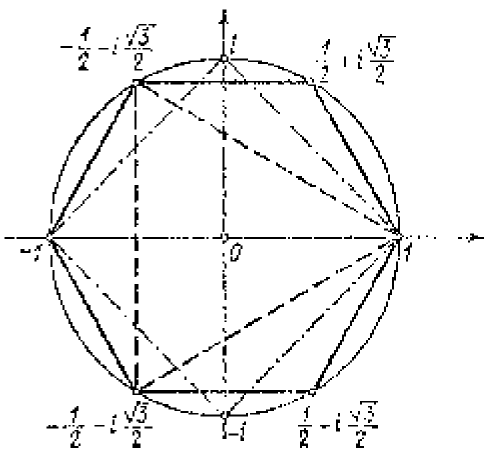
А. А. КИРСАНОВ

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА



ПСКОВ 2002

ББК 517.3
К435

Печатается по решению кафедры алгебры и геометрии,
и редакционно-издательского совета ПГПИ им. С.М. Кирова

Рецензент: **Медведева И.Н.**, кандидат физ. мат. наук, доцент кафедры алгебры и геометрии ПГПИ им. С.М. Кирова.

Кирсанов А.А.
К435 Комплексные числа. Псков: ПГПИ, 2002 - 28 с.

Учебно-методические рекомендации
для самостоятельного изучения темы «Комплексные числа»
в курсе линейной алгебры.

К435

Издано в авторской редакции.

1. Понятие числового поля

Одним из простейших числовых множеств является *множество **натуральных** чисел* $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{N} = \{1,2,3,...\}.$$

В нём всегда выполнимы два основных алгебраических действия: *сложение* и *умножение*.

Это означает, что для любых натуральных чисел m и n

$$m+n \text{ и } m\cdot n$$

есть снова натуральные числа.

При этом выполнены следующие аксиомы:

1. $m+n=n+m$ - коммутативный закон сложения;
2. $(m+n)+l=m+(n+l)$ - ассоциативный закон сложения;
3. $m\cdot n=n\cdot m$ - коммутативный закон умножения;
4. $(m\cdot n)\cdot l=m\cdot(n\cdot l)$ - ассоциативный закон умножения;
5. $(m+n)\cdot l=m\cdot l+n\cdot l$ - дистрибутивный закон умножения относительно сложения.

Операции вычитания и деления на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$ в общем случае *невыполнимы*, так, например

3-5, 2-2, 4:7, 11:3

не являются натуральными числами.

Для выполнения действия вычитания множество натуральных чисел $\mathbf{N}$ расширяют до *множества всех **целых** чисел* $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}.$$

Числовое множество в котором всегда выполнимы операции сложения и умножения в соответствии с аксиомами 1-5, *а также операция вычитания называется **кольцом**.*

Таким образом *множество всех целых чисел образует кольцо*.

Для того, чтобы сделать выполнимой операцию деления следует добавить к множеству всех целых чисел $\mathbf{Z}$ множество всех обыкновенных дробей вида

$$\frac{m}{n},\ n \neq 0,$$

где m и n - произвольные целые числа.

В результате такого расширения мы получили *множество всех* ***рациональных*** *чисел* $\mathbf{Q}$.

Очевидно, что в таком множестве выполнены действия сложения, умножения, вычитания и деления при $n \neq 0$.

Множество чисел в котором всегда выполнимы действия сложения и умножения в соответствии с аксиомами 1-5, *а также действия вычитания и деления при* $n \neq 0$, *называется* ***полем*** *рациональных чисел.*

Заметим, что множество иррациональных чисел поля не образует, так как $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$, $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$ не являются иррациональными числами.

Объединив множества рациональных и иррациональных чисел мы получим *множество* ***вещественных*** *чисел* $\mathbf{R}$ которое образует поле вещественных чисел.

2. Комплексные числа

Полученное нами множество вещественных чисел $\mathbf{R}$ не позволяет нам извлекать корни из отрицательных чисел, например, $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt[4]{-16}$ и т.д.

В поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ не разрешимы уравнения вида $x^2+1=0$, $x^4+16=0$ и т.д.

Перед математикой встала задача: расширить поле вещественных чисел $\mathbf{R}$ путём присоединения к нему новых чисел, таких, чтобы расширенное множество образовало числовое поле, в котором было бы всегда выполнимо действие извлечения корней.

Каким же должно быть это поле?

Во первых, оно должно содержать в себе поле вещественных чисел $\mathbf{R}$. Далее, в этом поле должно быть решено уравнение

$$x^2 = -1\cdot$$

Число, квадрат которого равен -1, *будем обозначать буквой* i *и назовём его **мнимой единицей**.*

Итак,

$$i^2 = -1 \text{ или } \sqrt{-1} = i\cdot$$

Так как новое множество должно быть полем, оно наряду с вещественным числом b и мнимой единицей i должно содержать их произведение bi, а также и сумму

$$a + bi\,,$$

где $a,b \in \mathbf{R}$, i - мнимая единица.

Число

$$z = a + bi$$

назовём ***комплексным числом*** и обозначим *множество всех комплексных чисел* символом $\mathbf{C}$.

Число $a \in \mathbf{R}$ называется *вещественной* (*действительной*) частью комплексного числа z и обозначается как

$$a = \operatorname{Re} z\cdot$$

Число $b \in \mathbf{R}$ называется *коэффициентом при мнимой единице* и обозначается как

$$b = \operatorname{Im} z\cdot$$

Заметим, что $0 + bi = bi$ - мнимое число, а $a + 0\cdot i = a$ - вещественное число.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ будем считать равными, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице, т.е.

$$z_1 = z_2$$

если

$$a_1 = a_2 \text{ и } b_1 = b_2 .$$

Для вещественных чисел мы можем установить понятие “больше” или “меньше”, например:

$$7 < 9,\ 12 > 6 .$$

Для неравных комплексных чисел такое соотношение установить нельзя. Мы, например, не можем сказать в каком отношении находятся два неравных комплексных числа

$$6 + 9i \text{ и } 2 - 9i .$$

3. Сложение комплексных чисел

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ будем называть комплексное число

$$z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i . \qquad (1)$$

Таким образом *при сложении двух комплексных чисел надо сложить их действительные части и коэффициенты при мнимой единице.*

В области вещественных чисел имеется число “нуль”, такое, что

$$a + 0 = a .$$

В области комплексных чисел такую роль будет играть

$$0 + 0 \cdot i .$$

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi .$$

Комплексное число $-a - bi$ будем называть *противоположным* комплексному числу $a + bi$.

Примеры.

1) $(2 + i) + (5 + 6i) = (2 + 5) + (1 + 6)i = 7 + 7i$,

2) $(5 + 7i) + (2 - 6i) = (5 + 2) + (7 - 6)i = 7 + i$,

3) $(6 - 4i) + (-15 - 2i) = (6 - 15) + (-4 - 2)i = -9 - 6i$,

4) $(-4i)+(9)=(0-4i)+(9+0i)=9-4i$.

5) Решить уравнение $(5x+3yi)+(2y-xi)=9+5i$.

Сложив комплексные числа в левой части уравнения получим

$$(5x+2y)+(-x+3y)i=9+5i.$$

Два комплексных числа равны, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице, т.е.

$$\begin{cases}5x+2y=9,\\ -x+3y=5.\end{cases}$$

Нетрудно показать, что решением данной системы уравнений будет $x=1$ и $y=2$.

Упражнения

Вычислить

1) $(3+6i)+(-3-5i)$, 2) $(2+3i)+(5-3i)$,

3) $(-9-4i)+(-2-3i)$, 4) $(-3)+(2i)$,

5) $(1+6i)+(1-6i)$, 6) $(4+i)+(-4+i)$,

7) $(2x-5yi)+(3y+2xi)=13-i$,

8) $7(3x+2yi)+(2y-i)=19+3$.

4. Вычитание комплексных чисел

Разностью двух комплексных чисел

$$z_1=a_1+b_1i \text{ и } z_2=a_2+b_2i$$

будем называть комплексное число

$$z=z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i.$$

Пример

1) $(5+6i)-(3+7i)=(5-3)+(6-7)i=2-i$.

Упражнения

Вычислить

9) $(2+i)-(9-i)$, 10) $(7+2i)-(7+3i)$,

11) $(3+5i)-(3-5i)$, 12) $(6i)-(6)$.

5. Умножение комплексных чисел

Потребуем, чтобы умножение комплексных чисел

$$z_1=a_1+b_1i \text{ и } z_2=a_2+b_2i$$

выполнялось по правилу умножения двучленов, т.е.

$$z=z_1\cdot z_2=(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=$$
$$=a_1a_2+(a_1b_2+b_1a_2)i+b_1b_2i^2=\left|i^2=-1\right|=$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i.$$

$$(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i. \tag{2}$$

Примеры

1) $(2+3i)\cdot(6-5i)=(2\cdot 6-3\cdot(-5))+(2\cdot(-5)+3\cdot 6)=27+8i$,

2) $(1+i)\cdot(1+i)=1+i+i+i^2=1+2i-1=2i$,

3) $(2+3i)\cdot(2-3i)=4-6i+6i-9i^2=4+9=13$.

4) Найти z если $(2-3i)\cdot z=-1-5i$.

Пусть $x = a + bi$, тогда

$$(2-3i)\cdot(a+bi) = (2a+3b) + (-3a+2b)i = -1-5i,$$

что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 2a + 3b = -1, \\ -3a + 2b = -5. \end{cases}$$

Решением данной системы уравнений будет $a = 1$, $b = -1$, т.е.

$$z = 1 - i.$$

Проверим полученное решение

$$(2-3i)\cdot z = (2-3i)\cdot(1-i) = 2 - 2i - 3i + 3i^2 = -1-5i.$$

Упражнения

Вычислить

13) $(7+4i)^2$, 14) $(5+i)\cdot(5-i)$,

15) $(1+i)^3$, 16) $(6+4i)\cdot(-6+4i)$,

17) $z\cdot(2+i) = 15$, 18) $(2+2i)\cdot z = 8i$.

6. Деление комплексных чисел

Соотношение

$$z = \frac{z_1}{z_2}$$

будем понимать в смысле, что

$$z_1 = z \cdot z_2.$$

Пусть $z = x + yi$, $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, тогда

$$z_1 = z \cdot z_2 = (x + yi)\cdot(a_2 + b_2 i) = a_1 + b_1 i.$$

В соответствии с (2) последнее выражение запишется так:

$$a_1 + b_1 i = a_2 x - b_2 y + (a_2 y + b_2 x) i \ ,$$

что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} a_2 x - b_2 y = a_1, \\ b_2 x + a_2 y = b_1. \end{cases} \qquad (*)$$

Умножив первое равенство (*) на a_2, а втрое - на b_2 и сложив их, получим:

$$(a_2 x - b_2 y)a_2 + (b_2 x + a_2 y)b_2 = a_2^2 x - a_2 b_2 y + b_2^2 x + a_2 b_2 y =$$
$$= (a_2^2 + b_2^2)x = a_1 a_2 + b_1 b_2.$$

Откуда

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \ .$$

Умножив первое равенство (*) на b_2, а втрое - на a_2 и вычтя их, получим:

$$(a_2 x - b_2 y)b_2 - (b_2 x + a_2 y)a_2 = a_2 b_2 x - b_2^2 y - a_2 b_2 x - a_2^2 y =$$
$$(-a_2^2 - b_2^2)y = a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

Откуда

$$y = \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \ .$$

Окончательно

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \ . \qquad (3)$$

Для каждого комплексного числа $z = a + bi \neq 0 + 0i$ определим *обратное* ему число z^{-1}, такое, что $z \cdot z^{-1} = 1 + 0i = 1 \cdot$

Используя (3) мы можем записать

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1 + 0i}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \ . \qquad (4)$$

Пример

1) Найти отношение $\dfrac{9-7i}{2-3i}$, $2-3i \neq 0+0i$.

Пусть

$$\frac{9-7i}{2-3i} = x + yi \Rightarrow (2-3i)\cdot(x+yi) = 9-7i,$$

тогда в соответствии с (2) запишем

$$(2x+3y)+(2y-3x)i = 9-7i,$$

что равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 2x+3y=9, \\ -3x+2y=-7. \end{cases}$$

Решением данной системы уравнений будет $x=3$, $y=1$.

$$\frac{9-7i}{2-3i} = 3+i.$$

2) Найти число, обратное $z=2+3i$.

В соответствии с (4) имеем

$$z^{-1} = \frac{1+0i}{2+3i} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i.$$

Проверим полученный результат умножением:

$$z\cdot z^{-1} = (2+3i)\cdot\left(\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i\right) = \frac{4}{13} - \frac{6}{13}i + \frac{6}{13}i - \frac{9}{13}i^2 = \frac{4}{13} + \frac{9}{13} = 1.$$

Упражнения

Вычислить

19) $\dfrac{2+i}{2-i}$, 20) $\dfrac{4i}{1+i}$,

21) $\dfrac{5}{-4+3i}$, 22) $\dfrac{3+2i}{i}$,

23) Доказать равенство $\dfrac{2+i}{3-i}=\dfrac{13+4i}{17-9i}$.

Найти числа обратные данным:

24) $z=2+i$, 25) $z=2-i$,

26) $z=i$, 27) $z=3-4i$.

7. Комплексно-сопряженные числа

Комплексное число $\bar{z}=a-bi$ называется *сопряженным* к комплексному числу $z=a+bi$. Например, число $3+5i$ сопряжено числу $z=3-5i$, число $3-2i$ сопряжено числу $3+2i$, число $-3i=0-3i$ сопряжено числу $3i=0+3i$.

Пусть a - произвольное вещественное число. Тогда

$$a=a+0i=a-0i=\bar{a},$$

т.е. *любое вещественное число равно своему сопряженному.* Верно и обратное утверждение: *если комплексное число* $z=a+bi$ *равно своему сопряженному комплексному числу* $\bar{z}=a-bi$, *т.е.*

$$a+bi=a-bi,$$

то это число вещественное. Это следует из того, что равенство двух комплексных чисел z и $\bar{z}$ означает, что $a=a$ и $b=-b=0$.

Таким образом, *из всех комплексных чисел вещественные числа и только они равны своим сопряженным числам.*

Очевидно, что *сумма и произведение комплексно-сопряженных чисел есть числа вещественные.*

$$z+\bar{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a, \quad (5)$$

$$z\cdot\bar{z}=(a+bi)\cdot(a-bi)=a^2+b^2. \quad (6)$$

Нетрудно показать, что

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \text{ и } \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \qquad (7)$$

Свойство (6) позволяет получить практический способ деления комплексных чисел. Пусть

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}, \; a_2 + b_2 i \neq 0 + 0i.$$

Умножим числитель и знаменатель данной дроби на комплексно-сопряженное число $a_2 - b_2 i$, тогда

$$z = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2},$$

что немедленно приводит нас к формуле (3)

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Пример

1) $\dfrac{9-7i}{2-3i} = \dfrac{(9-7i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{18+27i-14i+21}{4+9} = \dfrac{39+13i}{13} = 3+i$.

Упражнения

Вычислить:

28) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$; 29) $\dfrac{9-2i}{2+9i}$; 30) $\dfrac{1}{i}$;

31) $\dfrac{2-5i}{4+i} - \dfrac{6-7i}{4-i}$; 32) $\dfrac{1+i}{3-7i} + \dfrac{i}{1-i}$;

33) $\dfrac{a-bi}{b+ai} - \dfrac{b-ai}{a+bi} i$.

8. Степени мнимой единицы

Первой степенью числа i является само это число, тогда:

$$i^1 = i;$$

$$i^2 = -1;$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i;$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = 1;$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i;$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = -1$$

и так далее.

Очевидно, что при любом $n \in \mathbf{N}$

$$i^{4n} = 1;$$

$$i^{4n+1} = i;$$

$$i^{4n+2} = -1;$$

$$i^{4n+3} = -i \cdot$$

Примеры

1. $i^{125} - i^{26} = i^{124+1} - i^{24+2} = i - i^2 = i + 1 \cdot$
2. $i^{100} + i^{98} + i^{63} = i^{100} + i^{96+2} + i^{60+3} = 1 - 1 - i = -i \cdot$

Упражнения

Вычислить:

34. $i^6 + i^{16} + i^{26} + i^{36} + i^{46} + i^{56} \cdot$

35. $i^3 + i^{13} + i^{23} + i^{33} + i^{43} + i^{53} \cdot$

36. $\dfrac{1}{i^3}$.

37. При каком действительном числе a число

$$3i^3-2ai^2+(1-a)i+5$$

будет: а) действительным; б) чисто мнимым; в) равным нулю.

9. Геометрическое изображение комплексных чисел

Из школьного курса математики известно, что вещественные числа можно изображать точками на числовой прямой (рис. 1). При этом каждому вещественному числу соответствует единственная точка на числовой прямой.

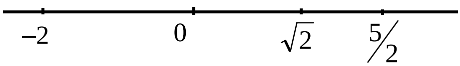


Рис. 1.

Мы можем утверждать, что *множество всех вещественных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех точек числовой прямой.*

Комплексное число

$$z=a+bi$$

можно охарактеризовать упорядоченной парой вещественных чисел (a,b), где a - первое число, b - второе число. Такую пару чисел можно отождествить с точкой на плоскости, если на ней задана система координат.

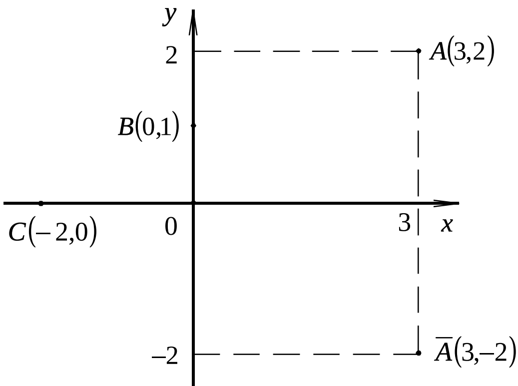


Рис. 2.

Например: комплексное число $z = 3 + 2i$ можно отождествить с точкой $A(3,2)$, которую можно изобразить на плоскости XOY (рис. 2). Комплексно-сопряженное число $\bar{z} = 3 - 2i$ изобразится точкой $\overline{A}(3,-2)$, симметричной точке $A(3,2)$ относительно действительной оси. Точки $B(0,1)$ и $C(-2,0)$ соответствуют комплексным числам $z = 0 + i$ и $z = -2 + 0i$.

Мы можем утверждать, что *множество всех комплексных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех точек плоскости*.

Упражнение

38. Назвать комплексные числа, сопряженные данным. Изобразить данные и сопряженные к ним комплексные числа точками на плоскости:

а) $1 + i$; б) $4 - 7i$; в) 3; г) $3i$; д) $-1 - 3i$.

10. Тригонометрическая форма комплексных чисел

С любой точкой А плоскости XOY мы можем связать радиус-вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{r}$ и мы можем установить взаимно однозначное соответствие комплексных чисел $z = (a,b)$ с множеством век-

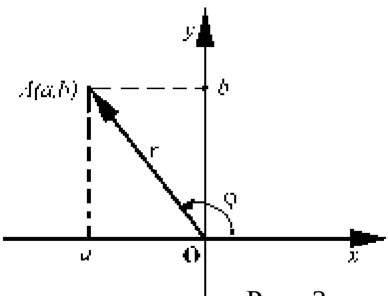


Рис. 3.

торов (рис. 3) с координатами (a,b), если все векторы берут начало в точке O с координатами $(0,0)$.

Очевидно, что

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$$

и тогда

$$z = a + bi = r(\cos\varphi + \sin\varphi \cdot i) \qquad (5)$$

есть так называемая *тригонометрическая форма* комплексного числа.

Угол φ будем называть *аргументом* комплексного числа z, а $r = \left\|\overrightarrow{OA}\right\|$ - его *модулем*.

Ясно (рис. 3), что

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \ \cos\varphi = \frac{a}{r}, \ \sin\varphi = \frac{b}{r}, \ \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

Примеры

1. Записать в тригонометрической форме комплексные числа:

$$z = 1 + i.$$

Модуль этого комплексного числа есть $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, тогда $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Окончательно запишем

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right], \text{ где } k \in \mathbf{Z}.$$

Обычно из бесконечного множества значений аргумента комплексного числа выбирают то, которое заключено между

0 и 2π. В нашем случае таким значением является $\dfrac{\pi}{4}$. Окончательно (рис. 4) запишем $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

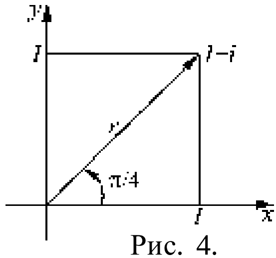


Рис. 4.

2. $z = \sqrt{3} - i$.

$r = \sqrt{3+1} = 2$. $\quad \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = -\dfrac{1}{2}$.

С точностью до угла, кратного 2π, имеем $\varphi = \dfrac{11}{6}\pi = 330^0$, следовательно, (рис. 5) $z = \sqrt{3} - i = 2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$.

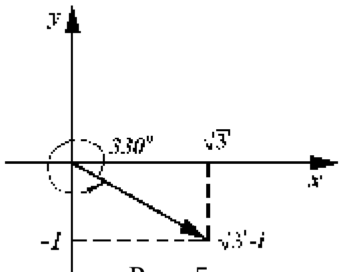


Рис. 5.

3. $z = i$.

$r = 1$, $\cos\varphi = \dfrac{0}{1} = 0$, $\sin\varphi = \dfrac{1}{1} = 1$, откуда $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ и, следовательно, (рис. 6)

$$z = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

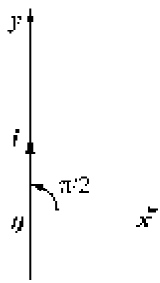


Рис. 6.

4. $z = 3$.

$r = \sqrt{9+0} = 3$, $\cos\varphi = \dfrac{3}{3} = 1$, $\sin\varphi = \dfrac{0}{3} = 0$, откуда $\varphi = 0^0$ и, следовательно, (рис.7) $z = 3 = 3\left(\cos 0^0 + i\sin 0^o\right)$.

5. $z = -3$.

$r = 3$, $\cos\varphi = \dfrac{3}{-3} = -1$, $\sin\varphi = \dfrac{0}{3} = 0$, откуда $\varphi = \pi$ и, следовательно, (рис. 8) $z = -3 = 3\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$.

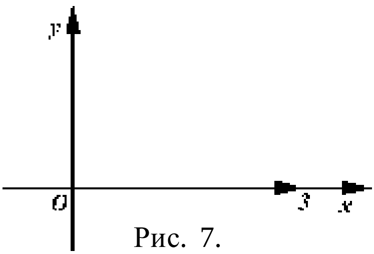


Рис. 7.

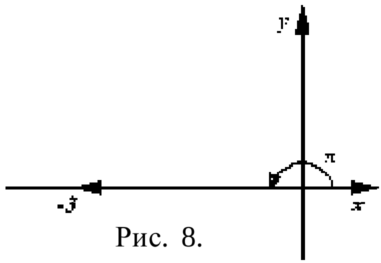


Рис. 8.

Упражнения

Записать данные комплексные числа в тригонометрической форме, определив их модули и аргументы:

39. $z = 2 + 2\sqrt{3}i$. 40. $z = \sqrt{3} + i$. 41. $z = 1 - i$.

42. $z = -4$. 43. $z = 3i$. 44. $z = -2i$.

11. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

Умножение и деление комплексных чисел удобнее выполнить, если эти числа записаны в тригонометрической форме.

Пусть

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$

тогда

$$z = z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

а

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Примеры

1. $z_1 = 2(\cos 130^0 + i\sin 130^0)$, $z_2 = 3(\cos 230^0 + i\sin 230^0)$.

$z = z_1 z_2 = 6(\cos 360^0 + i\sin 360^0) = 6$.

2. $z_1 = 5(\cos 47^0 + i\sin 47^0)$, $z_2 = 4(\cos 13^0 + i\sin 13^0)$.

$$z = z_1 z_2 = 20(\cos 60^0 + i\sin 60^0) = 20\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10 + 10\sqrt{3}i.$$

3. $z_1 = 2(\cos 150^0 + i\sin 150^0)$, $z_2 = 3(\cos 105^0 + i\sin 105^0)$.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}(\cos 45^0 + i\sin 45^0) = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}(1+i).$$

4. $z_1 = \cos 70^0 + i\sin 70^0$, $z_2 = \cos 100^0 + i\sin 100^0$.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \cos(-30^0) + i\sin(-30^0) = \cos 30^0 - i\sin 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Упражнения

Вычислить

45. $3\left(\cos 20^0 + i\sin 20^0\right)\cdot 5\left(\cos 70^0 + i\sin 70^0\right);$

46. $2\left(\cos 40^0 + i\sin 40^0\right)\cdot 7\left(\cos 80^0 + i\sin 80^0\right);$

47. $\dfrac{\cos 130^0 + i\sin 130^0}{\cos 40^0 + i\sin 40^0};$

48. $\dfrac{2\left(\cos 107^0 + i\sin 107^0\right)}{5\left(\cos 47^0 + i\sin 47^0\right)}.$

Комплексно-сопряженное число

$$\bar{z} = a - bi = r(\cos\varphi - \sin\varphi\cdot i) = r[\cos(-\varphi) + \sin(-\varphi)\cdot i]$$

имеет тот же модуль r и противоположный аргумент - φ.

Произведение

$$z\cdot\bar{z} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r^2,$$

откуда для модуля комплексного числа можем записать

$$r = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Если модуль комплексного числа равен единице $(r=1)$, *то* $z\bar{z} = 1$, *и, таким образом* $z^{-1} = \bar{z}$.

При любом натуральном $n \in \mathbf{N}$

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

или

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (6)$$

это так называемая *формула Муавра* позволяющая находить натуральные степени комплексных чисел.

12. Извлечение корней из комплексных чисел

Предположим, что корень степени n из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0 + 0i$ существует и равен $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Тогда

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Используя формулу Муавра, получим

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Модули двух равных комплексных чисел, отличных от нуля, равны, а аргументы могут отличаться на угол кратный 2π. Тогда

$$\rho^n = r,\ n\theta = \varphi + 2k\pi$$

или

$$\rho = \sqrt[n]{r},\ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

где k - любое целое число. В частности при:

$k = 0$ $\qquad \theta = \dfrac{\varphi}{n};$

$k = 1$ $\qquad \theta = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi}{n};$

$k = 2$ $\qquad \theta = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{4\pi}{n};$

....;

$k = n-1$ $\qquad \theta = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2(n-1)\pi}{n}.$

При $k = \pm n, \pm(n+1), \pm(n+2)$ и т.д. будут получаться значения θ, отличающиеся от написанных выше на углы, кратные 2π и никаких новых комплексных чисел эти значения k дать не могут. Таким образом каждое комплексное число, отличное от нуля, имеет ровно n корней n-й степени.

Итак, если только корень n-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ существует, то он может принимать лишь следующие n значений:

$$a_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right);$$

$$a_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right);$$

....;

$$a_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}\right).$$

Геометрически все n значений корня n-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ изображаются точками, лежащими на окружности с центром в начале координат, радиус которой равен $\sqrt[n]{r}$.

Пример

1. Найти все значения корня 4-й степени из i.

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Модули всех корней 4-й степени равны $\sqrt[4]{1} = 1$. Аргументы будут иметь значения:

$$\frac{\pi}{8};\ \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{4};\ \frac{\pi}{8} + \frac{4\pi}{4};\ \frac{\pi}{8} + \frac{6\pi}{4}$$

или

$$\frac{1}{8}\pi;\ \frac{5}{8}\pi;\ \frac{9}{8}\pi;\ \frac{13}{8}\pi,$$

тогда

$$a_0 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8};$$

$$a_1 = \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8};$$

$$a_2 = \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8};$$

$$a_3 = \cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}.$$

13. Извлечение корня n-й степени из 1

В данном случае $z = 1$ и тогда $1 = \cos 0^0 + i\sin 0^0$ или

$$1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi, \text{ где } k \in \mathbf{Z},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Пусть $\sqrt[n]{1} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Тогда по формуле Муавра

$$1 = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

откуда

$$1 = r^n,\ 2k\pi = n\varphi.$$

Таким образом $r = 1$, так как модуль комплексного числа - вещественное положительное число; $\varphi = \dfrac{2k\pi}{n}$, т.е.

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Положим $a_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$. При $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ имеем

$a_0 = 1$,

$$a_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n},$$

$$a_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n},$$

.................................,

$$a_{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

При других значениях k мы новых корней не получим, так как при $k = n$ имеем

$$a_n = \cos\frac{2n\pi}{n} + i\sin\frac{2n\pi}{n} = 1 = a_0,$$

$$a_{-1} = \cos\left(-\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{n}\right) =$$

$$= \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = a_{n-1},$$

$a_{-2} = a_{n-2}$ и так далее.

Мы убедились, что $\sqrt[n]{1}$ имеет ровно n различных корней.

Пример

Найти значения $\sqrt[n]{1}$ при $n = 2, 3, 4, 6$.

1. $n = 2$. Имеем два корня (рис.9).

$$a_0 = 1,\ a_1 = \cos\frac{2\pi}{2} + i\sin\frac{2\pi}{2} = -1.$$

2. $n = 3$. Имеем три корня (рис.9).

$$a_0 = 1,\ a_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$a_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

3. $n = 4$. Имеем четыре корня (рис.9).

$$a_0 = 1,\ a_1 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = i,$$

$$a_2 = \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = -1,\ a_3 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = -i.$$

4. $n = 6$. Имеем шесть корней (рис.9).

$$a_0 = 1,\ a_1 = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$a_2 = \cos\frac{4\pi}{6} + i\sin\frac{4\pi}{6} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$a_3 = \cos\frac{6\pi}{6} + i\sin\frac{6\pi}{6} = -1,\ a_4 = \cos\frac{8\pi}{6} + i\sin\frac{8\pi}{6} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

$$a_5 = \cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Из рис.9. видно, что значения a_k расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность. Одна из вершин этого n-угольника имеет координаты (1,0).

Пусть a_0, a_1, ..., a_{n-1} - корни n-й степени из единицы. Если мы возведём a_1 в различные целые положительные степени $k = 1,2,...,n$, мы получим по одному разу все корни из единицы, так как $a_1^1 = a_1$, $a_1^2 = a_2$, ..., $a_1^{n-1} = a_{n-1}$, $a_1^n = a_0$.

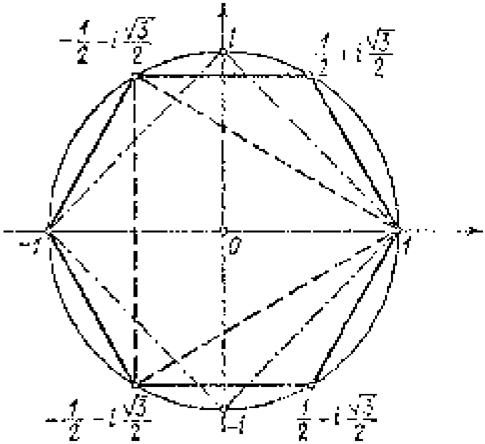


Рис. 9.

Аналогичным свойством могут обладать и другие корни из единицы.

Корень n-й степени из единицы, при возведении которого в степени $k=1,2,...,n$ получаются по одному разу все корни n-й степени из единицы, называется ***первообразным***.

Так при $n=4$ корни $a_1=i$ и $a_3=-i$ являются первообразными:

$$a_3^1=-i=a_3,\ a_3^2=-1=a_2,\ a_3^3=i=a_1,\ a_3^4=1=a_0.$$

Упражнения

Найти все значения данных корней:

49. $\sqrt[3]{3}$. 50. $\sqrt[3]{1+i}$.

51. $\sqrt[4]{-1}$. 52. $\sqrt{\cos 100^0+i\sin 100^0}$.

53. $\sqrt[3]{8i}$. 54. $\sqrt{4i}$.

Литература.

1. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые её приложения. М.: Наука, 1971.
2. Кочетков Е.С., Кочеткова Е.С. Алгебра и элементарные функции. М.: Просвещение, 1966.

Содержание

1. Понятие числового поля 3
2. Комплексные числа 4
3. Сложение комплексных чисел 6
4. Вычитание комплексных чисел 7
5. Умножение комплексных чисел 8
6. Деление комплексных чисел 9
7. Комплексно-сопряженные числа 12
8. Степени мнимой единицы 14
9. Геометрическое изображение комплексных чисел 15
10. Тригонометрическая форма комплексных чисел 16
11. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме 19
12. Извлечение корней из комплексных чисел 22
13. Извлечение корня n-й степени из 1 24

Издательская лицензия **ИД №06024** от 09.10.2001 года.
Подписано в печать 10.09.2002 г. Формат 60х90/16.
Объем издания в усл.печ.л. 1,75. Тираж 100 экз. Заказ 328.

Псковский государственный педагогический институт им. С.М.Кирова,
180760, г. Псков, пл. Ленина, 2.
Редакционно-издательский отдел ПГПИ им. С.М.Кирова,
180760, г. Псков, ул. Советская, 21, телефон 2-86-18.

Отпечатано в типографии газеты «Товары и цены»