

# МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Н. Б. Васильев

В этой статье рассказывается о понятии расстояния, которое часто используется в современной математике и как основа для построения общих теорий, и для решения конкретных задач. Для понимания второй половины статьи требуется знакомство с понятиями системы координат и словесной плоскости.

В железнодорожном справочнике указано, что расстояние от Новосибирска до Душанбе равно 3895 км; если измерить расстояние между этими городами по карте (или заглянуть в справочник авиационных кассиров), то получится другое число: 2100 км. В этом, конечно, нет ничего удивительного: поезда не могут ездить почти напрямик, как летают самолеты, поэтому железнодорожники и летчики оценивают расстояния по-разному.

Жители большого города вообще редко измеряют расстояния внутри города в километрах. Скажем, если москвича спросить: «А далеко ли от Университета на Ленинских горах до Бескудникова \*?)?» — он скорее всего ответит: «Часа полтора», — и это будет более полезный ответ, чем «28 километров». Например, от того же Университета до Щелковской расстояние в километрах больше, а «расстояние» в минутах — меньше: туда можно доехать (с пересадкой) на метро не больше чем за час.

Еще один пример совсем другого рода. Рассмотрим три слова: *адсорбция*, *абсорбция* и *аберрация*. Каждое из этих слов содержит девять букв. Мы нарочно выбрали такие слова, точные значения которых, возможно, не вполне ясны читателям, — нас интересует сейчас только написание этих слов, а не их значение. Как вам кажется, какие из них больше похожи друг на друга, «ближе» друг к другу, а какие — «далече»? Совершенно ясно, что первые два слова очень близки, а *аберрация* находится довольно далеко от них — несколько ближе к слову *абсорбция*. Можно ввести и количественную характеристику того, насколько два слова (из одинакового числа букв) близки друг к другу, — принять «расстояние» между словами равным числу мест, на которых в этих словах стоят разные буквы. Тогда «расстояние» *адсорбция* — *абсорбция* равно 1, *абсорбция* — *аберрация* — 3, *адсорбция* — *аберрация* — 4; *абстракция* и *обструкция* находятся на расстоянии 2, а *самолет* и *бегемот* — на расстоянии 6. Запишем это так:  $\rho$  (самолет, бегемот)=6,  $\rho$  (адсорбция, абберрация)=4, и т. п.\*\*).

Все «расстояния», о которых мы сейчас говорили, и обычное расстояние между двумя точками на плоскости или в пространстве обладают некоторыми общими свойствами. Таких основных свойств немногих, но уже достаточно для того, чтобы, приняв их за аксиомы, построить содержательную и полезную теорию. Здесь мы не собираемся излагать эту теорию, а ограничимся обсуждением некоторых первоначальных понятий и отдельных примеров.

\* Район новостроек на севере Москвы.

\*\*)  $\rho$  — греческая буква «ρ».

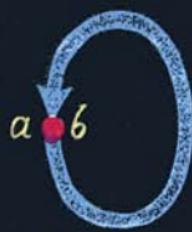


Рис. 1, а.



Рис. 1, б.



Рис. 1, в.

## АКСИОМЫ И ПЕРВЫЕ ПРИМЕРЫ

Пусть нам дано некоторое множество  $X$ . Мы говорим, что на нем определено расстояние, если каждым двум элементам  $a$  и  $b$  множества  $X$  сопоставлено некоторое неотрицательное число  $\rho(a, b)$  — «расстояние от  $a$  до  $b$ », — причем выполняются следующие три условия (см. рис. 1, а, б, в):

1°.  $\rho(a, b) = 0$  тогда и только тогда, когда  $a = b$ .

2°.  $\rho(a, b) = \rho(b, a)$  для любых двух элементов  $a$  и  $b$  из  $X$ .

3°.  $\rho(a, c) \leq \rho(a, b) + \rho(b, c)$  для любых трех элементов  $a$ ,  $b$  и  $c$  из  $X$ .

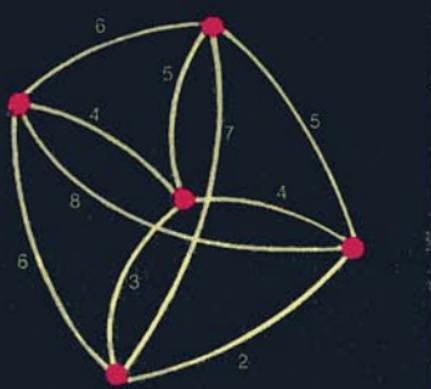
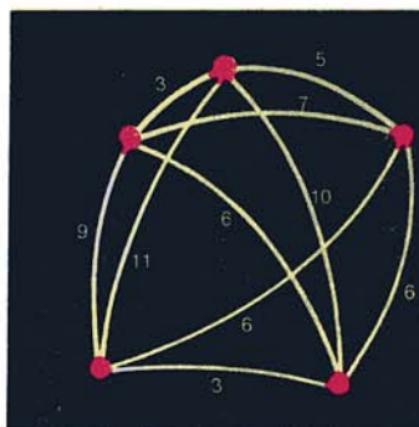
Множество с определенным на нем расстоянием («метрикой») называется метрическим пространством\*). Сами элементы  $x$  при этом называются обычно точками метрического пространства.

Прочтем еще раз формулировки аксиом, которым должна удовлетворять функция  $\rho$  от пар точек, задающая расстояние.

1°. Расстояние от  $a$  до  $b$  равно 0 тогда и только тогда, когда  $a$  совпадает с  $b$ .

2°. Расстояние от  $a$  до  $b$  равно расстоянию от  $b$  до  $a$  («аксиома симметрии»).

На этих рисунках для каждого пары точек указано «расстояние» между ними. Выполняется ли для этого «расстояния» аксиома 3° метрического пространства?



\* ) Корень «метр» встречается во многих русских словах и происходит от слова метр — мера, размер.

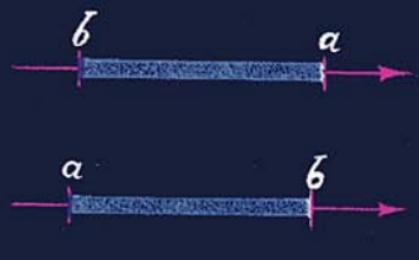


Рис. 2, а.

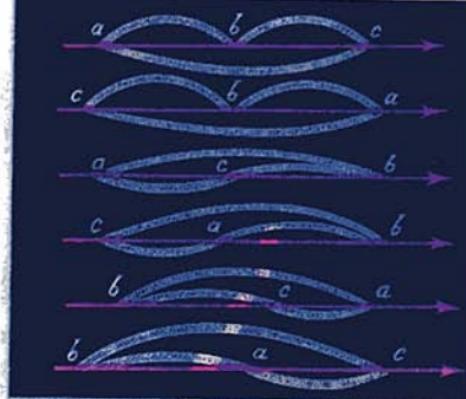


Рис. 2, б.

$3^\circ$ . Расстояние от  $a$  до  $c$  не больше суммы расстояний от  $a$  до  $b$  и от  $b$  до  $c$  («аксиома треугольника»).

Начнем с самых простых примеров метрических пространств.

Пример 1.  $X$  — числовая прямая, то есть множество всех вещественных чисел<sup>\*</sup>). Расстояние  $\rho$  определяется по формуле

$$\rho(x, y) = |x - y|. \quad (1)$$

Напомним, что  $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$ , если  $\alpha \geq \beta$  и  $\beta - \alpha$ , если  $\beta \geq \alpha$ , так что во всех случаях  $\rho(a, b)$  равно длине отрезка числового оси с концами  $a$  и  $b$  (рис. 2, а).

Проверим, что  $\rho$  удовлетворяет всем трем требованиям  $1^\circ$ — $3^\circ$ . Очевидно, что  $|\alpha - \beta| = 0$  в том и только в том случае, если  $\alpha = \beta$ , и что всегда  $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$ .

Неравенство  $3^\circ$  тоже почти очевидно (рис. 2, б). В каждом из возможных случаев взаимного расположения точек  $a$ ,  $b$  и  $c$  на прямой, включая такие, когда две из точек  $a$ ,  $b$  и  $c$  совпадают, неравенство

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c| \quad (2)$$

легко доказать и формально, не ссылаясь на рисунок. Например, если  $b \leq a \leq c$  (нижний рис. 2, б), то

$$|a - c| = c - a,$$

$$|a - b| + |b - c| = a - b + c - b = a + c - 2b \geq a + c - 2a = c - a,$$

и поэтому верно (2).

Пример 2.  $X$  — любое множество,

$$\rho(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{если } a = b, \\ 1, & \text{если } a \neq b. \end{cases} \quad (3)$$

Все аксиомы  $1^\circ$ — $3^\circ$ , очевидно, выполнены. Это, как говорят, «дискретное» пространство, в нем все точки стоят как бы отдельно, не слишком близко друг к другу.

Пример 3, о котором мы уже немного говорили выше. Предположим, что у нас есть план Москвы, на котором перечислены все остановки городского транспорта и для каждого промежутка между остановками указано, за сколько минут проходит этот промежуток автобус (соответственно трамвай, метро, троллейбус). С помощью такого плана для любых двух

\*). Это множество обычно обозначается буквой  $R$ .

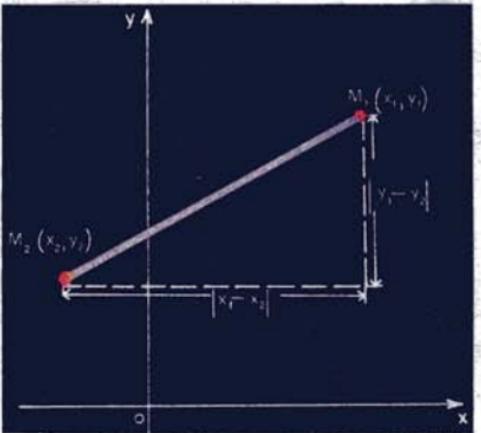


Рис. 3.

Москве стало много улиц с односторонним движением, может, конечно, нарушаться. Проверьте, что для функции

$$t'(a, b) = \frac{t(a, b) + t(b, a)}{2}$$

выполнены уже все свойства  $1^\circ$ — $3^\circ$ .

Вот еще один пример, когда расстояние измеряется не в километрах.

Пример 3'. Пусть  $X$  — множество городов СССР, куда летают самолеты, и  $\rho(a, b)$  — стоимость билета (в рублях) из города  $a$  в город  $b$  (по наиболее дешевому маршруту). Нетрудно видеть, что это — метрическое пространство.

## МЕТРИКИ НА ПЛОСКОСТИ

Занявшись несколько экзотическими примерами метрических пространств, мы оставили в стороне самый естественный.

Пример 4.  $X$  — множество всех точек плоскости,  $\rho$  — обычное расстояние, с которым мы имеем дело в школьной геометрии, то есть  $\rho(A, B)$  — длина отрезка, соединяющего две точки  $A$  и  $B$ . Свойства  $1^\circ$  и  $2^\circ$  здесь и во всех следующих примерах совершенно очевидны, и мы не будем больше о них говорить. А свойство  $3^\circ$  здесь — не что иное, как утверждение «в треугольнике каждая сторона не больше суммы двух других» \*). При обычном построении курса геометрии это утверждение является несложной теоремой.

Вы, вероятно, знаете, что на плоскости с прямоугольной системой координат  $Oxy$  расстояние  $\rho(M_1, M_2)$  между двумя точками  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$  выражается такой формулой (см. рис. 3):

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (4)$$

Таким образом, то же самое метрическое пространство можно описать без всяких ссылок на геометрию следующим образом:  $X$  — множество всех пар  $(x, y)$  вещественных чисел \*\*), расстояние между парами  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  задается формулой (4). Но при этом, чтобы проверить свойство  $3^\circ$ ,

\* Случай, когда три точки лежат на одной прямой, мы уже разобрали выше (пример 1).

\*\*) Это множество имеет специальное обозначение  $R^2$  и называется числовой плоскостью.

остановок  $a$  и  $b$  можно найти величину  $t(a, b)$  — минимальное время, необходимое для того, чтобы попасть из  $a$  в  $b$  (не будем в нашей «модели» учитывать время, затраченное на пересадку с одного вида транспорта на другой и на ожидание, хотя и это можно сделать). Проверим, выполняются ли для функции  $t$  свойства  $1^\circ$ — $3^\circ$ ; другими словами, будет ли множество всех остановок  $X$  с расстоянием  $t$  метрическим пространством. Свойство  $1^\circ$ , как всегда, очевидно;  $3^\circ$  тоже не вызывает сомнений: ясно, что можно ехать из  $a$  в  $c$  через  $b$ , поэтому минимальное время  $t(a, c)$  заведомо не больше  $t(a, b) + t(b, c)$ . А вот свойство  $2^\circ$ , особенно теперь, когда в

пришлось бы доказывать такое неравенство:

$$\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} + \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}.$$

Попробуйте сделать это! Удобно ввести специальные обозначения:  $x_1 - x_2 = u_1$ ,  $x_2 - x_3 = u_2$ ,  $y_1 - y_2 = v_1$ ,  $y_2 - y_3 = v_2$ ; тогда  $x_1 - x_3 = u_1 + u_2$ ,  $y_1 - y_3 = v_1 + v_2$ , и последнее неравенство записывается несколько короче:

$$\sqrt{(u_1 + u_2)^2 + (v_1 + v_2)^2} \leq \sqrt{u_1^2 + v_1^2} + \sqrt{u_2^2 + v_2^2}$$

(кстати, подобная замена обозначений сильно сократила бы и доказательство неравенства (2)). После двукратного возвведения в квадрат и упрощения вы получите эквивалентное очевидное неравенство

$$u_1^2 v_2^2 + u_2^2 v_1^2 \geq 2u_1 u_2 v_1 v_2 \Leftrightarrow (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 \geq 0.$$

Подумайте, когда это неравенство обращается в равенство? Что это означает на геометрическом языке?

В принципе все геометрические теоремы можно было бы доказывать на числовой плоскости чисто алгебраически и таким образом построить курс геометрии; но, как видите, доказательства теорем на этом пути не всегда становятся проще,— вместо «неравенства треугольника» нам пришлось доказывать довольно хитрое алгебраическое неравенство.

Мы уже говорили о том, что на одном и том же множестве можно по-разному определять расстояния. Вот два примера метрик на числовой плоскости  $R^2$ , отличных от (4).

Пример 5.

$$\rho'(M_1, M_2) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \quad (5)$$

то есть  $\rho'(M_1, M_2)$  равно сумме длин проекций отрезка  $M_1 M_2$  на оси  $Ox$  и  $Oy$ .

Пример 6.

$$\rho''(M_1, M_2) = \max \{ |x_1 - y_1|, |x_2 - y_2| \} \quad (6)$$

(запись  $\max \{a, b\}$  означает наибольшее из чисел  $a, b$ ) то есть  $\rho''(M_1, M_2)$  равно наибольшей из длин проекций отрезка  $M_1 M_2$  на оси  $Ox$  и  $Oy$ .

Неравенство треугольника в двух последних примерах легко доказывается с помощью неравенства (2). Скажем, для  $\rho''$ :

$$|x_1 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| \leq \max \{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \} + \max \{ |x_2 - x_3|, |y_2 - y_3| \}, \text{ и } |y_1 - y_3| \leq |y_1 - y_2| + |y_2 - y_3| \leq$$

$$\leq \max \{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \} + \max \{ |x_2 - x_3|, |y_2 - y_3| \},$$

поэтому наибольшее из двух чисел  $|x_2 - x_3|, |y_2 - y_3|$  не превосходит  $\rho''(x_1, x_2) + \rho''(x_2, x_3)$ .

Точно так же на множестве  $R^3$  всех наборов  $(x, y, z)$  из трех вещественных чисел расстояние между «точками»  $(x_1, y_1, z_1)$  и  $(x_2, y_2, z_2)$  можно задать любой из формул

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}, \quad (4')$$

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|, \quad (5')$$

или

$$\max \{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|, |z_1 - z_2| \}. \quad (6')$$

В случае (4') мы получаем обычное трехмерное пространство, которое изучает школьная стереометрия и которое является удобной абстракцией реального пространства, в котором мы живем. Все аналогичные  $m$ -мерные пространства ( $m = 2, 3, 4, \dots$ ) также полезны — с их помощью удобно строить всю теорию функций от  $m$  переменных, причем иногда удобнее пользоваться одной формулой для расстояния, иногда — другой.

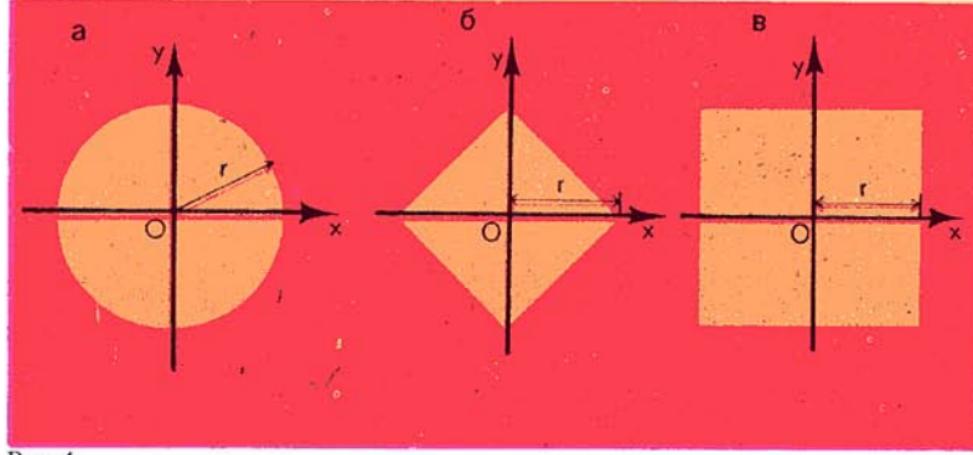


Рис. 4.

## ОКРЕСТНОСТИ

Вернемся теперь в двумерное пространство — на плоскость  $R^2$  — и обсудим один наглядный способ сравнивать разные расстояния (4)–(6).

Пусть точка  $O=(0, 0)$  — начало координат. Найдем множество точек, находящихся от точки  $O$  на расстоянии, меньшем заданного числа  $r$ . Все знают, что это множество — внутренность круга с центром  $O$  радиуса  $r$  (рис. 4, а); разумеется, речь идет о расстоянии (4), то есть о множестве точек  $(x, y)$ , для которых  $\sqrt{x^2 + y^2} < r$ . А каковы будут «круги радиуса  $r$ », если расстояние определять по формуле (5) или (6)? Множество точек  $(x, y)$ , для которых  $|x| + |y| < r$  — это внутренность квадрата с вершинами  $(0, r)$ ,  $(-r, 0)$ ,  $(0, -r)$  и  $(r, 0)$  (рис. 4, б); а множество точек таких  $|x|, |y| < r$ , другими словами, множество точек, для которых одновременно  $|x| < r$  и  $|y| < r$  — это, очевидно, квадрат с вершинами  $(-r, -r)$ ,  $(-r, r)$ ,  $(r, -r)$  и  $(r, r)$  (рис. 4, в).

Обычно, когда речь идет о метрических пространствах, вместо слов «круг радиуса  $r$  с центром  $a$ » говорят « $r$  окрестность точки  $a$ ».

**Определение 1.** Пусть  $X$  — метрическое пространство,  $\rho$  — расстояние в  $X$ ,  $r$  — положительное число. Тогда  $r$ -окрестностью точки  $a$  называется множество всех точек  $m$  из  $X$ , для которых  $\rho(m, a) \leq r$ . Коротко это множество можно записать так:  $\{m : \rho(m, a) \leq r\}$ .

Таким образом, на рисунках 4, а, б, в изображены  $r$ -окрестности точки  $(0, 0)$ , если расстояние на плоскости задается соответственно формулами (4), (5) и (6); нетрудно сообразить, что  $r$ -окрестность любой другой точки  $(x_0, y_0)$  в этих метрических пространствах выглядит точно так же, как окрестность точки  $(0, 0)$  — просто центр круга или квадрата сдвигается в точку  $(x_0, y_0)$ .

Посмотрим, что представляют собой  $r$ -окрестности в метрических пространствах, о которых мы говорили раньше. В примере 1  $r$ -окрестность точки  $a$  числовой оси

$$\{x : |x - a| \leq r\}$$

— это отрезок длины  $2r$ , середина которого лежит в точке  $a$  (рис. 5). В примере 3' 20-окрестность Москвы — это множество городов, куда можно улететь на самолете не более чем за 20 рублей; в примере 2  $r$ -окрестность состоит всего из одной точки, если  $r < 1$ , и содержит все множество  $X$ , если  $r \geq 1$ .

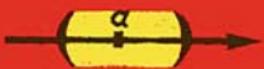


Рис. 5.



Рис. 6.

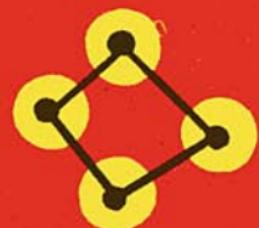


Рис. 7.

## РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ

Расстояние удобно определяется не только для чисел или точек плоскости и пространства, но и для многих других математических объектов. Вот два примера из геометрии. На множестве всех прямых, проходящих через данную точку  $O$ , за расстояние между двумя прямыми можно принять величину меньшего из образуемых ими углов (на рисунке 6 показано, как выглядит окрестность одной из прямых). Расстояние между двумя выпуклыми многоугольниками  $M_1$  и  $M_2$  на плоскости можно определить так: для каждой вершины многоугольников  $M_1$  и  $M_2$  находим расстояние \*) до ближайшей к ней вершине другого многоугольника, и из всех этих чисел берем наибольшее; таким образом, в  $r$ -окрестность данного многоугольника  $M_0$  (рис. 7) попадают такие многоугольники  $M$ , у которых все вершины лежат в кружках радиуса  $r$  с центрами в вершинах  $M_0$ , причем в каждом кружке лежит хотя бы одна вершина  $M$ ; проверьте, что множество выпуклых многоугольников с таким расстоянием — метрическое пространство. Число таких примеров легко можно было бы увеличить.

Но наиболее важные применения, которым теория метрических пространств обязана своим возникновением и развитием, связаны не с геометрией, а с анализом и теорией функций.

Очень часто, чтобы исследовать данные функции или просто вычислять их значения, удобно приближенно заменить их другими, более простыми функциями, скажем, многочленами. Вы, вероятно, слышали, что при  $x$ , близком к нулю,  $\sin x$  приближенно равен  $x$  (здесь  $\sin x$  означает синус числа  $x$ , то есть синус угла в  $x$  радианов). Еще более точная формула:  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ . Пусть, например,  $x$  изменяется на отрезке  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ .

Как оценить, насколько хорошо функция  $f_1(x) = x - \frac{x^3}{6}$  приближает функцию  $f_2(x) = \sin x$ , как велико «расстояние» между этими функциями? Одно из естественных расстояний такое: найдем при каждом  $x$  разность  $f_1(x) - f_2(x)$ , возьмем то  $x = x_0$ , где эта разность наибольшая (по модулю), и положим  $\rho(f_1, f_2) = |f_1(x_0) - f_2(x_0)|$ .

\*) Имеется в виду «обычное» расстояние (4).

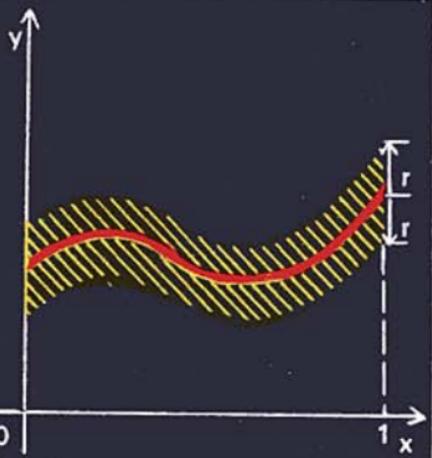


Рис. 8.

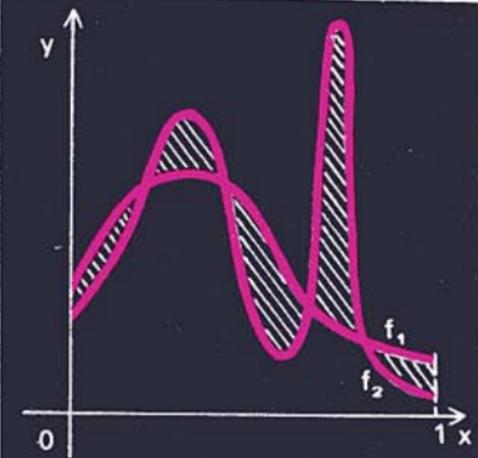


Рис. 9.

Для наших конкретных функций

$$\rho(f_1, f_2) = \left| \sin \frac{\pi}{4} - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{384} \right) \right| \approx 0,0025.$$

(Можно доказать, что максимум достигается в точке  $x = \frac{\pi}{4}$ .)

Точно так же в общем случае примем за расстояние между функциями  $f_1, f_2$ , определенными на отрезке  $[a, b]$ , величину

$$\rho(f_1, f_2) = \max_{a \leq x \leq b} |f_1(x) - f_2(x)|. \quad (7)$$

Проверьте, что аксиомы  $1^\circ - 3^\circ$  здесь выполнены! При этом  $r$ -окрестность данной функции (рис. 8) состоит из всех таких функций, графики которых лежат в полосе ширины  $2r$  вокруг графика функции  $f$ .

Очень часто применяются и такие расстояния:

$$\rho(f_1, f_2) = s(f_1, f_2)$$

где  $s$  величина площади, заключенной между графиками  $f_1$  и  $f_2$  (рис. 9) и особенно такое:

$$\rho(f_1, f_2) = \sqrt{S(f_1, f_2)}, \quad (9)$$

где  $S(f_1, f_2)$  — величина площади, заключенной между графиком функции  $y = (f_1(x) - f_2(x))^2$  и осью  $Ox$ .

Расстояние (7) мало, когда значения функций  $f_1$  и  $f_2$  близки для всех значений аргумента, а расстояния (8) и (9) показывают, насколько функции  $f_1$  и  $f_2$  близки «в среднем» (на небольших отрезках они могут значительно отличаться друг от друга). Пусть, например,  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  — потенциалы двух определенных точек электрической цепи в момент времени  $t$ ; тогда мощность выделяющаяся на участке цепи между этими точками за промежуток времени  $a \leq t \leq b$ , пропорциональна  $S(f_1, f_2)$  (сопротивление постоянное; мощность пропорциональна  $(f_1(t) - f_2(t))^2$ ); таким образом, мощность тем больше, чем больше расстояние (9). А если нам важно, чтобы напряжение  $f_1(t) - f_2(t)$  в с e в р e м я не превышало какой-то величины  $V$ , то мы должны оценивать расстояние по формуле (7): нужно, чтобы величина  $\max_{a \leq t \leq b} |f_1(t) - f_2(t)|$  не превосходила  $V$ .

Заметим, что мы здесь не даем точных формулировок, что значит «площадь между двумя графиками», и не обсуждаем, для каких функций можно ввести расстояния (8) и (9); то же самое относится и к расстоянию (7) — ясно, что оно определено не для любых, даже не для любых ограниченных функций. Например, если одна из функций  $f_1(x)=0$  для всех  $x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , а другая  $f_2(x)=x$ , если  $0 \leq x < 1$ , и  $f_2(1)=0$ , то нет такой точки  $x$ , где  $|f_2(x) - f_1(x)|$  достигает максимума. Всем этим тонкостям уделяется много места в учебниках математического анализа.

## ЕЩЕ ДВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для математика термин « $r$ -окрестность» звучит не очень привычно. Гораздо чаще говорят « $\varepsilon$ -окрестность» или « $\delta$ -окрестность»; дело в том, что греческие буквы  $\varepsilon$  и  $\delta$  обычно употребляются для обозначения положительных чисел, которыми оценивают небольшие отклонения или точность приближения, и по традиции фигурируют в определении основного понятия теории метрических пространств — понятия предела.

Определение 2. Точка  $A$  называется пределом последовательности  $M_1, M_2, M_3, \dots$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует такой номер  $n$  (зависящий от  $\varepsilon$ ), что все члены последовательности, начиная с  $x_n$ , содержатся в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $A$ . (Здесь  $M_1, M_2, M_3, \dots$  и  $A$  — точки метрического пространства  $X$ .)

Подчеркнем, что это определение годится для любого метрического пространства, то есть мы сразу дали определение предела и для чисел на прямой, и для точек на плоскости, и для прямых (проходящих через одну точку) на плоскости, и для функций, определенных на отрезке.

Например, можно доказать, что функция  $f(x)=\sin x$ ,  $a \leq x \leq b$ , является пределом последовательности функций  $f_1, f_2, f_3, \dots$ , где

$$f_n(x) = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots - (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdots (2n-1)}$$

— независимо от того, каким расстоянием пользоваться: (7), (8) или (9) и какие числа взять в роли  $a$  и  $b$ .

Определение 3. Пусть  $X$  и  $Y$  — два метрических пространства,  $F$  — отображение множества  $X$  в  $Y^*$ );  $x_0$  — точка в  $X$ ,  $F(x_0)=y_0$ . Тогда  $F$  называется непрерывным в точке  $x_0$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется такое  $\delta$  (зависящее от  $\varepsilon$ ), что все точки из  $\delta$ -окрестности  $x_0$  отображаются в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $y_0$ .

Наглядно можно представить себе дело так: функция «рвется» в точке  $x_0$ , если для точки  $x$ , даже очень близкой к  $x_0$ , значение функции может оказаться далеко отстоящим от  $y_0$ . Легко доказывается, что любая «школьная» функция представляет собой отображение своей области определения  $E$  в числовую прямую, непрерывное в каждой точке  $E$ . Вот пример непрерывного отображения множества выпуклых многоугольников (мы говорили на странице 17 о том, как превратить его в метрическое пространство) в числовую прямую: каждому многоугольнику ставится в соответствие его площадь.

Понятия предела и непрерывной функции будут еще, несомненно, обсуждаться на страницах нашего журнала. Оказывается, используя только основные свойства расстояния  $1^\circ$ — $3^\circ$ , можно доказать многие теоремы, связанные с этими понятиями.

Теория метрических пространств, возникшая в начале XX века в работах Фреше и Хаусдорфа (прекрасная книга *Mengelehre* которого переведена

\*) То есть функция с областью определения  $X$ , принимающая значения в  $Y$  (см. статью А. Н. Колмогорова «Что такое функция», «Кvant», № 1).

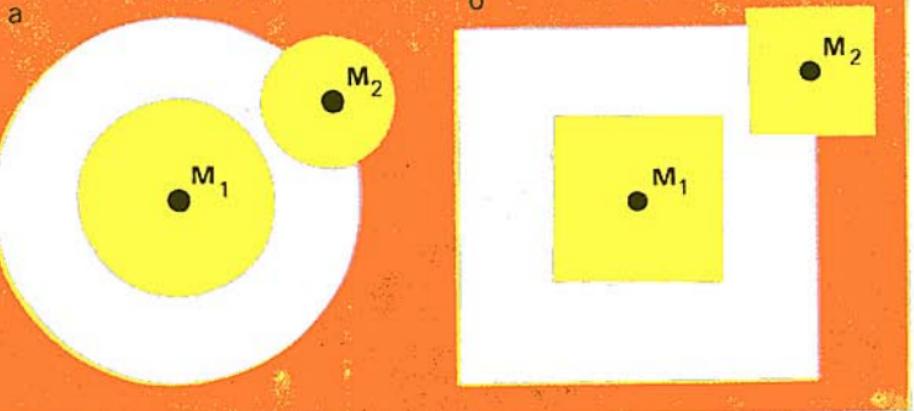


Рис. 10.

на на русский язык \*), излагается сейчас в первых главах учебников с такими, приблизительно, названиями, как «Элементы функционального анализа», «Введение в теорию множеств и функций», «Основы современного анализа», «Топологические пространства». Разумеется, большая часть этой теории, связанная с понятием предела, содержательна только для пространств с бесконечным числом точек. Но в то же время общее понятие «расстояния» полезно и для некоторых задач про конечные множества; в частности, «расстояние между словами», о котором мы говорили в начале статьи, оказалось очень удобным инструментом в бурно развивающейся сейчас теории кодов, исправляющих ошибки. Тем, кто хочет более подробно познакомиться с теорией метрических пространств, рекомендуем прочитать книжку Ю. А. Шрейдера \*\*) «Что такое расстояние».

### Задачи

1. Докажите, что для любых четырех точек  $A, B, C, D$  метрического пространства  $\rho(A, C) + \rho(B, D) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C) + \rho(C, D) + \rho(D, A)$ .

2. Докажите, что для любых  $n$  точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $n \geq 3$ )  $\rho(A_1, A_2) + \rho(A_2, A_3) + \dots + \rho(A_{n-1}, A_n) \geq \rho(A_1, A_n)$ .

3. Доктор Шарадек, знающий хорошо стратегию, интересовался последней войной и в 1940 году познакомился с картой французского театра военных действий. Отсюда, вероятно, и возникла следующая задача. Расстояние (по воздуху, как и все расстояния в этой задаче) из Шалона до Витри равно 30 км, из Витри до Шомона 80 км, из Шомона до Сэн — Кантэна 235 км, из Сэн — Кантэна до Ремса 86 км, из Ремса до Шалона 40 км. Вычислить в этом замкнутом многоугольнике расстояние от Ремса до Шомона. Без карты это умеет делать только доктор Шарадек \*\*\*).

4. а) Докажите, что если  $\rho(M_1, M_2) = r$  и  $r_1 + r_2 < r$ , то  $r_1$ -окрестность точки  $M_1$  не имеет общих точек с  $r_2$ -окрестностью точки  $M_2$  (рисунок 10 иллюстрирует этот факт для расстояний (4) и (6) на плоскости).

б) Докажите, что если  $\rho(M_1, M_2) = r$  и  $r_1 - r > r_2$ , то  $r_2$ -окрестность точки  $M_2$  целиком содержитя в  $r_1$ -окрестности точки  $M_1$ .

5. Множество  $E$  точек метрического пространства  $X$  называется  $\varepsilon$ -сетью, если  $\varepsilon$ -окрестности точек множества  $E$  (все вместе) целиком покрывают множество  $X$ ; другими словами, если для каждой точки  $x$  из  $X$  найдется хотя бы одна точка множества  $E$ , отстоящая от  $x$  не более чем на  $\varepsilon$ . (Здесь  $\varepsilon$  — некоторое положительное число.)

Например, множество черных точек на рисунке 11, а является  $\frac{1}{10}$ -сетью для отрезка числовой оси  $0 \leq x \leq 1$  с обычным расстоянием (2). Разумеется, оно является также  $\varepsilon$ -сетью при

\* ) Хаусдорф, Теория множеств, ОНТИ, 1934.

\*\*) Ю. А. Шрейдер, «Что такое расстояние» М. Физматгиз, 1963.

\*\*\*) Г. Штейнгауз, Сто задач, Физматгиз, 1959, задача № 100.

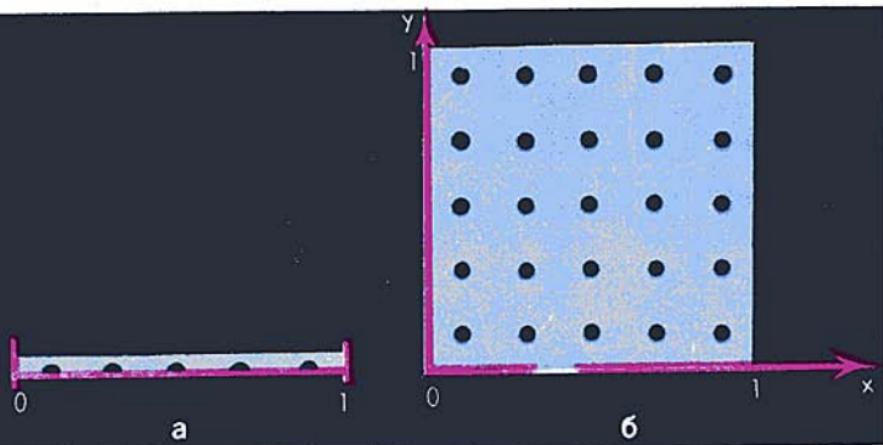


Рис. 11.

любом  $\varepsilon > \frac{1}{10}$ . На рисунке 11, б множество черных точек является  $\frac{1}{10}$  — сетью для квадрата  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  на плоскости  $Oxy$  с расстоянием (6). Для каких  $\varepsilon$  это же множество является  $\varepsilon$ -сетью в смысле расстояний (4) и (5) на том же квадрате?

6. Метрическое пространство  $X$  называется ограниченным, если существует такое число  $c$ , что расстояние между любыми двумя точками  $X$  не превосходит  $c$ .

Докажите, что если при каком-нибудь  $\varepsilon$  пространство имеет конечную  $\varepsilon$ -сеть, то оно ограничено.

7. Пусть  $N(\varepsilon)$  — наименьшее число точек в  $\varepsilon$ -сети пространства  $X$ ,  $M(\varepsilon)$  — наибольшее число точек в  $X$ , расстояния между любыми двумя из которых не меньше  $\varepsilon$ .

Докажите, что  $M(2\varepsilon) \leq N(\varepsilon) \leq M(\varepsilon)$ .

8. Пусть  $C$  — множество функций, определенных на отрезке  $[0, 1]$  и принимающих значения на том же отрезке, графики которых — ломаные линии. Будем определять расстояние в  $C$  по формуле (7).

Доказать, что можно выбрать бесконечное количество функций из  $C$ , все попарные расстояния между которыми равны единице. Вывести отсюда, что при  $\varepsilon < \frac{1}{2}$  в  $C$  нельзя выбрать конечную  $\varepsilon$ -сеть.

9. Может ли в некотором метрическом пространстве быть так, что 3-окрестность точки  $A$  целиком содержитя в 2-окрестности другой точки  $B$  и не заполняет ее целиком? Каков будет ответ, если заменить 3 и 2 другими числами?

10. Доказать, что среди  $n$ -значных чисел из двух цифр 1 и 2 нельзя выбрать более чем  $\frac{2^n}{n+1}$  чисел так, чтобы любые два из них отличались друг от друга по крайней мере в трех разрядах.

11. С помощью задачи 4 а) докажите, что две разные точки  $A$  и  $B$  не могут быть пределами одной и той же последовательности.

12. Постройте пример последовательности функций, определенных на отрезке  $[0, 1]$ , которая стремится к пределу  $f_0$ , если пользоваться расстоянием (8), и не имеет  $f_0$  пределом, если пользоваться расстоянием (7).

13. Пусть  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — два расстояния на некотором множестве  $X$  — обладают тем свойством, что  $\rho_1(A, B) \leq k\rho_2(A, B)$  для любых двух точек  $A$  и  $B$ , где  $k$  — некоторое положительное число (одно и то же для всех  $A$  и  $B$ ).

Докажите, что если  $P$  является пределом последовательности  $M_1, M_2, M_3, \dots$  в смысле расстояния  $\rho_2$ , то  $P$  будет пределом этой последовательности в смысле расстояния  $\rho_1$ . Пользуясь этим, докажите, что на плоскости утверждение «пределом последовательности  $M_1, M_2, M_3, \dots$  является точка  $P$ » имеет один и тот же смысл, независимо от того, каким из расстояний (4), (5), (6) мы пользуемся.

14 а). Придумайте расстояние  $\rho$  на множестве всех прямых на плоскости, для которого выполнялось бы следующее условие: если последовательности точек  $A_1, A_2, A_3, \dots$  и  $B_1, B_2, B_3, \dots$  имеют пределами две различные точки  $A$  и  $B$ , то последовательность прямых  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$  имеет (в смысле расстояния  $\rho$ ) пределом прямую  $AB$ .

б) Докажите, что подобное расстояние  $\rho$  нельзя задать так, чтобы расстояние между любыми двумя пересекающимися прямыми зависело только от угла между ними.