А. А. КИРСАНОВ

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

МАТРИЦЫ. ДЕТЕРМИНАНТЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}$$

ПСКОВ 2002

ББК 22.143я73
К435

Печатается по решению кафедры алгебры и геометрии,
и редакционно-издательского совета ПГПИ им. С.М. Кирова

Рецензент: **Медведева И.Н.**, кандидат физ. мат. наук, доцент кафедры алгебры и геометрии ПГПИ им. С.М. Кирова.

Кирсанов А.А.
К435 Задачник-практикум по линейной алгебре. Матрицы. Детерминанты. Системы линейных уравнений. Псков: ПГПИ, 2002. - 56 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для проведения практических занятий и выполнения самостоятельных заданий по теме «Матрицы, детерминанты и системы линейных уравнений» в курсе линейной алгебры.

К435

Издано в авторской редакции.

1. Матрицы

Таблица чисел (вещественных или комплексных)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

называется *прямоугольной матрицей* порядка $m \times n$.

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ образуют i-ю строку, а элементы $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ - j-й столбец матрицы A. Элемент a_{ij} лежит на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы A и мы будем всегда иметь в виду, что *первый индекс обозначает номер строки, второй - номер столбца.*

В некоторых случаях матрицу (1) удобнее записать в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

В данном случае *индекс стоящий вверху обозначает номер строки, внизу - номер столбца.*

Если число строк совпадает с числом столбцов, т.е. $m = n$, то такая матрица называется *квадратной матрицей порядка* n. В частности при $n = 1$ мы имеем квадратную матрицу состоящую из одной строки и одного столбца - просто число.

Матрицу, состоящую из одной строки

$$a^1 = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \end{pmatrix}$$

будем называть *матрицей строкой* длины n, а матрицу, состоящую из одного столбца

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \dots \\ a_1^m \end{pmatrix}$$

будем называть *матрицей столбцом* высоты m. Используя приведённые выше обозначения можно матрицу (2) записать так:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \dots \\ a^m \end{pmatrix}.. \qquad (3)$$

В качестве примера матрицы строки (матрицы столбца) можно представить упорядоченную пару чисел $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ представляющие собой, например, матричную запись вектора $\vec{A} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$.

Матрицу A будем называть нулевой $A = \mathrm{O}$, если все её элементы равны нулю.

Например: $\mathrm{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Если строки матрицы B состоят из соответствующих столбцов матрицы A, т.е. $b_{ik} = a_{ki}$, матрицу B будем называть *транспонированной* по отношению к матрице A и обозначать как $B = A^T$. Заметим, что $B^T = \left(A^T\right)^T = A$.

Если A квадратная матрица, то её элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют *главную диагональ* матрицы и называются диагональными, а их сумма называется *следом* матрицы и обозначается как $\mathrm{tr}A$ или $Sp A$.

Например: $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\\ 3 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$, $\mathrm{tr}A=10$.

Если все элементы квадратной матрицы кроме диагональных равны нулю, то матрицу будем называть *диагональной*.

Например: $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

Диагональную матрицу у которой элементы на главной диагонали равны единице назовём *единичной матрицей* и обозначим как E.

Например: $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Пусть $M_{m\times n}$ множество матриц размера $m\times n$. Определим на этом множестве линейные операции сложения матриц и умножения матрицы на число из поля K.

Суммой двух матриц $A, B\in M_{m\times n}$ будем называть матрицу $C\in M_{m\times n}$, $C=A+B$, если элементы матрицы C связаны с соответствующими элементами матриц A и B соотношениями

$$c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}.$$

Произведением числа $l\in K$ и матрицы $A\in M_{m\times n}$ будем называть матрицу $B\in M_{m\times n}$, элементы которой определены соотношениями $b_{ik}=l a_{ik}$.

Матрицу $(-1)A = -A$ будем называть матрицей *противоположной* матрице A.

С помощью понятия линейных операций мы можем из матриц $A_i \in M_{m\times n}$ и чисел $a_i \in K$ составить *линейную комбинацию*

$$a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots + a_kA_k \tag{4}$$

снова принадлежащую $M_{m\times n}$.

Если какая-то матрица представлена в виде линейной комбинации (4), то мы можем сказать, что она *разложена* по матрицам линейной комбинации

$$A = a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots + a_kA_k .$$

Нулевая матрица O всегда может быть разложена в линейную комбинацию (4) если положить все $a_i = 0$. Такая комбинация называется *тривиальной*.

Систему матриц $A_i \in M_{m\times n}$ будем называть *линейно независимой*, если нулевая комбинация раскладывается по ней однозначно, т.е. если

$$a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots + a_kA_k = \mathrm{O}, \tag{5}$$

то все $a_i = 0$, в противном случае (5) называется *линейно зависимой* комбинацией.

Строки (столбцы) любой матрицы мы можем рассматривать как матрицы строки (матрицы столбцы). Составляя из них линейные комбинации мы можем определить их линейную зависимость или независимость.

Для некоторых матриц A и B может быть определено их *произведение* AB. Это возможно если *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй*.

Так, если матрица A имеет размеры $m\times n$, а B имеет размеры $n\times q$, то матрица $C = AB$ будет иметь размер $m\times q$, а её элементы будут определены соотношениями

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \ , \ i = 1,\ldots,m \, , \ j = 1,\ldots,q \, . \qquad (6)$$

Следует отметить, что в общем случае $AB \neq BA$, т.е. матрицы A и B не коммутируют .

Если окажется, что $AB = BA$, то тогда говорят, что матрицы A и B *коммутируют*.

Над строками (столбцами) матриц можно совершать *элементарные преобразования*:

а) умножение строки (столбца) на число $a \neq 0$;

б) прибавление одной строки (столбца) к другой строке (столбцу).

Более сложные преобразования, которые могут быть сведены к элементарным преобразованиям:

прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца)

в) умноженным на число $a \neq 0$;

г) вычитание строк (столбцов);

д) перестановка двух строк (столбцов).

Отличие числа a от нуля обеспечивает обратимость элементарных преобразований.

Каждое элементарное преобразование строк (столбцов) матрицы A размеров $m \times n$ равносильно умножению матрицы A слева (справа) на некоторую квадратную матрицу S прядка m (n), причём матрица S не зависит от матрицы A, а полностью определяется выполняемым ею преобразованием. Матрицу S будем называть *элементарной* матрицей.

Квадратную матрицу с линейно зависимыми строками (столбцами) будем называть *вырожденной*. Примерами вырожденных матриц могут служить матрицы с нулевой строкой или двумя пропорциональными строками. Важными примерами невырожденных матриц могут служить единичная матрица и элементарные матрицы.

С помощью элементарных преобразований каждая невырожденная матрица может быть сведена к единичной, а каждая вырожденная может быть сведена к матрице с последней нулевой строкой.

Каждая невырожденная матрица A имеет *обратную* матрицу A^{-1} такую, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Вырожденная матрица не имеет обратной.

Пусть в матрице $\mathbf{A}$ размера $m \times n$ существует линейно независимая система из r строк и нет линейно независимой системы из большего числа строк. В этом случае говорят, что матрица $\mathbf{A}$ имеет ранг r:

$$Rg\mathbf{A} = r .$$

В матрице $\mathbf{A}$ в этом случае найдётся и r линейно независимых столбцов, а значит, и невырожденная квадратная подматрица размера r.

Линейно независимую систему столбцов (строк) матрицы будем называть базисными столбцами (строками).

Каждый столбец (строка) матрицы раскладывается в линейную комбинацию её базисных столбцов (строк0.

Линейные зависимости между столбцами матрицы не меняются при элементарных преобразованиях строк.

Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях матрицы.

Ранг произведения двух матриц не превосходит рангов сомножителей.

Матрица $\mathbf{A}$ размеров $m \times n$ называется упрощённой, если некоторые r её столбцов являются первыми r столбцами единичной матрицы порядка m, а в случае $m > r$ её последние $m - r$ строк нулевые.

1.1. Сложить матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. Нам даны две матрицы строки одинакового размера и, следовательно, можно определить их сумму

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1-2 & 3+0 & 5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

1.2. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.

Найти их линейную комбинацию $2A+4B$.

Решение. Заданы квадратные матрицы одного порядка и мы можем составить их линейную комбинацию

$$2A+4B=2\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}6 & 10\\ 8 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8 & 12\\ 4 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 22\\ 12 & -6\end{pmatrix}.$$

1.3. Вычислить линейную комбинацию матриц:

1. $4\begin{pmatrix}5\\ 6\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}6\\ 10\end{pmatrix}$;

2. $5\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2 & 2+2i\\ -i & 3\end{pmatrix}$;

4. $10\begin{pmatrix}3 & 5 & -7\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}6 & 25 & -7\end{pmatrix}$.

1.4. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}7 & 5 & 3\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 5 & 8\end{pmatrix}$.

Какую матрицу B нужно прибавить к данной матрице, чтобы получить единичную матрицу E.

Решение. Искомая матрица может быть определена из уравнения $A+B=E$, или

$$B=E-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7&5&3\\1&2&4\\3&5&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&-5&-3\\-1&-1&-4\\-3&-5&-7\end{pmatrix}.$$

1.5. Найти матрицу X если:

1. $\begin{pmatrix}2&3&5\end{pmatrix}+2X=\begin{pmatrix}4&5&7\end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}-3X=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$;

3. $4X-\begin{pmatrix}4&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&4\\8&5\end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix}1&1+i\\1-i&2\end{pmatrix}-X=\begin{pmatrix}5&3+2i\\5-5i&5\end{pmatrix}$.

1.6. Найти матрицу транспонированную к матрице

$$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{pmatrix}.$$

Решение. Строки транспонированной матрицы A^T состоят из соответствующих столбцов матрицы A.

$$A^T=\begin{pmatrix}a&d\\b&e\\c&f\end{pmatrix}.$$

1.7. Транспонировать матрицы:

1. $\begin{pmatrix}e_1&e_2&e_3&e_4\end{pmatrix}$; **2**. $\begin{pmatrix}\cos x&-\sin x\\\sin x&\cos x\end{pmatrix}$; **3**. $\begin{pmatrix}2+3i\\3-i\end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **5**. $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; **6**. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.8. Вычислить произведение матриц:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; **2**. $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$,

3. $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. **1**. Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B и мы можем составить их произведение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}.$$

2. В данном случае число элементов в столбце матрицы C и число элементов в строке матрицы D могут быть произвольными. В результате перемножения матриц, получится матрица размера 2×4:

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 15 \end{pmatrix}.$$

Данный пример показывает, что матрицу строку можно умножить на матрицу столбец только в том случае, когда длина первой равна высоте второй. Произведение матрицы столбца на матрицу строку возможно всегда, так как число столбцов первой матрицы всегда равно числу строк второй.

3. Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй и мы можем составить их произведение:

$$E\cdot F=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot2+3\cdot0&1\cdot1+3\cdot1&1\cdot0+3\cdot3\\2\cdot2+0\cdot0&2\cdot1+0\cdot1&2\cdot0+0\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&9\\4&2&6\end{pmatrix}.$$

1.9. Вычислить произведение матриц:

1. $\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&0&1\\1&5&4\end{pmatrix}$; **2**. $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2\\7&1\end{pmatrix}$; **3**. $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; **5**. $\begin{pmatrix}3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}$; **6**. $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$;

7. $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^4$; **8.** $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}^n$; **9.** $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}^3$; **10.** $\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}^n$.

1.10. Проверить непосредственным вычислением, что $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$, если

1. $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$; **2.** $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&1&5\\1&0&1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&0&1\\5&3&7\end{pmatrix}$.

1. 11. Найти произведение матриц AB и BA, если

1. $A=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&0&4\\1&2&3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-1&3\\1&2&-1\end{pmatrix}$;

2. $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$;

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$;

4. $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$.

1.12. Найти A^3, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1.13. Найти значение матричного многочлена $2A^2+3A+5E$, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ а } E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.14. Найти значение матричного многочлена A^2+A-E, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.15. В квантовой механике широко используются так называемые *матрицы Паули*:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Составить таблицу умножения матриц Паули

	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1		$\frac{i}{2}\sigma_3$	
σ_2			
σ_3			

.

Решение.

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i/2 \\ i/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i/4 & 0 \\ 0 & -i/4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\sigma_3.$$

1.16. В теории матриц выражение вида $[A, B] = AB - BA$ называют *коммутатором* матриц A и B. Вычислить коммутаторы матриц Паули: $[\sigma_1, \sigma_2]$, $[\sigma_2, \sigma_3]$, $[\sigma_3, \sigma_1]$.

1.17. Установить линейную зависимость или независимость строк (столбцов):

1. $\mathbf{e}_1 = (1 \quad 0 \quad 0)$; $\mathbf{e}_2 = (0 \quad 1 \quad 0)$; $\mathbf{e}_3 = (0 \quad 0 \quad 1)$.

2. $\mathbf{a} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$; $\mathbf{b} = (2 \quad 3 \quad 4 \quad 5)$; $\mathbf{c} = (3 \quad 4 \quad 5 \quad 6)$.

3. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Решение. **1**. Составим из данных строк линейную комбинацию равную нулевой строке:

$$\alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 + \gamma\mathbf{e}_3 = \mathrm{O}, \qquad (*)$$

или

$$\alpha \cdot (1 \quad 0 \quad 0) + \beta \cdot (0 \quad 1 \quad 0) + \gamma \cdot (0 \quad 0 \quad 1) = (0 \quad 0 \quad 0).$$

С другой стороны

$$\alpha \cdot (1 \quad 0 \quad 0) + \beta \cdot (0 \quad 1 \quad 0) + \gamma \cdot (0 \quad 0 \quad 1) =$$
$$= (\alpha \quad 0 \quad 0) + (0 \quad \beta \quad 0) + (0 \quad 0 \quad \gamma) = (\alpha \quad \beta \quad \gamma) = (0 \quad 0 \quad 0).$$

Линейная комбинация (*) равна нулю лишь при $\alpha = \beta = \gamma = 0$, что говорит о линейной независимости данных матриц строк.

1.18. Проверить линейную независимость матриц

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим нулевую линейную комбинацию матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$: $\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} = \mathrm{O}$, или

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta & \beta \\ -\beta & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & \alpha + \beta \\ \alpha - \beta & 2\alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта запись равносильна системе из четырёх уравнений:

$\alpha + 2\beta = 0$,

$\alpha + \beta = 0$,

$\alpha - \beta = 0$,

$2\alpha + \beta = 0$;

решение которой очевидно: $\alpha = \beta = 0$. Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ линейно независимы.

1.19. Проверить линейную независимость матриц:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.20. Разложить матрицу $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ по матрицам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ из 1.18?

1.21. Можно ли разложить матрицу $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 7 & 9\end{pmatrix}$ по матрицам $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ из 1.18?

1.22. Записать данные элементарные преобразования в виде произведения элементарных матриц:

1. $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda a\\ b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\lambda a\\ \lambda a+b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a\\ \lambda a+b\end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a+b\\ b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a+b\\ b-a-b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a+b\\ -a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}b\\ a\end{pmatrix}$.

Решение. **1**. В данном случае мы имеем три элементарные операции: умножение первой строки на $\lambda\neq 0$; прибавление первой строки ко второй и умножение первой строки на $1/\lambda$. Эти операции соответствуют последовательному умножению исходной матрицы на элементарные матрицы, соответствующие указанным выше элементарным преобразованиям:

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a\\ b\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a\\ \lambda a+b\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1/\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda a\\ \lambda a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ \lambda a+b\end{pmatrix}.$$

Или

$$\begin{pmatrix}1/\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ \lambda a+b\end{pmatrix}.$$

1.23. Разложить данные матрицы в произведение элементарных матриц:

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$; **2**. $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; **3**. $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, **4**. $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

Решение. 1. Матрицу $\mathbf{A}$ можно получить если у единичной матрицы к первой строке прибавить вторую, а затем умножить вторую строку на -2. Эти операции соответствуют произведению следующих элементарных матриц:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}.$$

Единичную матрицу можно не писать.

1.24. К каким преобразованиям строк (столбцов) приводят следующие элементарные матрицы:

1. $\mathbf{S}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; **2**. $\mathbf{S}_2=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; **3**. $\mathbf{S}_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$;

4. $\mathbf{S}_3\mathbf{S}_2\mathbf{S}_1$?

1.25. Привести данные матрицы к единичной используя метод Гаусса-Жордана:

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}$; **2**. $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 5 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$; **3**. $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}5 & 3 & 2\\ 6 & 7 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$;

4. $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}5 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$; **5**. $\mathbf{E}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}$.

Решение. **1**. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}$. Так как на пересечении второй строки и первого столбца стоит 1, удобно будет поменять местами первую и вторую строку. Далее вычтем из третьей строки первую, умноженную на 4. Дальнейший ход решения понятен.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&3&2\\1&2&3\\4&0&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&2\\0&-8&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2/3\\0&8&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2/3\\0&0&5/3\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2/3\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

5. $\mathbf{E}=\begin{pmatrix}3&5&6\\1&2&1\\2&3&5\end{pmatrix}$. Поступая как и в первом случае, получим:

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}3&5&6\\1&2&1\\2&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\3&5&6\\2&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&3\\0&-1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&3\\0&0&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&7\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Мы видим, что в третьей строке стоят одни нули. Это говорит о том, что исходная матрица вырожденная.

1.26. Найти матрицы, обратные данным элементарным матрицам.

1. $\begin{pmatrix}-2&0\\0&1\end{pmatrix}$; **2**. $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$; **3**. $\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$; **5**. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Решение.**2**. Припишем к данной матрице $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ справа единичную матрицу такого же порядка, в результате чего получим матрицу $\mathbf{B}=\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$ размера 2×4. Элементарными преобразованиями строк преобразуем полученную матрицу так, чтобы обратить её левую половину в единичную, тогда правая половина обратится в матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Для получения решения нам достаточно поменять строки местами:

$$\mathbf{B}=\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{array}\right).\quad \mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Мы получили в данном случае, что $\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}$. Это и понятно: матрица $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ меняет местами строки, обратная к ней матрица $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ возвращает их на место, т.е. тоже меняет местами строки. Заметим также, что $\mathbf{A}^{2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

1.27. Вычислить матрицы, обратные данным:

1. $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; **2**. $\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$; **3**. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}$; **5**. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$; **6**. $\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}$;

7. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; **8**. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; **9**. $\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

1.28. Найти матрицу $\mathbf{X}$ из уравнения:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; **2**. $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix}$; **4**. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. **1**. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Мы имеем уравнение вида $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{C}$. Если матрица невырождена, то умножив обе части данного равенства слева на $\mathbf{A}^{-1}$ получим: $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ или $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$.

Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, тогда

$$\mathbf{B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.29. Дать описание всех матриц ранга 0 и 1.

1.30. Могут ли существовать матрицы без базисного минора?

1.31. Привести матрицы к упрощённому виду, определить базисные миноры и ранги. Указать базисные строки и столбцы.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; **2**. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; **3**. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **4**. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; **6**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. **6**.

При использовании метода Гаусса-Жордана удобно в качестве ведущего элемента взять a_{11}, т.к. он уже равен 1. Умножив первую строку последовательно на -2 и -3 прибавим её ко второй и третьей строкам соответственно. Вычтя из третьей строки вторую и поменяв местами два последних столбца получим в верхнем левом углу единичную матрицу второго порядка являющуюся базисным минором.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг данной матрицы равен 2, а в качестве базисных столбцов и базисных строк следует взять две первые строки и два первых столбца. Третий столбец есть линейная комбинация базисных столбцов: $a_3 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2$. (В качестве базисных столбцов можно взять второй и третий столбцы).

1.32. Указать базисный минор, базисные строки и базисные столбцы невырожденной квадратной матрицы. Чему равен ранг такой матрицы?

1.33. Вычислить ранг матрицы.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$; **2**. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; **4**. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; **5**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; **6**. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

7. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; **8**. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; **9**. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

10. $\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$; **11**. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; **12**. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$;

13*. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & -8 \end{pmatrix}$; **14*.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 12 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$;

15*. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{pmatrix}$; **16*.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}$;

17*. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; **18*.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. **13*.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 & 1 & 8/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В левом верхнем углу мы получили единичную матрицу второго порядка. Таким образом ранг исходной матрицы $Rg = 2$, первые два столбца (строки) базисные.

1.34. Вычислить ранги матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и ранги их произведения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ ·

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

2. Перестановки

Числа $1,\ldots,n$, написанные в каком либо порядке $(p_1,\ldots,p_n)$ будем называть *перестановкой*.

Например, числа 1,2 образуют две перестановки: (1 2) и (2 1). Числа $1,\ldots,n$ образуют очевидно $n!$ перестановок вида $(p_1,\ldots,p_n)$.

Будем считать, что число p_i *нарушает порядок в перестановке* $(p_1,\ldots,p_n)$, если оно стоит левее меньшего числа: $i<k$, но $p_k>p_i$.

Например в перестановке (1 3 2 4) число $p_2=3$ стоит перед числом $p_3=2$, что нарушает порядок следования натуральных чисел. Явление нарушения порядка следования натуральных чисел будем называть *инверсией*. В данном примере мы имеем одну инверсию. Перестановку будем называть *чётной*, если она содержит чётное число инверсий и *нечетной* в противном случае.

2.1. Подсчитать число инверсий и определить чётность перестановки.

1. (3 2 1); **2**. (3 1 5 2 4); **3**. (6 5 4 2 1 3); **4**. (6 5 4 2 1 3);
5. (1 2 5 7 3 6 4); **6**. (8 7 6 5 4 3 2 1); **7**. (4 3 2 1 5 9 8 7 6);
8. (n n-1 ... 2 1).

Решение. **2**. (3 1 5 2 4). Для подсчёта числа инверсий следует подсчитать, сколько для каждого числа имеется следующих за ним меньших его чисел и сложить найденные значения. Таким образом для перестановки (3 1 5 2 4) число инверсий будет 2+0+2+0+0=4. Полученной число инверсий чётное, значит перестановка (3 1 5 2 4) чётная.

3. Детерминанты

Каждой квадратной матрице порядка n можно сопоставить некоторое число, называемое детерминантом матрицы, обозначаемое через $det\,A$, $|A|$ или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Основные формулы для вычисления детерминантов:

$|a| = a$;

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$;

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1.$$

Пусть a_{ik} - элемент матрицы $\mathbf{A}$ порядка n расположен в i-й строке и k-м столбце. Назовём *дополнительной подматрицей* этого элемента матрицу D_{ik} порядка $n-1$, полученную из $\mathbf{A}$ вычёркиванием i-й строки и k-го столбца.

Например:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \text{ тогда } \mathbf{D}_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

получен вычёркиванием в $\mathbf{A}$ 3-й строки и 2-го столбца.

Дополнительным минором (*минором*) элемента a_{ik} назовём число

$$d_{ik} = \det \mathbf{D}_{ik} . \qquad (2)$$

Например: $d_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix} = -16 .$

Дополнительный минор d_{ik} элемента a_{ik} матрицы $\mathbf{A}$ порядка n взятый со знаком $(-1)^{i+k}$, называется алгебраическим дополнением A_{ik} элемента a_{ik}.

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} d_{ik} . \qquad (3)$$

Рекуррентные формулы:
формула разложения детерминанта по i-й строке

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} d_{ik} \qquad (4)$$

формула разложения детерминанта по j-му столбцу

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} d_{kj} . \qquad (5)$$

Свойства детерминантов:

1. При транспонировании матрицы её детерминант не меняется (свойство равноправности строк и столбцов).

2. Если в квадратной матрице поменять местами две строки (столбца), оставив остальные на своих местах, то детерминант полученной матрицы будет равен детерминанту исходной матрицы с противоположным знаком (свойство антисимметрии при перестановке двух строк или столбцов).

3. Если квадратная матрица имеет две одинаковые строки (столбца), то её детерминант равен нулю.

4. Детерминант матрицы A n-го порядка равен сумме произведений всех элементов какой нибудь одной фиксированной строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

5. Сумма произведений элементов одной строки (столбца) матрицы A n-го порядка на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

6. Если все элементы какой нибудь строки (столбца) матрицы n-го порядка умножить на число λ, то её детерминант так же умножится на это число.

7. Если матрица n-го порядка имеет две пропорциональные строки (столбца), то её детерминант равен нулю.

8. Если все элементы i-й строки матрицы n-го порядка представлены в виде суммы двух слагаемых

$$a_{ik} = a'_{ik} + a''_{ik}, \ k = 1,2,...,n, \qquad (*)$$

то её детерминант можно представить в виде суммы детерминантов двух матриц, у которых элементами i-й строки являются соответственно первая и вторая слагаемые разложения (*), а все остальные строки – такие же, как у исходной матрицы.

9. Детерминант матрицы n-го порядка не изменится, если к элементам одной её строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца) умноженные на одно и тоже произвольное число.

3.1. Вычислить детерминанты матриц второго порядка:

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; **2**. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; **3**. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;

4. $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; **5**. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; **6**. $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$;

7. $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$; **8**. $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & e^{x} \\ e^{-x} & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. **1**. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.

В соответствии с основными формулами для вычисления детерминантов

$$\det\mathbf{A}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1\cdot1-2\cdot3=1-6=-5.$$

3.2. Вычислить детерминанты матриц третьего порядка:

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ 5 & 0 & 3\end{pmatrix}$; **2**. $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 5 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$;

3. $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$; **4**. $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

5. $\mathbf{E}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & 2 & 0\end{pmatrix}$; **6**. $\mathbf{F}=\begin{pmatrix}1 & 3 & i\\ 3 & 0 & -2i\\ -i & 2i & 1\end{pmatrix}$;

7. $\mathbf{G}=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & 6 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$; **8**. $\mathbf{H}=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ -2 & 7 & 2\\ 3 & 2 & -4\end{pmatrix}$.

Решение. **1**.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 4\\ 5 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

В соответствии с основными формулами для вычисления детерминантов

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 3 + 5\cdot(-1)\cdot 4 + 2\cdot 0\cdot 0 - $$

$$- 2\cdot 2\cdot 5 - 1\cdot 4\cdot 0 - 3\cdot(-1)\cdot 0 = -34.$$

3.3. Решить относительно неизвестного λ уравнения:

1. $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$; **2**. $\begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$;

3. $\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$; **4**. $\begin{vmatrix} 25-\lambda & 60 \\ 60 & 144-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Решение. **1**.

$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $(5-\lambda)\cdot(8-\lambda) - 4 = 0$.

После раскрытия скобок и приведения подобных членов, получим:

$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$.

Решением этого уравнения будут: $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 9$.

3.4. Имеются ли в формуле для вычисления детерминанта матрицы пятого порядка $|a_{ik}|$ слагаемые

1. $a_{15}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$; **2**. $a_{55}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$;

3. $a_{32}a_{41}a_{35}a_{23}a_{14}$; **4**. $a_{11}a_{22}a_{33}a_{24}a_{55}$?

Решение. **3**. $a_{32}a_{41}a_{35}a_{23}a_{14}$.

Расположим элементы в порядке возрастания первого индекса:

$$a_{14}a_{23}a_{32}a_{35}a_{41}.$$

Мы видим, что элементы a_{32} и a_{35} принадлежат одной строке (третьей) и нет элемента из пятой строки. Такое слагаемое не может входить в формулу для вычисления детерминанта матрицы пятого порядка.

3.5. С какими знаками входят в формулу для вычисления детерминанта пятого порядка слагаемые

1. $a_{55}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$; **2**. $a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53}$;

3. $a_{15}a_{23}a_{34}a_{41}a_{52}$; **4**. $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$?

Решение. **1**. $a_{55}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$.

Расположим сомножители в данном слагаемом так, чтобы первые индексы расположились по порядку номеров, т.е.

$$a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}a_{55}.$$

Вторые индексы образовали перестановку (2 1 4 3 5) число инверсий которой есть (1+0+1+0+0)=2 число чётное. Данное слагаемое $a_{55}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$ входит в формулу для вычисления детерминанта пятого порядка со знаком плюс.

3.6. **1**) Как изменится детерминант, если в матрице переставить две строки?

2) Как изменится детерминант, если к одной строке матрицы прибавить другую её строку?

3) Как изменится детерминант, если одну строку в матрице умножить на число λ?

4) Как изменится детерминант, если матрицу транспонировать?

3.7. Вычислить алгебраические дополнения для элементов a_{23}, a_{32}, a_{21}, a_{13} матриц

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; **2**. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. **1**. a_{23}, a_{13}.

$$\mathbf{D}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \qquad d_{23} = \det \mathbf{D}_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -14,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} d_{23} = (-1)^5 \cdot (-14) = 14.$$

$$\mathbf{D}_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \qquad d_{13} = \det \mathbf{D}_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -35,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} d_{13} = (-1)^4 \cdot (-35) = -35.$$

3.8. Вычислить детерминанты матриц четвёртого порядка:

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; **2**. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & 7 & 0 & 3 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 1 & 2 & c & 4 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$;

3. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; **4**. $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

5. $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 6 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$; **6**. $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

7. $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; **8**. $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 1 & 3 & 1 & y \\ 3 & 1 & 1 & z \\ 1 & 1 & 1 & t \end{pmatrix}$;

9. $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; **10**. $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & -5 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$;

11. $\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 1+2a & 1 & a & x \\ 1+2b & 2 & b & x \\ 1+2c & 3 & c & x \\ 1+2d & 4 & d & x \end{pmatrix}$; **12**. $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. **1**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\det \mathbf{A}$ будет линейной функцией от чисел a, b, c, d, в силу чего разложение матрицы лучше всего провести по 2-й строке.

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= aA_{21} + bA_{22} + cA_{23} + dA_{24} = \\ &= a(-1)^{2+1} d_{21} + b(-1)^{2+2} d_{22} + c(-1)^{2+3} d_{23} + d(-1)^{2+4} d_{24} = \\ &= -ad_{21} + bd_{22} - cd_{23} + dd_{24}. \end{aligned}$$

$$d_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -9, \qquad d_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12,$$

$$d_{23}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=9, \qquad d_{24}=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{vmatrix}=3.$$

$$\det\mathbf{A}=9a+12b-9c+3d.$$

3.9. Вычислить детерминанты матриц пятого порядка:

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 5 & 5\\ 3 & 4 & 6 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; **2**. $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

3. $\mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 4 & 9 & 16 & 25\end{pmatrix}$; **4**. $\mathbf{D}=\begin{pmatrix}0 & 7 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 3 & 9 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0\\ 2 & 8 & 4 & 7 & 5\\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

3.10. Числа 1313, 1599, 1703, 3263 делятся на 13. Объяснить без вычислений, почему число

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 9 & 9\\ 1 & 7 & 0 & 3\\ 3 & 2 & 6 & 3\end{vmatrix}$$

тоже делится на 13?

4. Системы линейных уравнений

Систему уравнений вида

$$
\begin{aligned}
&a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \ldots + a_n^1 x^n = b^1,\\
&a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \ldots + a_n^2 x^n = b^2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \ldots + a_n^m x^n = b^m,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

или (используя правило суммирования Эйнштейна) вида

$$a_k^i x^k = b^i, \quad i = 1,\ldots,m, \quad k = 1,\ldots,n, \qquad (1^*)$$

будем называть *системой* m *линейных уравнений с* n *неизвестными* $x^1, x^2,\ldots, x^n$.

Коэффициенты при неизвестных уравнений (1) можно записать в виде матрицы размера $m \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix}$$

которую мы будем называть *матрицей системы*. Числа стоящие в правых частях (1) образуют матрицу столбец:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \ldots \\ b^m \end{pmatrix},$$

называемую столбцом свободных членов.

Матрица системы, дополненная справа матрицей свободных членов называется *расширенной матрицей системы* (1), которую мы будем обозначать $\mathbf{A}^*$:

$$\mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 & b^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m & b^m \end{array}\right),$$

или

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}).$$

Пользуясь понятием линейных операций со столбцами можно записать (1) как

$$x^1 \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \ldots \\ a_1^m \end{pmatrix} + x^2 \cdot \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \ldots \\ a_2^m \end{pmatrix} + \ldots + x^n \cdot \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \ldots \\ a_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \ldots \\ b^m \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

или короче:

$$x^1\mathbf{a}_1 + x^2\mathbf{a}_2 + \ldots + x^n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}, \qquad (3)$$

или ещё короче:

$$x^i\mathbf{a}_i = \mathbf{b}, \quad i = 1,\ldots,n, \qquad (4)$$

или совсем коротко:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}. \qquad (5)$$

Равенства (2) - (5) говорят о том, что столбец свободных членов $\mathbf{b}$ раскладывается по столбцам $\mathbf{a}_i$ матрицы $\mathbf{A}$ с коэффициентами x^i. При этом, если столбцы матрицы $\mathbf{A}$ линейно независимы, то система (1) не может иметь двух различных решений: она или *несовместна* (не имеет решений), или *совместна* - имеет решение и *притом только одно*.

Теорема Кронекера-Капелли.

Система линейных уравнений (1) *совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы* $\mathbf{A}$ *системы равен рангу расширенной матрицы* $\mathbf{A}^* = (\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.

При этом, если $Rg\mathbf{A} = Rg\mathbf{A}^* = r$, *возможны два случая*:

1. $r = n$, *т.е. число неизвестных равно числу уравнений и* $\det \mathbf{A} \neq 0$, *система имеет единственное решение, т.е. она* ***совместная*** *и* ***определённая***.

2. $r < n$, *система* ***совместная*** *и* ***неопределённая***.

Если $Rg\mathbf{A}^* > Rg\mathbf{A}$ - *система* (1) ***несовместная***.

Если в системе (1) все свободные члены b^i равны нулю, т.е.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathrm{O}, \qquad (6)$$

то такая система называется *однородной приведённой системой*.

Очевидно, что *однородная система совместна всегда*, её решением будет, например, нулевая матрица столбец $\mathbf{x} = \mathrm{O}$. Такое решение называется *тривиальным*. Если ранг матрицы $\mathbf{A}$ при этом равен n, тогда (6) имеет единственное тривиальное решение и других решений нет. Если $Rg\mathbf{A} < n$, система (6) будет совместной, но неопределённой, т.е. будет иметь бесконечно много решений. Если система (6) имеет нетривиальные решения, мы можем выбрать несколько линейно независимых решений, таких, что любое решение (6) будет их линейной комбинацией. Из столбцов линейно независимых решений мы можем составить матрицу $\mathbf{F}$ высоты n, которую будем называть *фундаментальной матрицей* системы (6). При этом будет выполняться равенство:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{F} = \mathrm{O} \cdot$$

Если ранг матрицы однородной системы линейных уравнений $r < n$, то система имеет фундаментальную матрицу из $n - r$ столбцов.

Если $\mathbf{x}_0$ - некоторое решение системы (1), а $\mathbf{F}$ - фундаментальная матрица её приведённой системы (6), тогда столбец

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{F} \cdot \mathbf{c}, \qquad (7)$$

где $\mathbf{c}$ произвольная матрица столбец высоты $n - r$, является решением системы (1). Правая часть (7) называется общим решением системы (1). Если $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_{n-r}$ - столбцы фундаментальной матрицы системы (6), а $c^1, c^2, \ldots, c^{n-r}$ - произвольные постоянные, тогда (7) можно записать так:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + c^1\mathbf{f}_1 + c^2\mathbf{f}_2 + \ldots + c^{n-r}\mathbf{f}_{n-r}\,. \qquad (8)$$

1. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} &x^1 + 2x^2 + 3x^3 - x^4 = 0,\\ &x^1 - x^2 + x^3 + 2x^4 = 4,\\ &x^1 + 5x^2 + 5x^3 - 4x^4 = -4,\\ &x^1 + 8x^2 + 7x^3 - 7x^4 = -8. \end{aligned}$$

Решение. Мы не будем вычислять ранги матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ по отдельности. Для решения поставленной задачи составим расширенную матрицу и упростим её с помощью элементарных преобразований.

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4\\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4\\ 1 & 8 & 7 & -7 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4\\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4\\ 0 & 6 & 4 & -6 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2/3 & -1 & -4/3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 1 & 8/3\\ 0 & 1 & 2/3 & -1 & -4/3 \end{array}\right).$$

Мы видим, что $Rg\mathbf{A}^* = Rg\mathbf{A} = r = 2$ и $n - r = 2$. Данная система уравнений в соответствии с теоремой Кронекера-Капелли *совместная* и *неопределённая*. Первые два столбца полученной матрицы образуют базисный минор. Соответствующие этим базисным столбцам неизвестные x^1 и x^2 будут *базисными неизвестными*. Неизвестные x^3 и x^4, соответствующие второму и третьему столбцам будем называть *параметрическими*: *они могут принимать произвольные значения*, обеспечивая множество решений данной системы уравнений. Исходную систему уравнений мы можем записать теперь так:

$$x^1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x^3 - x^4,$$

$$x^2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x^3 + x^4,$$

где x^3 и x^4 - произвольные числа.

2. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} &x^1 + 2x^2 + 3x^3 - x^4 = 0, \\ &x^1 - x^2 + x^3 + 2x^4 = 4, \\ &x^1 + 5x^2 + 5x^3 - 4x^4 = -4, \\ &x^1 + 8x^2 + 7x^3 - 7x^4 = 6. \end{aligned}$$

Решение. Как и в примере **1** составим расширенную матрицу и переставив местами вторую и третью строки упростим её:

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Последняя строка равносильна записи:

$$0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 = 1 \text{ или } 0=1,$$

что невозможно и, таким образом, мы имеем *несовместную* систему уравнений.

Рассмотрим решение поставленной задачи с точки зрения теоремы Кронекера-Капелли: $Rg\mathbf{A}^* = 3 > Rg\mathbf{A} = 2$ и система уравнений несовместна.

На основании этого примера мы можем предположить, *что если в упрощённой расширенной матрице есть строка* $\left(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \mid 1\right)$ - *система уравнений будет несовместной.*

3. Решить систему линейных уравнений:

1. $3x^1 + 5x^2 + 2x^3 + 4x^4 = 3,$;

$2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 = 1,$

$5x^1 + 9x^2 - 2x^3 + 2x^4 = 9.$

2. $5x^1 + x^2 - 3x^3 = -6,$

$2x^1 - 5x^2 + 7x^3 = 9,$

$4x^1 + 2x^2 - 4x^3 = -7,$

$5x^1 - 2x^2 + 2x^3 = 1.$

3. $5x + 8y + 6z = 7,$

$3x + 5y + 4z = 5,$

$7x + 9y + 4z = 1.$

4. При каких параметрах a система уравнений совместна.

$x + y + 2z = -3,$

$3x + 2y + 4z = a,$

$5x + 3y + 6z = a^2.$

5. При каких a система уравнений совместная и определённая.

$$x+2y+(a-1)z=4,$$
$$3x+7y+a^2z=-3,$$
$$4x+9y+a^3z=-a.$$

6. Найти фундаментальную систему решений

1. $$3x^1+4x^2+3x^3+2x^4=0,$$
$$5x^1+7x^2+4x^3+3x^4=0,$$
$$4x^1+5x^2+5x^3+3x^4=0,$$
$$5x^1+6x^2+7x^3+4x^4=0.$$

2. $$3x^1+5x^2+2x^3+4x^4=0,$$
$$5x^1+4x^2+3x^3+5x^4=0,$$
$$9x^1+2x^2+5x^3+7x^4=0,$$
$$5x^1-9x^2+2x^3=0.$$

3. $$3x^1+3x^2+5x^3+7x^4+4x^5=0,$$
$$2x^1+2x^2+3x^3+5x^4+3x^5=0,$$
$$4x^1+4x^2+7x^3+9x^4+5x^5=0,$$
$$5x^1+5x^2+9x^3+11x^4+6x^5=0.$$

4. $$x^1+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5=0,$$
$$2x^1+3x^2+4x^3+5x^4+x^5=0,$$
$$3x^1+4x^2+5x^3+x^4+2x^5=0,$$
$$x^1+3x^2+5x^3+12x^4+9x^5=0,$$
$$4x^1+5x^2+6x^3-3x^4+3x^5=0.$$

5. $x^1 + x^2 - x^3 - x^4 = 0,$

$x^1 - x^2 + x^3 + x^4 = 0.$

Решение. **1.**

$$3x^1 + 4x^2 + 3x^3 + 2x^4 = 0,$$
$$5x^1 + 7x^2 + 4x^3 + 3x^4 = 0,$$
$$4x^1 + 5x^2 + 5x^3 + 3x^4 = 0,$$
$$5x^1 + 6x^2 + 7x^3 + 4x^4 = 0.$$

В данном случае расширенная матрица $\mathbf{A}^*$ совпадает с матрицей коэффициентов системы $\mathbf{A}$.

Вычтем из второй строки матрицы $\mathbf{A}$ третью и поменяем её местами с первой строкой:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 3 \\ 0 & -4 & 12 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В верхнем левом углу мы получили базисный минор второго порядка, следовательно $Rg\mathbf{A} = 2$ и в качестве базисных неизвестных мы возьмём x^1 и x^2, параметрические неизвестные x^3 и x^4 могут принимать любые значения. Перепишем исходную систему в соответствии с упрощённой матрицей:

$$\begin{aligned} x^1 &= -5x^3 - 2x^4, \\ x^2 &= 3x^3 + x^4. \end{aligned} \qquad (*)$$

Мы можем неизвестным x^3 и x^4 придать любые значения, но для получения фундаментальной системы решений мы должны позаботиться об их линейной независимости. Этого легко достичь если из всего множества значений параметрических неизвестных выбрать простейшие значения 0 и 1, так, чтобы в фундаментальной матрице $\mathbf{F}$ в последних $n-r$ строках получилась единичная матрица.

Итак, положим сначала $x^3 = 1$, а $x^4 = 0$, тогда из (*) имеем $x^1 = -5$, $x^2 = 3$ и первое фундаментальное решение есть

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Полагая теперь $x^3 = 0$, а $x^4 = 1$, получим $x^1 = -2$, $x^2 = 1$ и второе фундаментальное решение $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Теперь мы можем записать фундаментальное решение данной однородной системы линейных уравнений в виде:

$$\mathbf{X} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальное решение можно записать и так:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c^1 + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c^2 .$$

Здесь c^1 и c^2 - произвольные числа. Таким образом мы видим, что для любых значений c^1 и c^2 соответствующее решение будет линейной комбинацией фундаментальных решений.

7. Найти решение системы линейных уравнений:

1. $2x^1 + x^2 + x^3 = 2,$

$x^1 + 3x^2 + x^3 = 5,$

$x^1 + x^2 + 5x^3 = -7,$

$2x^1 + 3x^2 - 3x^3 = 14.$

2. $2x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 1,$

$2x^1 - x^2 - 3x^4 = 2,$

$3x^1 - x^3 + x^4 = -2,$

$2x^1 + 2x^2 - 2x^3 + 5x^4 = -6.$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений:

1. $x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 4,$

$x^1 + x^2 + 2x^3 + 3x^4 = 8,$

$2x^1 + 4x^2 + 5x^3 + 10x^4 = 20,$

$2x^1 - 4x^2 + x^3 - 6x^4 = 4.$

2. $x^1 + 3x^2 + 3x^3 + 5x^4 = -1,$

$2x^1 + 6x^2 + 5x^3 + 6x^4 = 1,$

$3x^1 + 7x^2 + 4x^3 + 8x^4 = 2,$

$3x^1 + 5x^2 + x^3 + 9x^4 = 1.$

3. $2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 = 0,$

$4x^1 + 6x^2 + 9x^3 + 8x^4 = -3,$

$6x^1 + 9x^2 + 9x^3 + 4x^4 = 8.$

4. $5x^1 + 3x^2 + 4x^3 - 2x^4 + 3x^5 = 1,$
$8x^1 + 5x^2 + 5x^3 - 2x^4 + 4x^5 = 2,$
$7x^1 + 4x^2 + 7x^3 - 3x^4 + 7x^5 = -1,$
$4x^1 + 3x^2 - x^3 - 3x^4 - 2x^5 = 4.$

5. $x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 7,$
$3x^1 + 2x^2 + x^3 + x^4 - 3x^5 = -2,$
$x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 6x^5 = 23,$
$5x^1 + 4x^2 + 3x^3 + 3x^4 - x^5 = 12.$

6. $3x - y = -4$.

7. $2x - y + 2z = -9$.

8. $x - y + 2z = -4,$
$-2x + y + z = -3.$

Решение. **1**.

$x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 4,$
$x^1 + x^2 + 2x^3 + 3x^4 = 8,$
$2x^1 + 4x^2 + 5x^3 + 10x^4 = 20,$
$2x^1 - 4x^2 + x^3 - 6x^4 = 4.$

Будем искать общее решение данной системы линейных уравнений в виде:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{F} \cdot \mathbf{c},$$

где $\mathbf{X}_0$ - частное решение данной системы уравнений;

$\mathbf{F}$ - матрица, составленная из столбцов фундаментальной системы решений приведённой системы;

$\mathbf{c}$ - матрица столбец высоты $n-r$ произвольных чисел.

Составим расширенную матрицу $\mathbf{A}^*$ данной системы и упростим её:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 2 & -4 & 1 & -6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Упрощённая расширенная матрица говорит о том, что $Rg\mathbf{A}^* = Rg\mathbf{A} = 2$, $n-r=2$, $n<r$. Это значит, что в соответствии с теоремой Кронекера-Капелли данная система уравнений совместная и неопределённая. Упрощённая расширенная матрица соответствует системе уравнений

$$\begin{aligned} x^1 + \frac{3}{2}x^3 + x^4 = 6, \\ x^2 + \frac{1}{2}x^3 + 2x^4 = 2, \end{aligned} \qquad (*)$$

эквивалентной данной. Здесь x^1 и x^2 - базисные неизвестные, а x^3 и x^4 - параметрические (свободные) неизвестные и (*) можно переписать так:

$$x^1 = 6 - \frac{3}{2}x^3 - x^4,$$
$$x^2 = 2 - \frac{1}{2}x^3 - 2x^4. \qquad (**)$$

В качестве частного решения возьмём простейшее из решений системы (**), а именно, положим $x^3 = x^4 = 0$. Тогда $x^1 = 6$, а $x^2 = 2$ и частное решение есть $\mathbf{X}_0 = (6 \quad 2 \quad 0 \quad 0)^T$.

Для нахождения фундаментальной системы решений составим из (*) приведённую систему, соответствующую левой части упрощённой расширенной матрицы:

$$x^1 + \frac{3}{2}x^3 + x^4 = 0, \qquad \text{или} \qquad x^1 = -\frac{3}{2}x^3 - x^4,$$
$$x^2 + \frac{1}{2}x^3 + 2x^4 = 0, \qquad \qquad x^2 = -\frac{1}{2}x^3 - 2x^4.$$

Полагая (см. решение 5.1) $x^3 = 1$, $x^4 = 0$ и затем $x^3 = 0$, $x^4 = 1$ находим систему из двух фундаментальных решений:

$$\mathbf{f}_1 = (-3/2 \quad -1/2 \quad 1 \quad 0)^T \text{ и } \mathbf{f}_2 = (-1 \quad -2 \quad 0 \quad 1)^T.$$

Общее решение данной системы линейных уравнений будет:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{F}\cdot\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/2 & -1 \\ -1/2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix}.$$

Решение. **6**. $3x - y = -4$.

Мы имеем всего лишь одно уравнение с двумя неизвестными, которое тем не менее, мы можем рассматривать как систему линейных уравнений. Будем искать общее решение также как и в п.**1**.

$$\mathbf{A}^* = (3 \quad -1 \mid -4) \sim (1 \quad -1/3 \mid -4/3)$$

или

$$x = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3}y\,.$$

$$Rg\mathbf{A}^* = Rg\mathbf{A} = 1\,,\; n - r = 1\cdot$$

Частное решение будет $\mathbf{X}_0 = \left(-4/3 \quad 0\right)^T$, фундаментальное - $\mathbf{f}_1 = \left(1/3 \quad 1\right)^T$.

Общее решение данной системы будет

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c.$$

Дадим геометрическое толкование полученного решения. Очевидно, что записав данное уравнение как $y = 3x + 4$ мы сразу увидим в нём хорошо известное из школьно курса уравнение прямой вида $y = kx + b$. Частное решение $\mathbf{X}_0 = \left(-4/3 \quad 0\right)^T$ мы можем рассматривать как координаты начальной точки данной прямой, а $\mathbf{f} = \left(1/3 \quad 1\right)^T$ как компоненты направляющего вектора. Прямая $y = 3x + 4$ проходит через точку $X_0\left(-4/3, 0\right)$ параллельно вектору $\vec{f} = \frac{1}{3}\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j}$.

9. Система линейных уравнений задана расширенной матрицей. Составить систему линейных уравнений явно и найти общее решение.

1. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$; **2.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & 63 & 29 & 71 \\ 5 & 24 & -7 & 1 & 41 \end{array}\right)$;

3. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 1 \end{array}\right)$; **4**. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 20 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 42 \end{array}\right)$;

5. $\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

10. Система линейных уравнений задана в виде линейного матричного уравнения. Найти неизвестную матрицу $\mathbf{X}$.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

3. $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 9 & 8 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

4. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$;

6. $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

7. $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Решение. **1**.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Запишем данное уравнение в общем виде: $\mathbf{A}_{2\times 3} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}_{2\times 2}$. Исходя из правил умножения матриц, мы видим, что матрица $\mathbf{X}$ в данном случае не матрица столбец а матрица размеров 3×2, т.е.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \\ x_1^3 & x_2^3 \end{pmatrix},$$

где, как мы договорились ранее, индекс стоящий вверху обозначает номер строки, а индекс стоящий внизу обозначает номер столбца.

Данное линейное матричное уравнение мы можем рассматривать как две системы линейных уравнений: первой системе принадлежит первый столбец матрицы $\mathbf{X}$ и первый столбец матрицы $\mathbf{B}$; второй системе принадлежат соответственно вторые столбцы указанных матриц. Матрица коэффициентов $\mathbf{A}$ у обеих систем одна и та же.

Будем искать решение поставленной задачи по известной нам схеме. Составим расширенную матрицу $\mathbf{A}^*$ и с помощью элементарных преобразований строк упростим её:

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 9 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 22 & 14 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 0 \end{array}\right).$$

Упрощённая расширенная матрица говорит о том, что $Rg\mathbf{A}^* = Rg\mathbf{A} = 2$, $n - r = 1$, $n < r$. Это значит, что в соответствии с теоремой Кронекера-Капелли данная система уравнений совместная и неопределённая. Упрощённая расширенная матрица соответствует системе уравнений

$$x_1^1 + 22x_1^3 = 14, \qquad x_2^1 + 22x_2^3 = 1,$$
$$x_1^2 - 5x_1^3 = -4. \qquad x_2^2 - 5x_2^3 = 0.$$

или

$$x_1^1 = 14 - 22x_1^3, \qquad x_2^1 = 1 - 22x_2^3,$$
$$x_1^2 = -4 + 5x_1^3. \qquad x_2^2 = 5x_2^3.$$

Здесь x_1^3 и x_2^3 - параметрические неизвестные, а x_1^1, x_1^2 и x_2^1, x_2^2 - базисные неизвестные. Полагая $x_1^3 = \alpha$, $x_2^3 = \beta$, где α и β - произвольные числа, запишем решение данной системы в виде:

$$x_1^1 = 14 - 22\alpha, \; x_1^2 = -4 + 5\alpha, \; x_1^3 = \alpha;$$

$$x_2^1 = 1 - 22\beta, \; x_2^2 = 5\beta, \; x_2^3 = \beta.$$

Окончательно мы можем записать:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 14 - 22\alpha & 1 - 22\beta \\ -4 + 5\alpha & 5\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Решение. **3**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 9 & 8 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \mathbf{A}_{3\times 3} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}_{3\times 2}.$$

Матрица $\mathbf{X}$ должна иметь вид

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \\ x_1^3 & x_2^3 \end{pmatrix}.$$

Мы снова имеем две системы линейных уравнений с тремя неизвестными. В соответствии с решением приведённом выше, имеем:

$$\mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{ccc|c:c} 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 9 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c:c} 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Мы видим, что в упрощённой расширенной матрице есть строка $(0 \quad 0 \quad 0 \mid 6)$, а значит для системы со вторым столбцом матрицы $\mathbf{B}$ решений нет, значит нет решений и для матричной системы в целом.

Решение. **6** и **7**.

В задаче **6** надо исходное уравнение $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$ переписать используя операцию транспонирования:

$(\mathbf{X} \cdot \mathbf{A})^T = \mathbf{B}^T$ или $\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{X}^T = \mathbf{B}^T$.

В задаче **7** исходное уравнение $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$ следует представить в виде $\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{C}$, где $\mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{Y}$ или $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{X}^T = \mathbf{Y}^T$.

Решение систем линейных уравнений методом Крамера.

11. Решить систему уравнений методом Крамера

$$2x - 3y = -7,$$
$$5x + 4y = 17.$$

Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

и вычислим её детерминант

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-15) = 23 \neq 0.$$

Так как $|\mathbf{A}| \neq 0$, система уравнений имеет единственное решение. Вычислим детерминанты матриц $\mathbf{A}_x$ и $\mathbf{A}_y$.

$$|\mathbf{A}_x| = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 17 & 4 \end{vmatrix} = -28 - 51 = 23,$$

$$|\mathbf{A}_y| = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 17 \end{vmatrix} = 34 - (-35) = 69.$$

Тогда, $x = \dfrac{|\mathbf{A}_x|}{|\mathbf{A}|} = \dfrac{23}{23} = 1$, $y = \dfrac{|\mathbf{A}_y|}{|\mathbf{A}|} = \dfrac{69}{23} = 3$.

12. Решить системы линейных уравнений методом Крамера:

1. $\begin{matrix} 3x + 7y = -11, \\ 5x - 2y = 9. \end{matrix}$; **2.** $\begin{matrix} 9x - 2y = 41, \\ 7x + 4y = -7. \end{matrix}$; **3.** $\begin{matrix} 7x + 4y = -7, \\ x - 3y = -1. \end{matrix}$

Ответы: **1.** $x = 1$; $y = -2$; **2.** $x = 3$; $y = -7$; **3.** $x = -1$; $y = 0$.

13. Решить систему линейных уравнений методом Крамера

$$
\begin{aligned}
&2x-3y+5z=11,\\
&x+2y-3z=-4,\\
&3-y-2z=-5.
\end{aligned}
$$

Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}$$

и вычислим её детерминант

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}2 & -3 & 5\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=-28\neq 0.$$

Так как $|\mathbf{A}|\neq 0$, система уравнений имеет единственное решение. Вычислим детерминанты матриц $\mathbf{A}_x$, $\mathbf{A}_y$ и $\mathbf{A}_z$.

$$|\mathbf{A}_x|=\begin{vmatrix}11 & -3 & 5\\ -4 & 2 & -3\\ -5 & -1 & -2\end{vmatrix}=-28,\quad |\mathbf{A}_y|=\begin{vmatrix}2 & 11 & 5\\ 1 & -4 & -3\\ 3 & -5 & -2\end{vmatrix}=-56,$$

$$|\mathbf{A}_z|=\begin{vmatrix}2 & -3 & 11\\ 1 & 2 & -4\\ 3 & -1 & -5\end{vmatrix}=-84.$$

Тогда,

$$x=\frac{|\mathbf{A}_x|}{|\mathbf{A}|}=\frac{-28}{-28}=1,\quad y=\frac{|\mathbf{A}_y|}{|\mathbf{A}|}=\frac{-56}{-28}=2,\quad z=\frac{|\mathbf{A}_z|}{|\mathbf{A}|}=\frac{-84}{-28}=3.$$

14. Решить системы линейных уравнений методом Крамера

1. $x+2y+3z=-7,$
$2x+y+2z=-2,$
$3x+2y+z=3.$

2. $x+3y-6z=12,$
$3x+2y+5z=-10,$
$2x+5y-3z=6.$

Ответы: **1**. $x=2, y=0, z=-3$; **2**. $x=0, y=0, z=-2$.

Литература

1. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебра. М.: Наука, 1987.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: ФМЛ, 2000.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: ГИ ФМЛ, 1954.
4. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1966.
5. Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Ч. I. Мн.: 2001.

Содержание

К435

Александр Алексеевич
Кирсанов

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Матрицы. Детерминанты. Системы линейных уравнений.

Учебно-методическое пособие

Издательская лицензия **ИД №06024** от 09.10.2001 года.
Подписано в печать 10.09.2002 г. Формат 60х90/16.
Объем издания в усл.печ.л. 3,5. Тираж 100 экз. Заказ 329.

Псковский государственный педагогический институт им. С.М.Кирова,
180760, г. Псков, пл. Ленина, 2.
Редакционно-издательский отдел ПГПИ им. С.М.Кирова,
180760, г. Псков, ул. Советская, 21, телефон 2-86-18.

Отпечатано в типографии газеты «Товары и цены»