ГЛАВА 1

СИСТЕМЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ И КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Введение

Изучение основных понятий анализа (таких, как сходимость, непрерывность, дифференцирование и интегрирование) должно основываться на точно определенном понятии числа. Мы, однако, не будем вступать в обсуждение аксиом, которым подчиняется арифметика целых чисел, а будем исходить из системы рациональных чисел.

Мы предполагаем, что читатель знаком с арифметикой рациональных чисел (т. е. чисел вида n/m, где n и m — целые, $m \neq 0$), и только напомним основные свойства этих чисел. Сумма, разность, произведение и частное любых двух рациональных чисел — рациональное число (деление на нуль исключается); выполняются законы коммутативности

$$p+q=q+p, \qquad pq=qp,$$

законы ассоциативности

$$(p+q)+r=p+(q+r), \qquad (pq)r=p(qr)$$

и закон дистрибутивности

$$(p+q)r=pr+qr;$$

определено отношение $<$, задающее порядок в множестве рациональных чисел. Отношение $<$ обладает тем свойством, что для любых рациональных чисел p и q либо $p=q$, либо $p<q$, либо $q<p$; оно транзитивно, т. е. если $p<q$ и $q<r$, то $p<r$. Кроме того, $p+q>0$ и $pq>0$, если $p>0$ и $q>0$.

Хорошо известно, что система рациональных чисел обладает многими недостатками. Например, не существует рационального числа p, такого, что $p^2=2$ (мы это вскоре докажем). Это делает необходимым введение так называемых «иррациональных чисел», которые часто записываются в виде бесконечных десятичных разложений, причем соответствующие конечные десятичные дроби считаются их приближениями. Так, последовательность

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ \ldots$$

«стремится к $\sqrt{2}$». Но до тех пор, пока мы не определили иррациональное число $\sqrt{2}$, остается открытым вопрос: к чему же все-таки стремится эта последовательность?

Главная цель этой главы и состоит в том, чтобы дать необходимое определение.

1.1. Пример. Сначала покажем, что никакое рациональное число p не удовлетворяет уравнению

$$p^2 = 2. \tag{1}$$

Действительно, предположим, что это не так. Тогда существует удовлетворяющее уравнению (1) число $p = m/n$, где m, n — целые, причем хотя бы одно из них нечетно.

Подставляя в уравнение (1), получаем

$$m^2 = 2n^2. \tag{2}$$

Это показывает, что m^2 — четное число. Значит, m четно (если бы m было нечетным, то и m^2 было бы нечетным) и, следовательно, m^2 делится на 4. Поэтому правая часть равенства (2) делится на 4, так что n^2 четно, откуда следует, что и n четно.

Таким образом, предположение о том, что выполнено равенство (1), заставляет нас заключить, что оба числа m, n — четные, вопреки нашему выбору m и n. Значит, равенство (1) невозможно при рациональном p.

Исследуем теперь подробнее эту ситуацию. Пусть A — множество всех положительных рациональных p, таких, что $p^2 < 2$, и пусть множество B состоит из всех положительных рациональных p, таких, что $p^2 > 2$. Мы покажем, что A не содержит наибольшего числа, а B не содержит наименьшего.

Точнее, мы докажем, что для любого p из A можно найти рациональное число q из A, такое, что $p < q$, и для любого p из B мы можем найти рациональное число q из B, такое, что $q < p$.

Пусть p принадлежит A. Тогда $p^2 < 2$. Выберем рациональное h, такое, что

$$0 < h < 1 \quad \text{и} \quad h < \frac{2-p^2}{2p+1}.$$

Положим $q = p + h$. Тогда $q > p$ и

$$q^2 = p^2 + (2p+h)h < p^2 + (2p+1)h < p^2 + (2-p^2) = 2,$$

так что q находится в A. Этим доказана первая часть нашего утверждения.

Предположим теперь, что p принадлежит B. Тогда $p^2 > 2$. Положим

$$q = p - \frac{p^2-2}{2p} = \frac{p}{2} + \frac{1}{p}.$$

Тогда $0 < q < p$ и

$$q^2 = p^2 - (p^2 - 2) + \left(\frac{p^2-2}{2p}\right)^2 > p^2 - (p^2 - 2) = 2,$$

так что q принадлежит B.

1.2. Замечание. Цель приведенного выше рассуждения — показать, что в системе рациональных чисел имеются некоторые пробелы, несмотря на то что между любыми двумя рациональными числами находится третье [ибо $p < (p+q)/2 < q$, если $p < q$]. Сейчас мы опишем предложенный Дедекиндом процесс, который позволяет заполнить эти пробелы и приводит нас к вещественным числам. Чтобы не увеличивать объема книги, мы не везде будем проводить рассуждения во всех деталях. Полное изложение, начинающееся с целых чисел, можно найти в книге Ландау «Основы анализа», где речь идет только об этой числовой системе.

1.3. Обозначения. Если A — множество (элементами которого могут быть числа или любые другие объекты), то запись $x \in A$ означает, что x принадлежит (или является элементом) A. Если x не является элементом A, мы будем писать $x \notin A$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, мы будем называть пустым множеством. Если множество содержит хотя бы один элемент, то оно называется непустым.

Дедекиндовы сечения

1.4. Определение. Множество α рациональных чисел называется *сечением*, если

(I) α содержит хотя бы одно рациональное число, но не всякое рациональное число;

(II) для $p \in \alpha$ и $q < p$ (q — рациональное число) имеем $q \in \alpha$;

(III) в α нет наибольшего числа.

В этом разделе мы будем употреблять буквы p, q, r, ... только для обозначения рациональных чисел; сечения будут обозначаться буквами α, β, γ, ... (за исключением случая, о котором говорится в определении 1.7).

1.5. Теорема. *Если $p \in \alpha$ и $q \notin \alpha$, то $p < q$.*

Доказательство. Если $p \in \alpha$ и $q \leqslant p$, то из (II) следует, что $q \in \alpha$.

Принимая во внимание эту теорему, элементы множества α иногда называют нижними числами сечения α, а рациональные числа, не принадлежащие α, называют верхними числами сечения α. Пример 1.1 показывает, что не всегда существует наименьшее верхнее число. Однако для некоторых сечений наименьшее верхнее число действительно существует.

1.6. Теорема. *Пусть r — рациональное число. Пусть множество α состоит из всех рациональных чисел p, таких, что $p<r$. Тогда α — сечение, а r — наименьшее верхнее число сечения α.*

Доказательство. Ясно, что α удовлетворяет условиям (I) и (II) определения 1.4. Что касается (III), то нужно лишь заметить, что для любого $p\in\alpha$ мы имеем

$$p<\frac{p+r}{2}<r,$$

поэтому $(p+r)/2\in\alpha$.

Далее, $r\notin\alpha$. Поскольку неравенство $p<r$ влечет за собой включение $p\in\alpha$, то r — наименьшее верхнее число сечения α.

1.7. Определение. Сечение, построенное в теореме 1.6, называется *рациональным сечением*. Если мы захотим подчеркнуть, что α есть рациональное сечение, связанное с числом r указанным образом, то будем писать $\alpha=r^*$.

1.8. Определение. Пусть α, β — сечения. Мы будем писать $\alpha=\beta$, если из соотношения $p\in\alpha$ следует соотношение $p\in\beta$, а из $q\in\beta$ следует $q\in\alpha$, т. е. если эти два множества тождественно совпадают. В противном случае мы будем писать $\alpha\neq\beta$.

Замечание. Это определение на первый взгляд кажется излишним. Но равенство не всегда определяется как тождество. Например, если $p=a/b$ и $q=c/d$ — рациональные числа (a, b, c, d — целые), то $p=q$ по определению означает, что $ad=bc$, но не обязательно $a=c$ и $b=d$.

Введем теперь отношение порядка в множестве сечений.

1.9. Определение. Пусть α и β — сечения. Мы пишем $\alpha<\beta$ (или $\beta>\alpha$), если имеется рациональное число p, такое, что $p\in\beta$ и $p\notin\alpha$.

$$\alpha\leqslant\beta \text{ означает, что } \alpha=\beta \text{ или } \alpha<\beta.$$

$$\alpha\geqslant\beta \text{ означает, что } \beta\leqslant\alpha.$$

Если $\alpha>0^*$, то мы будем говорить, что сечение α положительно, если $\alpha\geqslant 0^*$ — мы будем говорить, что оно неотрицательно. Аналогичным образом, если $\alpha<0^*$, то α отрицательно; оно неположительно, если $\alpha\leqslant 0^*$.

Мы, конечно, будем продолжать пользоваться символом $<$ для рациональных чисел, так что этот символ (временно) будет нести двойную нагрузку. Однако из контекста всегда будет ясно, какой смысл следует ему приписать.

1.10. Теорема. *Пусть α, β — сечения. Тогда либо $\alpha=\beta$, либо $\alpha<\beta$, либо $\beta<\alpha$.*

Доказательство. Определения 1.8 и 1.9 ясно показывают, что если $\alpha=\beta$, то ни одно из двух других отношений не выполнено. Чтобы показать, что отношения $\alpha<\beta$ и $\beta<\alpha$ исключают друг друга, предположим, что оба эти отношения имеют место. Поскольку $\alpha<\beta$, имеется рациональное число p, такое, что

$$p\in\beta, \quad p\notin\alpha.$$

Поскольку $\beta<\alpha$, имеется рациональное число q, такое, что

$$q\in\alpha, \quad q\notin\beta.$$

По теореме 1.5 из того, что $p\in\beta$ и $q\notin\beta$, следует, что $q<p$. Так как неравенства $p<q$ и $q<p$ не могут одновременно выполняться для рациональных чисел, мы пришли к противоречию.

До сих пор мы доказали, что из трех отношений может выполняться самое большее одно. Предположим теперь, что $\alpha\neq\beta$. Тогда два эти множества не совпадают тождественно; это значит, что либо α содержит рациональное p, не содержащееся в β, и в этом случае $\beta<\alpha$, либо β содержит рациональное q, не содержащееся в α, и в этом случае $\alpha<\beta$.

1.11. Теорема. *Пусть* α, β, γ — *сечения. Если* $\alpha<\beta$ *и* $\beta<\gamma$, *то* $\alpha<\gamma$.

Доказательство. Поскольку $\alpha<\beta$, существует рациональное p, такое, что

$$p\in\beta, \quad p\notin\alpha.$$

Поскольку $\beta<\gamma$, существует рациональное q, такое, что

$$q\in\gamma, \quad q\notin\beta.$$

Теперь заметим, что из соотношений $p\in\beta$ и $q\notin\beta$ следует, что $p<q$; последнее вместе с соотношением $p\notin\alpha$ влечет за собой $q\notin\alpha$. Таким образом,

$$q\in\gamma, \quad q\notin\alpha.$$

Это значит, что $\alpha<\gamma$.

Последние две теоремы показывают, что отношение $<$ между сечениями (определение 1.9) действительно обладает теми свойствами, которые обычно связывают с понятием неравенства.

Теперь мы переходим к построению арифметики в множестве сечений.

1.12. Теорема. *Пусть* α, β — *сечения. Пусть* γ — *множество всех рациональных чисел* r, *таких, что* $r=p+q$, *где* $p\in\alpha$, $q\in\beta$. *Тогда* γ — *сечение.*

Доказательство. Мы покажем, что γ удовлетворяет трем условиям определения 1.4.

(I) Ясно, что γ непусто. Пусть $s \notin \alpha$, $t \notin \beta$, s и t — рациональные числа. Тогда $s+t > p+q$ при всех $p \in \alpha$, $q \in \beta$, так что $s+t \notin \gamma$. Значит, γ содержит не все рациональные числа.

(II) Пусть $r \in \gamma$, $s < r$, s — рациональное число. Тогда $r = p+q$ при некоторых $p \in \alpha$, $q \in \beta$. Выберем рациональное t так, что $s = t+q$. Тогда $t < p$, значит, $t \in \alpha$, поэтому $s \in \gamma$.

(III) Предположим, что $r \in \gamma$. Тогда $r = p+q$ при некоторых $p \in \alpha$, $q \in \beta$. Существует рациональное $s > p$, такое, что $s \in \alpha$. Значит, $s+q \in \gamma$ и $s+q > r$, так что r не является наибольшим рациональным числом в γ.

1.13. Определение. Сечение γ, построенное в теореме 1.12, обозначается через $\alpha+\beta$ и называется суммой α и β.

(Замечание, сделанное после определения 1.9, относится также и к символу $+$.)

1.14. Теорема. *Пусть α, β, γ — сечения. Тогда*

(*a*) $\alpha+\beta = \beta+\alpha$;

(*b*) $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$, *так что скобки можно опускать, не опасаясь двусмысленности*;

(*c*) $\alpha+0^* = \alpha$.

Доказательство. Для построения $\alpha+\beta$ нужно взять множество всех рациональных чисел вида $p+q$ ($p \in \alpha$, $q \in \beta$). Для построения $\beta+\alpha$ вместо $p+q$ нужно брать $q+p$. В силу закона коммутативности для сложения рациональных чисел, $\alpha+\beta$ и $\beta+\alpha$ — тождественные сечения, и свойство (*a*) доказано.

Аналогичным образом закон ассоциативности для сложения рациональных чисел влечет за собой равенство (*b*).

Чтобы доказать (*c*), выберем $r \in \alpha+0^*$. Тогда $r = p+q$ при некоторых $p \in \alpha$, $q \in 0^*$ (т. е. $q < 0$). Значит, $p+q < p$, так что $p+q \in \alpha$ и $r \in \alpha$.

Теперь пусть $r \in \alpha$. Выберем рациональное число $s > r$, такое, что $s \in \alpha$. Положим $q = r-s$. Тогда $q < 0$, $q \in 0^*$ и $r = s+q$, так что $r \in \alpha+0^*$.

Таким образом, сечения $\alpha+0^*$ и α совпадают.

1.15. Теорема. *Пусть α — сечение, и пусть задано рациональное число $r > 0$. Тогда существуют рациональные p, q, такие, что $p \in \alpha$, $q \notin \alpha$, q не является наименьшим из верхних чисел сечения α и $q-p = r$.*

Доказательство. Выберем рациональное число $s \in \alpha$. Для $n = 0, 1, 2, \ldots$ положим $s_n = s+nr$. Тогда имеется единственное целое m, такое, что $s_m \in \alpha$ и $s_{m+1} \notin \alpha$.

Если s_{m+1} не есть наименьшее из верхних чисел сечения α, то выберем $p = s_m$, $q = s_{m+1}$.

Если s_{m+1} — наименьшее из верхних чисел сечения α, то возьмем

$$p = s_m + \frac{r}{2}, \quad q = s_{m+1} + \frac{r}{2}.$$

1.16. Теорема. *Пусть α — сечение. Тогда существует одно и только одно сечение β, такое, что $\alpha + \beta = 0^*$.*

Доказательство. Сначала мы докажем единственность. Если $\alpha + \beta_1 = \alpha + \beta_2 = 0^*$, то теорема 1.14 показывает, что

$$\beta_2 = 0^* + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = (\alpha + \beta_2) + \beta_1 = 0^* + \beta_1 = \beta_1.$$

Для доказательства существования обозначим через β множество всех рациональных p, таких, что $-p$ является верхним числом сечения α, но не наименьшим из верхних чисел. Мы должны проверить, что это множество β удовлетворяет трем условиям определения 1.4. Выполнение условия (I) очевидно.

(II) Если $p \in \beta$ и $q < p$ (q — рациональное), то $-p \notin \alpha$ и $-q > -p$, так что $-q$ есть верхнее число сечения α, но не наименьшее. Значит, $q \in \beta$.

(III) Если $p \in \beta$, то $-p$ есть верхнее число сечения α, но не наименьшее, так что имеется рациональное число q, такое, что $-q < -p$ и $-q \notin \alpha$. Положим

$$r = \frac{p+q}{2}.$$

Тогда $-q < -r < -p$, так что $-r$ есть верхнее число сечения α, но не наименьшее. Значит, мы нашли рациональное $r > p$, такое, что $r \in \beta$.

Показав, что β — сечение, мы должны теперь проверить, что $\alpha + \beta = 0^*$.

Предположим, что $p \in \alpha + \beta$. Тогда $p = q + r$ при некоторых $q \in \alpha$, $r \in \beta$. Значит, $-r \notin \alpha$, $-r > q$, $q + r < 0$, и $p \in 0^*$.

Предположим, что $p \in 0^*$. Тогда $p < 0$. По теореме 1.15 имеются рациональные числа $q \in \alpha$, $r \notin \alpha$ (причем r не является наименьшим из верхних чисел сечения α), такие, что $r - q = -p$. Поскольку $-r \in \beta$, мы имеем

$$p = q - r = q + (-r) \in \alpha + \beta.$$

Доказательство закончено.

1.17. Определение. Сечение, построенное в теореме 1.16, обозначается $-\alpha$.

1.18. Теорема. *Для любых сечений α, β, γ, таких, что $\beta < \gamma$, имеем $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$. В частности (полагая $\beta = 0^*$), мы имеем $\alpha + \gamma > 0^*$, если $\alpha > 0^*$, $\gamma > 0^*$.*

Доказательство. Согласно определениям 1.9 и 1.13, $\alpha+\beta\leqslant\alpha+\gamma$. Если

$$\alpha+\beta=\alpha+\gamma,$$

то

$$\beta=0^*+\beta=(-\alpha)+(\alpha+\beta)=(-\alpha)+(\alpha+\gamma)=0^*+\gamma=\gamma$$

по теореме 1.14.

1.19. Теорема. *Пусть α, β — сечения. Тогда существует одно и только одно сечение γ, такое, что $\alpha+\gamma=\beta$.*

Доказательство. Единственность следует из того, что неравенство $\gamma_1\neq\gamma_2$ влечет за собой неравенство $\alpha+\gamma_1\neq\alpha+\gamma_2$ (теорема 1.18).

Положим $\gamma=\beta+(-\alpha)$. По теореме 1.14 мы имеем тогда

$$\alpha+\gamma=\alpha+[\beta+(-\alpha)]=\alpha+[(-\alpha)+\beta]=$$
$$=[\alpha+(-\alpha)]+\beta=0^*+\beta=\beta.$$

1.20. Определение. Сечение γ, построенное в теореме 1.19, обозначается через $\beta-\alpha$, т. е. мы пишем $\beta-\alpha$ вместо $\beta+(-\alpha)$.

1.21. Замечание. Нам совсем не потребуется в этой книге теория групп. Однако читатели, знакомые с понятием группы, могли заметить, что теоремы 1.12, 1.14 и 1.16 означают, что множество сечений есть коммутативная группа относительно сложения, введенного определением 1.13. Сейчас мы определим умножение и покажем, что множество сечений образует поле.

Остановившись подробно на сложении и вычитании, мы совсем кратко и без доказательства рассмотрим умножение и деление. Доказательства теорем, которые мы далее сформулируем, совершенно аналогичны доказательствам теорем о сложении и вычитании, за исключением того, что иногда необходимо рассмотреть несколько случаев в зависимости от знака сомножителей.

1.22. Теорема. *Пусть α, β — такие сечения, что $\alpha\geqslant 0^*$, $\beta\geqslant 0^*$. Пусть γ состоит из всех отрицательных рациональных чисел и всех рациональных r, таких, что $r=pq$, где $p\in\alpha$, $q\in\beta$, $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$. Тогда γ — сечение.*

1.23. Определение. Сечение, построенное в теореме 1.22, обозначается через $\alpha\beta$ и называется *произведением* сечений α и β.

1.24. Определение. Каждому сечению α сопоставим сечение $|\alpha|$, называемое *абсолютной величиной* α и определяемое следующим образом:

$$|\alpha|=\begin{cases}\alpha, & \text{если } \alpha\geqslant 0^*,\\ -\alpha, & \text{если } \alpha<0^*.\end{cases}$$

Ясно, что $|\alpha| \geqslant 0^*$ при всех α и $|\alpha| = 0^*$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0^*$.

Теперь мы можем дополнить определение умножения.

1.25. Определение. Пусть α, β—сечения. Положим, по определению,

$$\alpha\beta = \begin{cases} -(|\alpha|\,|\beta|), & \text{если } \alpha < 0^*,\ \beta \geqslant 0^*, \\ -(|\alpha|\,|\beta|), & \text{если } \alpha \geqslant 0^*,\ \beta < 0^*, \\ |\alpha|\,|\beta|, & \text{если } \alpha < 0^*,\ \beta < 0^*. \end{cases}$$

Заметим, что произведение $|\alpha|\,|\beta|$ уже было определено в 1.23, так как $|\alpha| \geqslant 0^*$, $|\beta| \geqslant 0^*$.

1.26. Теорема. *Для любых сечений* α, β, γ *имеем*

(*a*) $\alpha\beta = \beta\alpha$,

(*b*) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$,

(*c*) $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$,

(*d*) $\alpha 0^* = 0^*$,

(*e*) $\alpha\beta = 0^*$ *только тогда, когда* $\alpha = 0^*$ *или* $\beta = 0^*$,

(*f*) $\alpha 1^* = \alpha$,

(*g*) *если* $\alpha < \beta$ *и* $\gamma > 0^*$, *то* $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

1.27. Теорема. *Если* $\alpha \neq 0^*$, *то для любого сечения* β *существует одно и только одно сечение* γ (*которое мы будем обозначать через* β/α), *такое, что* $\alpha\gamma = \beta$.

В заключение этого раздела приведем три теоремы, касающиеся рациональных сечений.

1.28. Теорема. *Для любых рациональных чисел* p *и* q *имеем*

(*a*) $p^* + q^* = (p + q)^*$,

(*b*) $p^* q^* = (pq)^*$,

(*c*) $p^* < q^*$ *тогда и только тогда, когда* $p < q$.

Доказательство. Если $r \in p^* + q^*$, то $r = s + t$, где $s < p$, $t < q$, так что $r < p + q$. Значит, $r \in (p + q)^*$.

Если $r \in (p + q)^*$, то $r < p + q$. Положим

$$h = p + q - r,\ s = p - \frac{h}{2},\ t = q - \frac{h}{2}.$$

Тогда $s \in p^*$, $t \in q^*$ и $r = s + t$, так что $r \in p^* + q^*$. Этим доказано свойство (*a*). Доказательство свойства (*b*) аналогично.

Если $p < q$, то $p \in q^*$, но $p \notin p^*$, так что $p^* < q^*$.

Если $p^* < q^*$, то имеется рациональное число r, такое, что $r \in q^*$, $r \notin p^*$. Значит,

$$p \leqslant r < q,$$

так что $p < q$.

1.29. Теорема. *Если α, β — сечения и $\alpha < \beta$, то существует рациональное сечение r^*, такое, что $\alpha < r^* < \beta$.*

Доказательство. Если $\alpha < \beta$, то существует рациональное число p, такое, что $p \in \beta$, $p \notin \alpha$. Выберем $r > p$ так, что $r \in \beta$. Поскольку $r \in \beta$ и $r \notin r^*$, мы видим, что $r^* < \beta$.

Поскольку $p \in r^*$ и $p \notin \alpha$, мы видим, что $\alpha < r^*$.

1.30. Теорема. *Для любого сечения α имеем $p \in \alpha$ тогда и только тогда, когда $p^* < \alpha$.*

Доказательство. Для любого рационального p имеем $p \notin p^*$. Значит, $p^* < \alpha$, если $p \in \alpha$. Обратно, если $p^* < \alpha$, то существует рациональное q, такое, что $q \in \alpha$ и $q \notin p^*$. Таким образом, $q \geqslant p$; последнее неравенство вместе с $q \in \alpha$ влечет за собой включение $p \in \alpha$.

Вещественные числа

Подведем итоги сказанному в предыдущем разделе. Мы рассмотрели некоторые множества рациональных чисел, которые мы назвали сечениями. Были определены отношение порядка и две операции, названные сложением и умножением, и мы доказали, что получившаяся арифметика сечений подчиняется тем же законам, что и арифметика рациональных чисел. Иными словами, множество всех сечений было превращено в упорядоченное поле.

Особое внимание было уделено специальному классу сечений, так называемым «рациональным сечениям», и мы обнаружили, что при замене рациональных чисел r соответствующими сечениями r^* суммы, произведения и порядок сохраняются (теорема 1.28). Этот же факт можно выразить, сказав, что упорядоченное поле всех рациональных чисел *изоморфно* упорядоченному полю всех рациональных сечений; это позволяет нам отождествить рациональное сечение r^* с рациональным числом r. Разумеется, r^* — это не то же самое, что r, но свойства, с которыми мы имеем дело (арифметика и порядок), одинаковы в этих двух полях.

Теперь определим, что мы будем понимать под вещественным числом.

1.31. Определение. В дальнейшем сечения будут называться *вещественными числами*. Рациональные сечения будут отождест-

вляться с рациональными числами (и будут называться рациональными числами). Все другие сечения будут называться *иррациональными числами*.

Таким образом, множество всех рациональных чисел оказывается подмножеством системы вещественных чисел. Теорема 1.29 показывает, что между любыми двумя вещественными числами имеется рациональное число, а теорема 1.30 показывает, что каждое вещественное число α есть множество всех рациональных чисел p, таких, что $p < \alpha$.

В следующей теореме высказано чрезвычайно важное свойство системы вещественных чисел.

1.32. Теорема (Дедекинд). *Пусть A и B — такие множества вещественных чисел, что*

(*a*) *каждое вещественное число принадлежит или A, или B;*

(*b*) *никакое вещественное число не принадлежит и A, и B;*

(*c*) *ни A, ни B не пусты;*

(*d*) *если $\alpha \in A$ и $\beta \in B$, то $\alpha < \beta$.*

Тогда существует одно (и только одно) вещественное число γ, такое, что $\alpha \leqslant \gamma$ при всех $\alpha \in A$ и $\gamma \leqslant \beta$ при всех $\beta \in B$.

Прежде чем переходить к доказательству, сформулируем такое следствие.

Следствие. *В предположениях теоремы 1.32 либо A содержит наибольшее число, либо B содержит наименьшее число.*

Действительно, если $\gamma \in A$, то γ — *наибольшее число в A*; если $\gamma \in B$, то γ — наименьшее в B; в силу (*a*), одна из этих возможностей должна осуществиться, тогда как, в силу (*b*), они не могут осуществиться обе.

Именно существование γ (единственность тривиальна) составляет содержание этой важной теоремы. Оно показывает, что пробелы, которые мы обнаружили в системе рациональных чисел (ср. с примером 1.1), теперь заполнены. Более того, если бы мы попытались повторить тот процесс, который привел нас от рациональных чисел к вещественным, и начали строить сечения (как в определении 1.4), элементами которых были бы вещественные числа, то каждое сечение имело бы наименьшее верхнее число, и мы смогли бы сразу же отождествить каждое сечение с наименьшим из его верхних чисел, не получив ничего нового.

По этой причине теорему 1.32 иногда называют теоремой полноты для вещественных чисел.

Доказательство теоремы 1.32. Допустим, что имеются два числа γ_1 и γ_2, для которых выполнено заключение теоремы; пусть $\gamma_1 < \gamma_2$. Выберем γ_3 так, что $\gamma_1 < \gamma_3 < \gamma_2$ (это возможно по теореме 1.29). Тогда из неравенства $\gamma_3 < \gamma_2$ следует, что

$\gamma_3 \in A$, в то время как неравенство $\gamma_1 < \gamma_3$ дает $\gamma_3 \in B$. Это противоречит условию (b). Таким образом, существует не более чем одно число γ с требуемыми свойствами.

Пусть γ — множество всех рациональных чисел p, таких, что $p \in \alpha$ при некотором $\alpha \in A$. Мы должны проверить, что γ удовлетворяет условиям определения 1.4.

(I) Поскольку A непусто, γ также непусто. Если $\beta \in B$ и $q \notin \beta$, то $q \notin \alpha$ при любом $\alpha \in A$ (ибо $\alpha < \beta$); значит, $q \notin \gamma$.

(II) Если $p \in \gamma$ и $q < p$, то $p \in \alpha$ при некотором $\alpha \in A$; значит, $q \in \alpha$, поэтому $q \in \gamma$.

(III) Если $p \in \gamma$, то $p \in \alpha$ при некотором $\alpha \in A$; значит, существует $q > p$, такое, что $q \in \alpha$; следовательно, $q \in \gamma$.

Таким образом, γ — вещественное число.

Ясно, что $\alpha \leqslant \gamma$ при всех $\alpha \in A$. Если бы при некотором $\beta \in B$ оказалось, что $\beta < \gamma$, то нашлось бы рациональное число p, такое, что $p \in \gamma$ и $p \notin \beta$; но если $p \in \gamma$, то $p \in \alpha$ при некотором $\alpha \in A$, а отсюда следует, что $\beta < \alpha$, вопреки условию (d). Таким образом, $\gamma \leqslant \beta$ при всех $\beta \in B$, и доказательство закончено.

Теперь мы откажемся от некоторых соглашений об обозначениях, действовавших до сих пор. Буквы p, q, r, ... больше не будут предназначаться только для рациональных чисел, и буквами α, β, γ, ... тоже можно будет пользоваться для разных целей.

1.33. Определение. Пусть E — некоторое множество вещественных чисел. Если существует число y, такое, что $x \leqslant y$ при всех $x \in E$, то мы будем говорить, что множество E *ограничено сверху*, а число y будем называть *верхней границей* множества E.

Нижние границы определяются аналогичным образом. Если множество E ограничено сверху и снизу, то оно называется ограниченным.

1.34. Определение. Пусть E ограничено сверху. Предположим, что y обладает следующими свойствами:

(a) y является верхней границей множества E;

(b) если $x < y$, то x не является верхней границей множества E.

Тогда y называется *верхней гранью* (точной верхней границей) множества E (как следует из (b), существует не более чем одно такое число y). Мы будем употреблять сокращенное обозначение sup для верхней грани.

Нижняя грань (inf) любого множества E, ограниченного снизу, определяется таким же образом.

1.35. Примеры. (a) Пусть множество E состоит из всех чисел $1/n$, где $n = 1, 2, 3 \ldots$. Тогда множество E ограничено,

его верхняя грань равна 1, а его нижняя грань равна 0. Заметим, что в этом случае верхняя грань принадлежит множеству, а нижняя грань — не принадлежит.

В общем случае верхняя грань (или нижняя грань) может принадлежать, а может и не принадлежать множеству.

(*b*) Пусть E состоит из всех неотрицательных чисел. Тогда E ограничено снизу, но не ограничено сверху, и его нижняя грань равна 0.

1.36. Теорема. *Пусть E — непустое множество вещественных чисел, ограниченное сверху. Тогда* $\sup E$ *существует.*

Доказательство. Пусть A — множество вещественных чисел, определенное следующим образом: $\alpha \in A$ в том и только в том случае, когда существует число $x \in E$, такое, что $\alpha < x$. Пусть B состоит из всех вещественных чисел, не принадлежащих A.

Ясно, что никакой элемент множества A не является верхней границей множества E, а каждый элемент множества B является верхней границей множества E. Чтобы доказать существование верхней грани, достаточно поэтому доказать, что B содержит наименьшее число.

Проверим теперь, что A и B удовлетворяют предположениям теоремы 1.32.

Очевидно, что свойства (*a*) и (*b*) выполнены. Поскольку E непусто, существует некоторый элемент $x \in E$ и каждое число $\alpha < x$ принадлежит A. Так как E ограничено сверху, существует число y, такое, что $x \leqslant y$ при всех $x \in E$, значит, $y \in B$ и выполнено свойство (*c*). Если $\alpha \in A$, то существует элемент $x \in E$, такой, что $\alpha < x$. Если $\beta \in B$, то $x \leqslant \beta$. Таким образом, $\alpha < \beta$ при всех $\alpha \in A$, $\beta \in B$, и выполнено (*d*).

Итак, в силу следствия из теоремы 1.32, либо A содержит наибольшее число, либо B содержит наименьшее. Мы докажем, что первая возможность не может осуществиться.

Пусть $\alpha \in A$. Тогда существует число $x \in E$, такое, что $\alpha < x$. Выберем α' так, что $\alpha < \alpha' < x$. Поскольку $\alpha' < x$, то $\alpha' \in A$, так что α не есть наибольшее число в A.

Это завершает доказательство.

В качестве приложения вышеизложенного мы приведем доказательство существования корней n-й степени из положительных вещественных чисел. Тем самым будет показано, как можно преодолеть трудности, отмеченные во введении (иррациональность $\sqrt{2}$).

1.37. Теорема. *Для всякого вещественного $x > 0$ и всякого целого $n > 0$ существует одно и только одно вещественное $y > 0$, такое, что $y^n = x$.*

Это число записывают так: $\sqrt[n]{x}$ или $x^{1/n}$.

Доказательство. Единственность следует из того, что неравенство $0<y_1<y_2$ влечет за собой неравенство $y_1^n<y_2^n$.

Пусть E — множество, состоящее из всех положительных вещественных t, таких, что $t^n<x$.

Если $t=x/(1+x)$, то $0<t<1$; значит, $t^n\leqslant t<x$, так что E непусто.

Положим $t_0=1+x$. Тогда из неравенства $t>t_0$ следует, что $t^n\geqslant t>x$, поэтому $t\notin E$ и t_0 является верхней границей множества E.

Пусть y — верхняя грань множества E (которая существует по теореме 1.36).

Допустим, что $y^n<x$. Выберем h таким, что $0<h<1$ и

$$h<\frac{x-y^n}{(1+y)^n-y^n}.$$

Тогда, обозначая через $\binom{n}{m}$ коэффициент при z^m в разложении бинома $(1+z)^n$, получим

$$(y+h)^n=y^n+\binom{n}{1}y^{n-1}h+\binom{n}{2}y^{n-2}h^2+\ldots+\binom{n}{n}h^n\leqslant$$
$$\leqslant y^n+h\left[\binom{n}{1}y^{n-1}+\binom{n}{2}y^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}\right]=$$
$$=y^n+h\left[(1+y)^n-y^n\right]<y^n+(x-y^n)=x.$$

Таким образом, $y+h\in E$. Это противоречит тому, что y — верхняя граница множества E.

Допустим, что $y^n>x$. Выберем k таким, что $0<k<1$, $k<y$ и

$$k<\frac{y^n-x}{(1+y)^n-y^n}.$$

Тогда при $t\geqslant y-k$ получим

$$t^n\geqslant(y-k)^n=y^n-\binom{n}{1}y^{n-1}k+\binom{n}{2}y^{n-2}k^2-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}k^n=$$
$$=y^n-k\left[\binom{n}{1}y^{n-1}-\binom{n}{2}y^{n-2}k+\ldots-(-1)^n\binom{n}{n}k^{n-1}\right]\geqslant$$
$$\geqslant y^n-k\left[\binom{n}{1}y^{n-1}+\binom{n}{2}y^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}\right]=$$
$$=y^n-k\left[(1+y)^n-y^n\right]>y^n-(y^n-x)=x.$$

Таким образом, $y-k$ является верхней границей множества E, а это противоречит тому, что y — наименьшая из верхних границ множества E.

Следовательно, $y^n = x$.

1.38. Десятичные дроби. В заключение этого раздела укажем на соотношение между вещественными числами и десятичными дробями.

Пусть $x > 0$ — вещественное число. Пусть n_0 — наибольшее целое число, такое, что $n_0 \leqslant x$. Если $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$ уже выбраны, то пусть n_k — наибольшее целое число, такое, что

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} \leqslant x.$$

Пусть E — множество чисел

$$(3) \qquad n_0 + \frac{n_1}{10} + \ldots + \frac{n_k}{10^k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Тогда x — верхняя грань множества E. Десятичное разложение числа x имеет вид

$$(4) \qquad n_0, n_1 n_2 n_3 \ldots.$$

Обратно, для любой бесконечной десятичной дроби (4) множество E чисел вида (3) ограничено сверху[1]), и (4) является десятичным разложением верхней грани этого множества [2]).

Мы не обсуждаем подробно десятичные дроби, так как никогда не будем ими пользоваться.

Расширенная система вещественных чисел

1.39. Определение. Расширенная система вещественных чисел состоит из системы вещественных чисел, к которой присоединены два символа $-\infty$ и $+\infty$, причем выполняются следующие свойства:

(*а*) если x — вещественное число, то $-\infty < x < +\infty$,

$$x + \infty = +\infty, \quad x - \infty = -\infty, \quad \frac{x}{+\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0;$$

(*б*) если $x > 0$, то

$$x \cdot (+\infty) = +\infty, \qquad x \cdot (-\infty) = -\infty;$$

---

[1]) Необходимо отметить, что $n_k \leqslant 9$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. — *Прим. перев.*

[2]) Это утверждение автора следует уточнить. Десятичным разложением числа x названа последовательность чисел (3), полученная с помощью «приближений *по недостатку*», причем каждая конечная дробь, соответствующая последовательности $n_0, n_1 \ldots n_k$, даст наилучшее приближение к x слева с точностью до 10^{-k}. Но в таком случае неверно, что дробь $n_0, n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$, где $n_0 = 0$, $n_k = 9$ $(k = 1, 2, \ldots)$ является десятичным разложением для x; таким десятичным разложением служит дробь $1{,}000\ldots$. — *Прим. перев.*

(*c*) если $x<0$, то

$$x\cdot(+\infty)=-\infty, \qquad x\cdot(-\infty)=+\infty.$$

Если необходимо подчеркнуть различие между символами $-\infty$, $+\infty$, с одной стороны, и вещественными числами, с другой, то последние называют конечными[1]).

1.40. Определение. Пусть E — множество, элементы которого принадлежат расширенной системе вещественных чисел. Если E не ограничено сверху (т. е. если для любого вещественного y существует элемент $x\in E$, такой, что $y<x$), то верхняя грань множества E по определению равна $+\infty$.

Аналогичным образом нижняя грань множества E, не ограниченного снизу, по определению равна $-\infty$.

Итак, в расширенной системе вещественных чисел каждое множество имеет inf и sup. Это и есть главная причина введения символов $-\infty$ и $+\infty$.

Комплексные числа

1.41. Определение. *Комплексным числом* называется пара вещественных чисел a, b (в таком порядке). Обозначим это комплексное число через (a, b).

В этом разделе буквами x, y, z будут обозначаться комплексные числа, буквами a, b, c, ... — вещественные числа; мы будем (временно) писать

$$u=(1, 0); \qquad n=(0, 0).$$

1.42. Определение. Пусть $x=(a, b)$, $y=(c, d)$. Тогда $x=y$ тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$. Паре x, y сопоставим два комплексных числа, обозначаемых через $x+y$, xy и определенных следующим образом:

$$x+y=(a+c,\ b+d),$$
$$xy=(ac-bd,\ ad+bc).$$

---

[1]) Такой способ расширения множества всех вещественных чисел не согласуется с теорией сечений, при помощи которой только что пополнялось множество всех рациональных чисел. Действительно, центральное место в теории Дедекинда занимает доказательство *существования* множества (иррациональных чисел), элементы которого связаны друг с другом и с рациональными числами многочисленными соотношениями (а не просто введение новых символов, удовлетворяющих определенным аксиомам). С этой точки зрения расширение множества всех вещественных чисел можно было бы «построить», рассмотрев еще два сечения: для первого из них (обозначаемого $-\infty$) нижним классом служит пустое множество, а для второго (обозначаемого $+\infty$) — множество всех рациональных чисел. Разумно определив смысл символов $x\pm\infty$, $x\cdot(\pm\infty)$, отношений $<$, $>$ и т. д., можно было бы *доказать* свойства (*a*), (*b*), (*c*). — *Прим. перев.*

1.43. Теорема. *Для операций сложения и умножения, введенных в определении* 1.42, *выполняются законы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.*

Доказательство. Пусть $x=(a, b)$, $y=(c, d)$, $z=(e, f)$.

(*a*) $x+y=(a+c,\ b+d)=(c+a,\ d+b)=y+x$;

(*b*) $(x+y)+z=(a+c,\ b+d)+(e,\ f)=(a+c+e,\ b+d+f)=$
$=(a,\ b)+(c+e,\ d+f)=x+(y+z)$;

(*c*) $xy=(ac-bd,\ ad+bc)=(ca-db,\ da+cb)=(c,\ d)(a,\ b)=yx$;

(*d*) $(xy)z=(ac-bd,\ ad+bc)(e,\ f)=$
$=(ace-bde-adf-bcf,\ acf-bdf+ade+bce)=$
$=(a,\ b)(ce-df,\ cf+de)=x(yz)$;

(*e*) $(x+y)z=(a+c,\ b+d)(e,\ f)=$
$=(ae+ce-bf-df,\ af+cf+be+de)=$
$=(ae-bf,\ af+be)+(ce-df,\ cf+de)=xz+yz$.

1.44. Теорема. *Для любого комплексного* x *имеем* $x+n=x$, $xn=n$, $xu=x$.

Доказательство. Это следует непосредственно из определения 1.42.

1.45. Теорема. *Если* $x+y=x+z$, *то* $y=z$.

Доказательство. Если $y\neq z$, то, как показывают определение 1.42 и теорема 1.18, $x+y\neq x+z$.

1.46. Теорема. *Для любого комплексного числа* x *существует одно и только одно комплексное число* y, такое, что $x+y=n$.

Мы обозначим это число y через $-x$.

Доказательство. Единственность следует из теоремы 1.45. Чтобы доказать существование, допустим, что $x=(a, b)$, и положим $-x=(-a,\ -b)$.

1.47. Теорема. *Если писать* $x-y$ *вместо* $x+(-y)$, *то*

(*a*) $x-x=n$,

(*b*) $(-x)y=x(-y)=-(xy)=(-u)(xy)$,

так что не возникнет никакой неясности, если мы будем все эти выражения записывать в виде $-xy$.

Доказательства тривиальны.

1.48. Определение. Пусть $x=(a, b)$. Мы будем называть *абсолютной величиной* числа x число $|x|=\sqrt{a^2+b^2}$ (мы рас-

сматриваем только неотрицательное значение квадратного корня, которое определяется единственным образом по теореме 1.37).

Заметим, что абсолютная величина комплексного числа — неотрицательное вещественное число.

1.49. Теорема. *Для любых комплексных чисел x, y имеем*

(*a*) $|x|>0$, *если* $x\neq n$, *и* $|n|=0$;

(*b*) $|xy|=|x||y|$.

Доказательство. Свойство (*a*) тривиально. Что касается (*b*), то пусть $x=(a, b)$, $y=(c, d)$. Тогда $|xy|^2=|(ac-bd, ad+bc)|^2=a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=|x|^2|y|^2$. Значит,

$$|xy|=\sqrt{|x|^2|y|^2}=|x||y|.$$

Доказать последнее равенство мы предоставляем читателю (упражнение 4).

1.50. Теорема. *Если* $xy=n$, *то либо* $x=n$, *либо* $y=n$.

Доказательство. Если $xy=n$, то по теореме 1.49

$$|x||y|=|xy|=|n|=0.$$

Поскольку $|x|$ и $|y|$ вещественны, отсюда следует, что либо $|x|=0$, либо $|y|=0$, т. е. либо $x=n$, либо $y=n$.

1.51. Теорема. *Если* $x\neq n$ *и* $xy=xz$, *то* $y=z$.

Доказательство. Имеем

$$x(y-z)=xy-xz=n.$$

По теореме 1.50 $y-z=n$, т. е. $y=z$.

1.52. Теорема. *Для любого комплексного* $x\neq n$ *существует одно и только одно комплексное число* y (*которое мы будем записывать в виде* u/x), *такое, что* $xy=u$.

Доказательство. Единственность следует из теоремы 1.51. Пусть $x=(a, b)$. Положим

$$y=\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right).$$

Тогда

$$xy=(a, b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1, 0)=u.$$

1.53. Теорема. *Если* $x\neq n$, *то для любого комплексного* y *существует одно и только одно комплексное* z (*которое мы будем записывать в виде* y/x), *такое, что* $xz=y$.

Доказательство. Положим $z=(u/x)\cdot y$. Тогда

$$xz=x\cdot\frac{u}{x}\cdot y=u\cdot y=y.$$

Итак, мы показали, что комплексные числа со сложением и умножением, введенными в определении 1.42, подчиняются всем обычным законам арифметики.

1.54. Теорема. *Для любых вещественных чисел a и b имеем*

(*a*) $(a,\ 0)+(b,\ 0)=(a+b,\ 0)$,

(*b*) $(a,\ 0)(b,\ 0)=(ab,\ 0)$,

(*c*) $\left(\frac{a,\ 0}{b,\ 0}\right)=\left(\frac{a}{b},\ 0\right)$, *если* $b\neq 0$,

(*d*) $|(a,\ 0)|=|a|$.

В (*d*) символ $|a|$ нужно понимать в смысле определения 1.24.

Доказательство тривиально.

Теорема 1.54 показывает, что комплексные числа вида $(a,\ 0)$ обладают теми же арифметическими свойствами, что и вещественные числа a.

Мы можем поэтому отождествить $(a,\ 0)$ с a; это отождествление превращает множество всех вещественных чисел в подмножество системы комплексных чисел.

В частности, мы будем теперь писать 0 вместо n и 1 вместо u.

Читатель, вероятно, заметил, что мы построили арифметику комплексных чисел, не вводя таинственного символа «$\sqrt{-1}$». Теперь мы хотим показать, что обозначение $(a,\ b)$ равносильно более привычному $a+bi$.

1.55. Определение. $i=(0,\ 1)$.

1.56. Теорема. $i^2=-1$.

Доказательство. $i^2=(0,\ 1)(0,\ 1)=(-1,\ 0)=-1$.

1.57. Теорема. *Если a и b — вещественные числа, то* $(a,\ b)=a+bi$.

Доказательство. $a+bi=(a,\ 0)+(b,\ 0)(0,\ 1)=(a,\ 0)+(0,\ b)=(a,\ b)$.

1.58. Теорема. *Если x и y — комплексные числа, то*

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

Доказательство. Если $x+y=0$, то доказывать нечего. Допустим, что $x+y\neq 0$, и положим

$$\lambda=\frac{|x+y|}{x+y}.$$

Умножая на $x+y$, мы заключаем по теореме 1.49(b), что $|\lambda|=1$. Кроме того, $\lambda x+\lambda y$ — вещественное число. Если $\lambda x=(a, b)$ и $\lambda y=(c, d)$, то, как показывает определение 1.48,

$$|a|\leqslant|\lambda x|=|x|, \qquad |c|\leqslant|\lambda y|=|y|,$$

значит,

$$|x+y|=\lambda x+\lambda y=a+c\leqslant|a|+|c|\leqslant|x|+|y|.$$

1.59. Определение. Если a и b — вещественные числа и $z=a+bi$, то комплексное число $\bar{z}=a-bi$ называется *сопряженным* с z.

1.60. Теорема. *Если x, y — комплексные числа, то*

(a) $\overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y}$,

(b) $\overline{xy}=\bar{x}\cdot\bar{y}$,

(c) $x\bar{x}=|x|^2$ (*значит, число $x\bar{x}$ вещественно и неотрицательно*),

(d) $x+\bar{x}$ — *вещественное число*,

(e) *если x вещественно, то $\bar{x}=x$.*

Доказательства этих утверждений тривиальны.

1.61. Обозначение. Если $x_1, \ldots, x_n$ — комплексные числа, то мы будем писать

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Мы закончим этот раздел важным неравенством, известным под названием неравенства Шварца.

1.62. Теорема. *Если $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ — комплексные числа, то*

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j\bar{b}_j\right|^2\leqslant\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\sum_{j=1}^{n}|b_j|^2.$$

Доказательство. Положим $A=\sum|a_j|^2$, $B=\sum|b_j|^2$, $C=\sum a_j\bar{b}_j$ (во всех суммах в доказательстве j пробегает множество чисел $1, \ldots, n$). Если $B=0$, то $b_1=\ldots=b_n=0$, и заключение тривиально. Допустим поэтому, что $B>0$. По теореме 1.60 имеем

$$\sum|Ba_j-Cb_j|^2=\sum(Ba_j-Cb_j)(B\bar{a}_j-\overline{Cb_j})=$$
$$=B^2\sum|a_j|^2-B\bar{C}\sum a_j\bar{b}_j-BC\sum a_jb_j+$$
$$+|C|^2\sum|b_j|^2=B^2A-B|C|^2=B(AB-|C|^2).$$

Мы видим, что

$$B(AB-|C|^2)\geqslant 0,$$

так как все слагаемые в первой сумме неотрицательны. Отсюда следует, что $AB-|C|^2\geqslant 0$, поскольку $B>0$. Но это и есть требуемое неравенство.

Евклидовы пространства

1.63. Определения. Для каждого положительного целого k обозначим через R^k множество всех упорядоченных последовательностей из k вещественных чисел

$$\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ \ldots,x_k);$$

числа $x_1,\ldots,x_k$ называются координатами элемента $\mathbf{x}$. Элементы множества R^k называются точками, или векторами, особенно при $k>1$. Мы будем обозначать векторы буквами, набранными жирным шрифтом. Если $\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_k)$ и α — вещественное число, то положим

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1,\ \ldots,x_k+y_k),$$
$$\alpha\mathbf{x}=(\alpha x_1,\ \ldots,\ \alpha x_k),$$

так что $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in R^k$ и $\alpha\mathbf{x}\in R^k$. Тем самым определено сложение векторов, а также умножение вектора на вещественное число (скаляр). Эти две операции подчиняются законам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности (доказательство тривиально, так как аналогичным законам подчиняются вещественные числа) и превращают R^k *в векторное пространство над полем вещественных чисел*. Нулевой элемент пространства R^k (иногда называемый *началом*, или *нулевым вектором*) — это точка $\mathbf{0}$, все координаты которой равны 0.

Мы определим еще так называемое *скалярное* (*или внутреннее*) *произведение* векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\sum_{i=1}^{k}x_iy_i,$$

а также *норму* вектора $\mathbf{x}$:

$$|\mathbf{x}|=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{1/2}=\left(\sum_{1}^{k}x_i^2\right)^{1/2}.$$

Определенная таким образом структура (векторное пространство R^k со скалярным произведением и нормой) называется евклидовым k-мерным пространством.

1.64. Теорема. *Пусть* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in R^k$ *и* α — *вещественное число. Тогда*

(*a*) $|\mathbf{x}| \geqslant 0$;
(*b*) $|\mathbf{x}| = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
(*c*) $|\alpha\mathbf{x}| = |\alpha|\,|\mathbf{x}|$;
(*d*) $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|$;
(*e*) $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leqslant |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$;
(*f*) $|\mathbf{x}-\mathbf{z}| \leqslant |\mathbf{x}-\mathbf{y}| + |\mathbf{y}-\mathbf{z}|$.

Доказательство. Утверждения (*a*), (*b*) и (*c*) очевидны, а (*d*) следует непосредственно из неравенства Шварца. В силу (*d*), имеем

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \leqslant$$
$$\leqslant |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2,$$

что доказывает (*e*). Наконец, (*f*) следует из (*e*), если заменить $\mathbf{x}$ на $\mathbf{x}-\mathbf{y}$, $\mathbf{y}$ на $\mathbf{y}-\mathbf{z}$.

1.65. Замечания. Теорема 1.64 (*a*), (*b*) и (*f*) позволит нам (см. гл. 2) рассматривать R^k как метрическое пространство.

Пространство R^1 (множество всех вещественных чисел) обычно называют прямой, или вещественной прямой. Аналогичным образом, R^2 называют плоскостью (ср. определения 1.41 и 1.63). В этих двух случаях норма — это абсолютная величина соответствующего вещественного или комплексного числа.

Упражнения

1. Пусть r — рациональное число ($r \neq 0$), а x — иррациональное. Доказать, что числа $r+x$ и rx иррациональны.

2. Доказать, что между любыми двумя вещественными числами содержится иррациональное число.

3. Доказать, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 12.

4. Пусть $x > 0$, $y > 0$ и n — положительное целое число. Доказать, что

$$\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

(ср. с теоремой 1.37).

5. Если $x > 0$, а r — рациональное число ($r = n/m$), то положим

$$x^r = \sqrt[m]{x^n}.$$

Доказать, что $x^r = (\sqrt[m]{x})^n$.

6. Доказать, что если $x > 1$, то $x^p < x^q$ при любых рациональных p, q, таких, что $p < q$.

7. Определить x^y для $x>1$ и вещественного y, используя упражнение 6 и метод теоремы 1.37, и доказать, что

(*a*) $x^y<x^z$, если $1<x$, $y<z$;

(*b*) $x^y<z^y$, если $1<x<z$, $y>0$;

(*c*) $x^{y+z}=x^yx^z$.

8. Как нужно изменить упражнения 6 и 7, если $0\leqslant x\leqslant 1$?

9. Пусть $b>1$, $x>0$. Доказать, что существует одно и только одно вещественное число y, такое, что $x=b^y$. Это число y называется логарифмом x при основании b.

10. В каких пунктах нашего изложения теории вещественных чисел возникли бы трудности, если бы было опущено условие III определения 1.4?

11. Если $z_1, \ldots, z_n$ — комплексные числа, то

$$|z_1+z_2+\ldots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|.$$

12. Если x и y — комплексные числа, то

$$||x|-|y||\leqslant|x-y|.$$

13. Теорема 1.36 была выведена из теоремы 1.32. На самом деле эти теоремы равносильны. Чтобы убедиться в этом, докажите теорему 1.32, не пользуясь сечениями в множестве рациональных чисел, а используя как постулат теорему 1.36 и обычные арифметические свойства вещественных чисел.

14. Пусть z — такое комплексное число, что $|z|=1$, т. е. $z\bar{z}=1$. Вычислить $|1+z|^2+|1-z|^2$.

15. При каких условиях в неравенстве Шварца имеет место равенство?

16. Предположим, что $k\geqslant 3$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\in R^k$, $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=d>0$ и $r>0$. Доказать, что

(*a*) если $2r>d$, то существует бесконечное множество точек $\mathbf{z}\in R^k$, таких, что

$$|\mathbf{z}-\mathbf{x}|=|\mathbf{z}-\mathbf{y}|=r;$$

(*b*) если $2r=d$, то существует в точности одна такая точка $\mathbf{z}$;

(*c*) если $2r<d$, то не существует таких $\mathbf{z}$.

Как нужно изменить эти утверждения, если $k=2$, $k=1$?

17. Доказать, что

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2=2|\mathbf{x}|^2+2|\mathbf{y}|^2,$$

если $\mathbf{x}\in R^k$, $\mathbf{y}\in R^k$. Истолковать это геометрически, как некоторое утверждение о параллелограммах.

18. Доказать, что если $k\geqslant 2$ и $\mathbf{x}\in R^k$, то существует вектор $\mathbf{y}\in R^k$, такой, что $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$, но $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$. Верно ли это при $k=1$?

19. Пусть $\mathbf{a}\in R^k$, $\mathbf{b}\in R^k$. Найти $\mathbf{c}\in R^k$ и $r>0$, такие, что $|\mathbf{x}-\mathbf{a}|=2|\mathbf{x}-\mathbf{b}|$ тогда и только тогда, когда $|\mathbf{x}-\mathbf{c}|=r$.

(Решение: $3\mathbf{c}=4\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $3r=2|\mathbf{b}-\mathbf{a}|$.)