ГЛАВА 2

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Конечные, счетные и несчетные множества

Мы начнем этот раздел с определения понятия функции.

2.1. Определение. Рассмотрим два множества A и B, элементами которых могут быть любые объекты, и предположим, что каждому элементу x множества A некоторым способом поставлен в соответствие элемент множества B, который мы обозначим через $f(x)$. Тогда f называется *функцией* из A в B (или *отображением* множества A в B).

Множество A называется *областью определения* функции f (мы будем говорить также, что f определена на A), а элементы $f(x)$ называются *значениями* f. Множество всех значений функции f называется ее *областью значений*.

2.2. Определение. Мы будем говорить, что множество A есть *подмножество* множества B, и писать $A \subset B$ (или $B \supset A$), если каждый элемент множества A является элементом множества B. Если, кроме того, в B имеется элемент, не принадлежащий A, то A называется *собственным* подмножеством множества B.

В частности, пустое множество $\varnothing$ служит подмножеством любого множества, и $A \subset A$, каково бы ни было множество A.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то мы будем писать $A = B$.

2.3. Замечание. То обстоятельство, что пустое множество является подмножеством любого множества, связано с одной логической тонкостью, часто вызывающей трудности у начинающих.

Из определения 2.2 ясно, что если множество A *не* есть подмножество множества B, то должно быть верным следующее утверждение: «существует элемент x, такой, что $x \in A$ и $x \notin B$». Но если A пусто, то не существует такого x, что $x \in A$, и высказанное только что утверждение ложно.

Подобные рассуждения применимы всегда, когда мы хотим проверить, что пустое множество удовлетворяет некоторым условиям.

2.4. Определение. Пусть A и B — два множества, и пусть f — отображение A в B. Если $E \subset A$, то $f(E)$ определяется как

множество всех элементов $f(x)$ для $x \in E$. Мы будем называть $f(E)$ *образом* множества E при отображении f. В этих обозначениях $f(A)$ — это множество значений f. Ясно, что $f(A) \subset B$. Если $f(A) = B$, то мы будем говорить, что f отображает A *на* B. (Заметим, что в соответствии с этим словоупотреблением *на* означает большее, чем *в*.)

Если $E \subset B$, то $f^{-1}(E)$ обозначает множество всех $x \in A$, таких, что $f(x) \in E$. Мы будем называть $f^{-1}(E)$ *прообразом* множества E при отображении f. Если $y \in B$, то $f^{-1}(y)$ — это множество всех $x \in A$, таких, что $f(x) = y$. Если при каждом $y \in B$ множество $f^{-1}(y)$ состоит не более чем из одного элемента A, то f называется *взаимно однозначным* отображением A в B. Это можно выразить следующим образом: отображение f множества A в B взаимно однозначно, если $f(x_1) \neq f(x_2)$ каждый раз, когда $x_1 \neq x_2$, $x_1 \in A$, $x_2 \in A$.

(Запись $x_1 \neq x_2$ означает, что x_1 и x_2 — различные элементы; в противном случае мы пишем $x_1 = x_2$.)

2.5. Определение. Если существует взаимно однозначное отображение множества A *на* множество B, то мы будем говорить, что между A и B может быть установлено взаимно однозначное *соответствие*, или что A и B имеют одно и то же *кардинальное число*, или, короче, что A и B эквивалентны, и будем писать $A \sim B$. Это отношение, очевидно, обладает следующими свойствами:

рефлексивность: $A \sim A$;
симметричность: если $A \sim B$, то $B \sim A$;
транзитивность: если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Всякое отношение, обладающее этими тремя свойствами, называется *отношением эквивалентности*.

2.6. Определение. Пусть n — любое положительное целое число; J_n — множество, элементами которого служат целые числа $1, \ldots, n$; J — множество, состоящее из всех положительных целых чисел; A — любое множество. Мы будем говорить, что

(*a*) A *конечно*, если $A \sim J_n$ при некотором n (пустое множество также считается конечным);

(*b*) A *бесконечно*, если A не является конечным;

(*c*) A *счетно*, если $A \sim J$;

(*d*) A *несчетно*, если A не конечно и не счетно;

(*e*) A *не более чем счетно*, если A или конечно, или счетно.

Если A и B — конечные множества, то очевидно, что $A \sim B$ тогда и только тогда, когда A и B содержат одно и то же число элементов. Однако для бесконечных множеств смысл слов «содержат одно и то же число элементов» становится очень туманным.

Он проясняется с помощью понятия взаимно однозначного соответствия.

2.7. Пример. Пусть A — множество всех целых чисел. Тогда A — счетное множество. Действительно, рассмотрим следующее расположение множеств A и J

$$A: 0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3, -3,\ \ldots,$$
$$J: 1,\ 2,\quad 3,\ 4,\quad 5,\ 6,\quad 7,\ \ldots.$$

В этом примере мы можем даже указать в явном виде формулу для отображения f множества J в A, устанавливающего взаимно однозначное соответствие между этими множествами:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & (n \text{ четно}), \\ -\dfrac{n-1}{2} & (n \text{ нечетно}). \end{cases}$$

2.8. Замечание. Конечное множество не может быть эквивалентно своему собственному подмножеству. Однако для бесконечных множеств это возможно, как показывает пример 2.7, в котором J — собственное подмножество множества A.

В действительности мы могли бы заменить определение 2.6 (b) следующей формулировкой: A бесконечно, если A эквивалентно одному из своих собственных подмножеств.

2.9. Определение. *Последовательностью* мы будем называть функцию f, определенную на множестве J всех положительных целых чисел. Если $f(n) = x_n$ при $n \in J$, то принято обозначать последовательность f символом $\{x_n\}$ или писать $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Значения функции f, т. е. элементы x_n, называются *членами* последовательности. Если A — некоторое множество и если $x_n \in A$ при всех $n \in J$, то $\{x_n\}$ называется *последовательностью* в A, или *последовательностью элементов множества* A.

Заметим, что члены $x_1, x_2, x_3, \ldots$ последовательности не обязаны быть различными.

Ввиду того что всякое счетное множество служит множеством значений некоторой взаимно однозначной функции, определенной на J, мы можем рассматривать всякое счетное множество как множество значений некоторой последовательности с различными членами. Допуская некоторую вольность речи, говорят, что элементы любого счетного множества можно «расположить в последовательность».

Иногда удобно заменить в этом определении J множеством всех неотрицательных целых чисел, т. е. начинать с 0, а не с 1.

2.10. Теорема. *Всякое бесконечное подмножество счетного множества A счетно.*

Доказательство. Предположим, что $E \subset A$ и E бесконечно. Расположим элементы x множества A в последовательность $\{x_n\}$ с различными членами. Построим последовательность $\{n_k\}$ следующим образом.

Пусть n_1 — наименьшее целое положительное число, такое, что $x_{n_1} \in E$. Если $n_1, \ldots, n_{k-1}$ $(k=2, 3, 4, \ldots)$ уже выбраны, то пусть n_k — наименьшее целое число, большее n_{k-1} и такое, что $x_{n_k} \in E$.

Полагая $f(k) = x_{n_k}$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$, мы получим взаимно однозначное соответствие между E и J.

Эта теорема показывает, что, грубо говоря, счетные множества представляют «наименьшую» бесконечность: никакое несчетное множество не может быть подмножеством счетного.

2.11. Определение. Пусть A и Ω — множества; предположим, что каждому элементу α множества A сопоставлено некоторое подмножество множества Ω, которое мы обозначим через E_α.

Множество, элементами которого служат множества E_α, будет обозначаться через $\{E_\alpha\}$. Вместо того чтобы говорить о множестве множеств, мы иногда будем говорить о наборе множеств или о семействе множеств[1]).

Объединение семейства множеств $\{E_\alpha\}$ определяется как множество S, такое, что $x \in S$ тогда и только тогда, когда $x \in E_\alpha$ хотя бы при одном $\alpha \in A$. Мы будем пользоваться обозначением

$$S = \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha. \tag{1}$$

Если A состоит из целых чисел $1, \ldots, n$, то обычно пишут

$$S = \bigcup_{m=1}^{n} E_m \tag{2}$$

или

$$S = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n. \tag{3}$$

Если A — множество всех положительных целых чисел, то обычное обозначение таково:

$$S = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m. \tag{4}$$

---

[1]) На самом деле «множество множеств» — это понятие, по существу отличное от понятия «семейств множеств», которое здесь определено. Семейство множеств есть *отображение* множества A в множество всех подмножеств множества Ω. Может оказаться, что $E_{\alpha'} = E_{\alpha''}$ при $\alpha' \neq \alpha''$, $\alpha', \alpha'' \in \Omega$. — *Прим. перев.*

Символ ∞ в (4) указывает только, что берется объединение *счетного* семейства множеств. Его не следует смешивать с символами $+\infty$, $-\infty$, введенными в определении 1.39.

Пересечение семейства множеств $\{E_\alpha\}$ определяется как множество P, такое, что $x \in P$ тогда и только тогда, когда $x \in E_\alpha$ при всех $\alpha \in A$. Мы будем пользоваться обозначением

$$P = \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha, \tag{5}$$

или

$$P = \bigcap_{m=1}^{n} E_m = E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n, \tag{6}$$

или

$$P = \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m; \tag{7}$$

как для объединений. Если множество $A \cap B$ не пусто, то мы будем говорить, что A и B *пересекаются*, в противном случае — что они *не пересекаются*.

2.12. Примеры. (a) Допустим, что E_1 состоит из чисел 1, 2, 3, а E_2 — из чисел 2, 3, 4. Тогда $E_1 \cup E_2$ состоит из чисел 1, 2, 3, 4, в то время как $E_1 \cap E_2$ — из чисел 2, 3.

(b) Пусть A — множество всех вещественных чисел x, таких, что $0 < x < 1$. Для любого $x \in A$ пусть E_x — множество всех вещественных чисел y, таких, что $0 < y < x$. Тогда

(i) $E_x \subset E_z$ тогда и только тогда, когда $0 < x \leqslant z < 1$;

(ii) $\bigcup_{x \in A} E_x = E_1$;

(iii) $\bigcap_{x \in A} E_x$ пусто.

Утверждения (i) и (ii) очевидны. Чтобы доказать (iii), заметим, что при любом $y > 0$ имеем $y \notin E_x$, если $x < y$. Значит, $y \notin \bigcap_{x \in A} E_x$.

2.13. Замечания. Многие свойства объединений и пересечений совершенно аналогичны свойствам сумм и произведений. В действительности слова «сумма» и «произведение» иногда употребляют в этом смысле и вместо $\cup$ и $\cap$ пишут $\sum$ и $\prod$.

Законы коммутативности и ассоциативности тривиально выполняются

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A; \tag{8}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C). \tag{9}$$

Этим оправдано отсутствие скобок в (3) и (6). Закон дистрибутивности также выполняется:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{10}$$

Чтобы доказать это, обозначим левую и правую части равенства (10) соответственно через E и F.

Допустим, что $x \in E$. Тогда $x \in A$ и $x \in B \cup C$, т. е. $x \in B$ или $x \in C$ (или и то и другое). Значит, $x \in A \cap B$ или $x \in A \cap C$, так что $x \in F$. Таким образом, $E \subset F$.

Предположим теперь, что $x \in F$. Тогда $x \in A \cap B$ или $x \in A \cap C$. Таким образом, $x \in A$ и $x \in B \cup C$. Значит, $x \in A \cap (B \cup C)$, так что $F \subset E$ Следовательно, $E = F$.

Перечислим еще несколько легко проверяемых соотношений:

(11) $$A \subset A \cup B,$$

(12) $$A \cap B \subset A.$$

Если $\varnothing$ обозначает пустое множество, то

(13) $$A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

Если $A \subset B$, то

(14) $$A \cup B = B, \quad A \cap B = A.$$

2.14. Теорема. *Пусть* $\{E_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, — *последовательность счетных множеств; положим*

(15) $$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Тогда множество S *счетно.*

Доказательство. Расположим каждое множество E_n в последовательность $\{x_{nk}\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, и рассмотрим бесконечную таблицу

(16) $$\begin{array}{ccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array}$$

в которой элементы множества E_n образуют n-ю строку. Эта таблица содержит все элементы множества S. Эти элементы можно расположить в последовательность так, как указывают стрелки:

(17) $$x_{11};\ x_{21},\ x_{12};\ x_{31},\ x_{22},\ x_{13};\ x_{41},\ x_{32},\ x_{23},\ x_{14};\ \ldots.$$

Если какие-нибудь два множества E_n имеют общие элементы, то они появятся в (17) более чем один раз. Значит, существует подмножество T множества всех положительных целых чисел, такое, что $S \sim T$, откуда следует, что множество S не более чем счетно (теорема 2.10). Поскольку $E_1 \subset S$ и E_1 бесконечно, то и S бесконечно, и поэтому счетно.

Следствие. *Допустим, что A не более чем счетно и что при каждом $\alpha \in A$ множество B_α не более чем счетно. Положим*

$$T = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha.$$

Тогда множество T не более чем счетно.

Действительно, T эквивалентно некоторому подмножеству множества (15).

2.15. Теорема. *Пусть A — счетное множество, и пусть B_n — множество всех наборов $(a_1, \ldots, a_n)$ из n членов, где $a_k \in A$ $(k = 1, \ldots, n)$ и элементы $a_1, \ldots, a_n$ не обязательно различны. Тогда множество B_n счетно.*

Доказательство. То, что множество B_1 счетно, — очевидно.

Допустим, что множество B_{n-1} счетно $(n = 2, 3, 4, \ldots)$. Элементы B_n имеют вид

$$(b, a) \quad (b \in B_{n-1},\ a \in A). \tag{18}$$

При каждом фиксированном b множество всех пар (b, a) эквивалентно множеству A и, значит, счетно. Таким образом, B_n — объединение счетного множества счетных множеств. По теореме 2.14 B_n счетно.

Утверждение теоремы доказано по индукции.

Следствие. *Множество всех рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Применим теорему 2.15, взяв $n = 2$ и заметив, что каждое рациональное число r имеет вид b/a, где a и b — целые числа. Множество пар (a, b), а поэтому и множество дробей b/a, счетно.

На самом деле даже множество всех алгебраических чисел счетно (см. упражнение 5).

Следующая теорема показывает, однако, что не все бесконечные множества счетны.

2.16. Теорема. *Пусть A — множество всех последовательностей, элементы которых — цифры 0 и 1. Множество A несчетно.*

Элементами A служат последовательности вида 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, ...

Доказательство. Пусть E — счетное подмножество множества A, и пусть E состоит из последовательностей $s_1, s_2, s_3, \ldots$.

Построим последовательность s следующим образом. Если n-я цифра в s_n равна 1 (соответственно 0), то пусть n-я цифра в s равна 0 (соответственно 1). Тогда последовательность s отличается от каждого элемента множества E хотя бы одним членом, значит, $s \notin E$. Но очевидно, что $s \in A$, так что E — собственное подмножество множества A.

Мы показали, что каждое счетное подмножество множества A является собственным подмножеством. Следовательно, A несчетно (потому что в противном случае A было бы своим собственным подмножеством, что невозможно).

Идею приведенного доказательства впервые высказал Кантор. Такой метод доказательства называют канторовским диагональным процессом, потому что если последовательности s_1, s_2, ... расположить в виде таблицы типа (16), то при построении новой последовательности будут учитываться элементы диагонали.

Читатели, знакомые с двоичным представлением вещественных чисел, когда за основание вместо числа 10 берется число 2, заметят, что из теоремы 2.16 следует, что множество всех вещественных чисел несчетно. Второе доказательство этого факта мы дадим в теореме 2.43.

Метрические пространства

2.17. Определение. Говорят, что множество X, элементы которого мы будем называть *точками*, есть *метрическое пространство*, если любым двум точкам p и q множества X соответствует вещественное число $d(p, q)$, называемое *расстоянием* от p до q, такое, что

(*a*) $d(p, q) > 0$, если $p \neq q$; $d(p, p) = 0$;

(*b*) $d(p, q) = d(q, p)$;

(*c*) $d(p, q) \leqslant d(p, r) + d(r, q)$ при любом $r \in X$.

2.18. Примеры. Самыми важными примерами метрических пространств с нашей точки зрения служат евклидовы пространства R^k, особенно R^1 (вещественная прямая) и R^2 (комплексная плоскость); расстояние в R^k определяется так:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^k). \tag{19}$$

По теореме 1.64 метрика (19) удовлетворяет условиям определения 2.17.

Важно заметить, что каждое подмножество Y метрического пространства X в свою очередь является метрическим пространством с той же самой функцией расстояния. В самом деле, ясно, что если условия (*a*) — (*c*) определения 2.17 выполнены для p, q, $r \in X$, то они выполнены и для p, q, r, лежащих в Y.

Таким образом, каждое подмножество евклидова пространства — метрическое пространство. Другими примерами служат пространства $\mathscr{C}(K)$ и $\mathscr{L}^2(\mu)$, рассматриваемые соответственно в гл. 7 и 10.

2.19. Определение. Под *интервалом* (a, b) мы будем понимать множество всех вещественных чисел x, таких, что $a < x < b$.

Под *сегментом* $[a, b]$ мы будем понимать множество всех вещественных чисел x, таких, что $a \leqslant x \leqslant b$.

Иногда мы будем встречаться с полуинтервалами $[a, b)$ и $(a, b]$; первый состоит из всех x, таких, что $a \leqslant x < b$, второй — из всех x, таких, что $a < x \leqslant b$.

Если $a_i < b_i$ при $i = 1, \ldots, k$, то множество всех точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ в R^k, координаты которых удовлетворяют неравенствам $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, называется *$k$-мерной клеткой*. Таким образом, одномерная клетка — это сегмент, двумерная клетка — прямоугольник и т. д.

Если $\mathbf{x} \in R^k$ и $r > 0$, то *открытый* (или *замкнутый*) *шар* B с центром в $\mathbf{x}$ радиусом r есть по определению множество всех $\mathbf{y} \in R^k$, таких, что $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r$ (или $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \leqslant r$).

Назовем множество $E \subset R^k$ *выпуклым*, если при любых $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{y} \in E$ и $0 < \lambda < 1$

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in E.$$

Например, *шары выпуклы*, ибо если $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r$, $|\mathbf{z} - \mathbf{x}| < r$ и $0 < \lambda < 1$, то

$$|\lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z} - \mathbf{x}| = |\lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + (1 - \lambda)(\mathbf{z} - \mathbf{x})| \leqslant \lambda|\mathbf{y} - \mathbf{x}| + \\ + (1 - \lambda)|\mathbf{z} - \mathbf{x}| < \lambda r + (1 - \lambda) r = r.$$

То же доказательство применимо и к замкнутым шарам. Легко видеть также, что k-мерные клетки выпуклы.

2.20. Определение. Пусть X — метрическое пространство. Все упоминаемые ниже точки и множества следует считать элементами и подмножествами пространства X.

(*a*) *Окрестностью* точки p называется множество $N_r(p)$, состоящее из всех точек q, таких, что $d(p, q) < r$. Число r называется *радиусом* окрестности $N_r(p)$.

(*b*) Точка p называется *предельной точкой* множества E, если *каждая* окрестность точки p содержит точку $q \neq p$, такую, что $q \in E$.

(*c*) Если $p \in E$ и p не является предельной точкой множества E, то p называется *изолированной точкой* множества E.

(*d*) Множество E *замкнуто*, если каждая предельная точка множества E является точкой множества E.

(*e*) Точка p называется *внутренней* точкой множества E, если она имеет окрестность N, такую, что $N \subset E$.

(*f*) Множество E *открыто*, если каждая точка множества E является его внутренней точкой.

(*g*) *Дополнением* множества E (обозначается символом E^c) называется множество всех точек $p \in X$, таких, что $p \notin E$.

(*h*) Множество E *совершенно*, если оно замкнуто и если каждая точка множества E является его предельной точкой.

(*i*) Множество E *ограничено*, если существуют вещественное число M и точка $q \in X$, такие, что $d(p, q) < M$ при всех $p \in E$.

(*j*) Множество E *всюду плотно* в X, если каждая точка множества X является либо предельной точкой множества E, либо принадлежит множеству E (либо и то, и другое).

Отметим, что окрестностями в R^1 служат интервалы, в то время как окрестности в R^2 — это внутренности окружностей.

2.21. Теорема. *Всякая окрестность является открытым множеством.*

Доказательство. Рассмотрим окрестность $E = N_r(p)$; пусть q — какая-нибудь точка множества E. Тогда существует положительное вещественное число h, такое, что

$$d(p, q) = r - h.$$

Для всех точек s, таких, что $d(q, s) < h$, мы имеем

$$d(p, s) \leqslant d(p, q) + d(q, s) < r - h + h < r,$$

так что $s \in E$. Таким образом, q — внутренняя точка множества E.

2.22. Теорема. *Если p — предельная точка множества E, то любая окрестность точки p содержит бесконечно много точек множества E.*

Доказательство. Предположим, что существует окрестность N точки p, содержащая только конечное число точек множества E. Пусть $q_1, \ldots, q_n$ — те точки множества $N \cap E$, которые не совпадают с p. Положим

$$r = \min_{1 \leqslant m \leqslant n} d(p, q_m)$$

(так мы обозначаем наименьшее из чисел $d(p, q_1), \ldots, d(p, q_n)$. Ясно, что минимум конечного множества положительных чисел — положительное число, так что $r > 0$.

Окрестность $N_r(p)$ не содержит ни одной точки q множества E, такой, что $q \neq p$, поэтому p не является предельной точкой множества E. Это противоречие и доказывает теорему.

Следствие. *Конечное множество точек не имеет предельных точек.*

2.23. Примеры. Рассмотрим следующие подмножества пространства R^2:

(*a*) множество всех комплексных z, таких, что $|z|<1$;
(*b*) множество всех комплексных z, таких, что $|z|\leqslant 1$;
(*c*) некоторое конечное множество;
(*d*) множество всех целых чисел;
(*e*) множество, состоящее из чисел $1/n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Отметим, что последнее множество E имеет предельную точку (а именно $z=0$), но никакая точка множества E не является его предельной точкой. Мы хотим подчеркнуть разницу между свойствами множества иметь предельную точку и содержать предельную точку.

(*f*) Множество всех комплексных чисел (т. е. R^2);
(*g*) интервал (a, b).

Отметим, что множества (*d*), (*e*), (*g*) можно рассматривать и как подмножества пространства R^1.

Некоторые свойства этих множеств перечислены в следующей таблице:

	Замкнуто	Открыто	Совершенно	Ограничено
(*a*)	Нет	Да	Нет	Да
(*b*)	Да	Нет	Да	Да
(*c*)	Да	Нет	Нет	Да
(*d*)	Да	Нет	Нет	Нет
(*e*)	Нет	Нет	Нет	Да
(*f*)	Да	Да	Да	Нет
(*g*)	Нет		Нет	Да

В строке (*g*) мы не заполнили второй клетки. Причина этого в том, что интервал (a, b) не есть открытое множество, если рассматривать его как подмножество пространства R^2, но он является открытым подмножеством пространства R^1.

2.24. Теорема. *Пусть $\{E_\alpha\}$ — (конечное или бесконечное) семейство множеств E_α. Тогда*

$$(\bigcup_\alpha E_\alpha)^c = \bigcap_\alpha E_\alpha^c. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть A и B — множества, стоящие соответственно слева и справа в равенстве (20). Если $x\in A$, то

$x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$, значит, $x \notin E_\alpha$ при всех α, поэтому $x \in E_\alpha^c$ при всех α, так что $x \in \bigcap E_\alpha^c$. Таким образом, $A \subset B$.

Обратно, если $x \in B$, то $x \in E_\alpha^c$ при всех α, значит, $x \notin E_\alpha$ при всех α, поэтому $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$, так что $x \in (\bigcup_\alpha E_\alpha)^c$. Таким образом, $B \subset A$.

Следовательно, $A = B$.

2.25. Теорема. *Множество E открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто.*

Доказательство. Сначала предположим, что E^c замкнуто. Выберем $x \in E$. Тогда $x \notin E^c$ и x не является предельной точкой множества E^c. Значит, существует окрестность N точки x, такая, что множество $E^c \cap N$ пусто, т. е. $N \subset E$. Таким образом, x — внутренняя точка множества E, и E открыто.

Теперь предположим, что E открыто. Пусть x — предельная точка множества E^c. Тогда каждая окрестность точки x содержит некоторую точку множества E^c, так что x не является внутренней точкой множества E. Поскольку E открыто, это значит, что $x \in E^c$. Следовательно, E^c замкнуто.

Следствие. *Множество F замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.*

2.26. Теорема. (*a*) *Для любого семейства $\{G_\alpha\}$ открытых множеств множество $\bigcup_\alpha G_\alpha$ открыто.*

(*b*) *Для любого семейства $\{F_\alpha\}$ замкнутых множеств множество $\bigcap_\alpha F_\alpha$ замкнуто.*

(*c*) *Для любого конечного семейства $G_1, \ldots, G_n$ открытых множеств множество $\bigcap_{i=1}^n G_i$ открыто.*

(*d*) *Для любого конечного семейства $F_1, \ldots, F_n$ замкнутых множеств множество $\bigcup_{i=1}^n F_i$ замкнуто.*

Доказательство. Положим $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$. Если $x \in G$, то $x \in G_\alpha$ при некотором α. Так как x — внутренняя точка множества G_α, то x — внутренняя точка множества G, и G открыто. Утверждение (*a*) доказано.

По теореме 2.24 имеем

$$(\bigcap_\alpha F_\alpha)^c = \bigcup_\alpha (F_\alpha^c), \tag{21}$$

а по теореме 2.25 множества F_α^c открыты. Значит, из (a) следует, что множество (21) открыто, так что множество $\bigcap_\alpha F_\alpha$ замкнуто.

Теперь положим $H = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$. Для любого $x \in H$ существует окрестность N_i точки x радиуса r_i, такая, что $N_i \subset G_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Положим

$$r = \min(r_1, \ldots, r_n),$$

и пусть N — окрестность точки x радиуса r. Тогда $N \subset G_i$ при $i = 1, \ldots, n$, так что $N \subset H$, и множество H открыто.

Переходя к дополнениям, мы выведем (d) из (c):

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} (F_i^c).$$

2.27. Пример. В утверждениях (c) и (d) предыдущей теоремы конечность семейств существенна. Действительно, пусть G_n — интервал $\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Тогда G_n — открытое подмножество прямой R^1. Положим $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Тогда G состоит из единственной точки (а именно, $x = 0$) и поэтому не является открытым подмножеством из R^1.

Таким образом, пересечение бесконечного семейства открытых множеств не обязано быть открытым. Подобным образом, объединение бесконечного семейства замкнутых множеств не обязано быть замкнутым.

2.28. Теорема. *Пусть E — замкнутое множество вещественных чисел, ограниченное сверху. Пусть $y = \sup E$. Тогда $y \in E$.*

Сравните это утверждение с примерами 1.35.

Доказательство. Допустим, что $y \notin E$. Для каждого $h > 0$ существует точка $x \in E$, такая, что $y - h \leqslant x \leqslant y$, так как иначе $y - h$ было бы верхней границей множества E. Таким образом, каждая окрестность точки y содержит некоторую точку x множества E, причем $x \neq y$, так как $y \notin E$. Следовательно, y — предельная точка множества E, не принадлежащая E, так что множество E не замкнуто. Но это противоречит условию теоремы.

2.29. Замечание. Допустим, что $E \subset Y \subset X$, где X — метрическое пространство. То, что E — открытое подмножество пространства X, означает, что с каждой точкой $p \in E$ связано положительное число r, для которого из условий $d(p, q) < r$, $q \in X$ следует включение $q \in E$. Но мы уже заметили (п. 2.18), что Y — тоже метрическое пространство, так что наше определение с таким

же успехом можно отнести к Y. Для полной точности мы будем говорить, что множество E *открыто относительно* Y, если каждой точке $p \in E$ отвечает число $r > 0$, такое, что $q \in E$, если $d(p, q) < r$ и $q \in Y$. Пример 2.23 (g) показывает, что множество может быть открытым относительно Y, не будучи открытым подмножеством пространства X. Однако между этими понятиями имеется простое соотношение, которое мы сейчас установим.

2.30. Теорема. *Пусть $Y \subset X$. Подмножество E множества Y открыто относительно Y тогда и только тогда, когда $E = Y \cap G$ для некоторого открытого подмножества G пространства X.*

Доказательство. Допустим, что E открыто относительно Y. Для каждого $p \in E$ найдется положительное число r_p, такое, что из условий $d(p, q) < r_p$, $q \in Y$ следует, что $q \in E$. Пусть V_p — множество всех $q \in X$, таких, что $d(p, q) < r_p$; положим

$$G = \bigcup_{p \in E} V_p.$$

Тогда по теоремам 2.21 и 2.26 G — открытое подмножество пространства X.

Поскольку $p \in V_p$ при всех $p \in E$, ясно, что $E \subset G \cap Y$. Согласно нашему выбору окрестности V_p, имеем $V_p \cap Y \subset E$ при каждом $p \in E$, так что $G \cap Y \subset E$. Таким образом, $E = G \cap Y$, и половина теоремы доказана.

Обратно, если множество G открыто в X и $E = G \cap Y$, то каждая точка $p \in E$ имеет окрестность $V_p \subset G$. Тогда $V_p \cap Y \subset E$, так что множество E открыто относительно Y.

Компактные множества

2.31. Определение. *Открытым покрытием* множества E в метрическом пространстве X мы будем называть семейство $\{G_\alpha\}$ открытых подмножеств пространства X, такое, что $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$.

2.32. Определение. Подмножество K метрического пространства X называется *компактным*, если каждое открытое покрытие множества K содержит *конечное* подпокрытие.

Говоря точнее, требование состоит в том, что если $\{G_\alpha\}$ — открытое покрытие множества K, то имеется конечное число индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, таких, что

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \ldots \cup G_{\alpha_n}.$$

Понятие компактности имеет большое значение в анализе, особенно в связи с непрерывностью (гл. 4).

Ясно, что каждое конечное множество компактно. Существование широкого класса бесконечных компактных множеств в R^k будет следовать из теоремы 2.41.

Мы заметили ранее (в п. 2.29), что если $E \subset Y \subset X$, то множество E может быть открытым относительно Y, не будучи открытым относительно X. Свойство множества E быть открытым зависит, таким образом, от пространства, в которое оно погружено. То же верно и в отношении свойства множества быть замкнутым.

Однако, как мы увидим, компактность — более удобное понятие. Чтобы сформулировать следующую теорему, мы будем говорить временно, что множество K компактно относительно X, если выполнены требования определения 2.32.

2.33. Теорема. *Допустим, что $K \subset Y \subset X$. Множество K компактно относительно X в том и только в том случае, когда оно компактно относительно Y.*

В силу этой теоремы мы сможем во многих ситуациях рассматривать компактные множества как метрические пространства сами по себе, не обращая никакого внимания на объемлющее пространство. В частности, хотя почти бессмысленно говорить об *открытых* пространствах или о *замкнутых* пространствах (каждое метрическое пространство X служит открытым подмножеством самого себя и замкнутым подмножеством самого себя), имеет смысл говорить о *компактных* метрических пространствах.

Доказательство. Предположим, что множество K компактно относительно X; пусть $\{V_\alpha\}$ — семейство множеств, открытых относительно Y, такое, что $K \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$. По теореме 2.30 при каждом α существует множество G_α, открытое относительно X, такое, что $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$; поскольку K компактно относительно X, мы имеем

$$K \subset G_{\alpha_1} \cup \ldots \cup G_{\alpha_n} \tag{22}$$

при некотором выборе конечного числа индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Так как $K \subset Y$, то из (22) следует, что

$$K \subset V_{\alpha_1} \cup \ldots \cup V_{\alpha_n}. \tag{23}$$

Тем самым доказано, что множество K компактно относительно Y.

Обратно, допустим, что K компактно относительно Y. Пусть $\{G_\alpha\}$ — семейство открытых подмножеств пространства X, покрывающее K. Положим $V_\alpha = Y \cap G_\alpha$. Тогда включение (23) будет выполнено при некотором выборе $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; так как $V_\alpha \subset G_\alpha$, то (22) следует из (23).

Доказательство закончено.

2.34. Теорема. *Компактные подмножества метрических пространств замкнуты.*

Доказательство. Пусть K — компактное подмножество метрического пространства X. Мы докажем, что дополнение множества K есть открытое подмножество пространства X.

Предположим, что $p \in X$, $p \notin K$. Если $q \in K$, то пусть V_q и W_q — окрестности соответственно точек p и q радиуса, меньшего $\frac{1}{2} d(p, q)$ [см. определение 2.20 (a)].

Ввиду того что K — компактно, найдется конечный набор точек $q_1, \ldots, q_n$, принадлежащих множеству K, таких, что

$$K \subset W_{q_1} \cup \ldots \cup W_{q_n} = W.$$

Если $V = V_{q_1} \cap \ldots \cap V_{q_n}$, то V — окрестность точки p, не пересекающаяся с W. Значит, $V \subset K^c$, так что p — внутренняя точка множества K^c. Теорема доказана.

2.35. Теорема. *Замкнутые подмножества компактных множеств компактны.*

Доказательство. Допустим, что $F \subset K \subset X$, множество F замкнуто (относительно X), а K — компактно. Пусть $\{V_\alpha\}$ — открытое покрытие множества F. Если присоединить множество F^c к $\{V_\alpha\}$, то мы получим открытое покрытие Ω множества K. Поскольку K компактно, существует конечное подсемейство Φ семейства Ω, покрывающее множество K, а следовательно, и F. Если множество F^c входит в Φ, то мы можем удалить его из Φ и получить открытое покрытие множества F. Таким образом, мы показали, что конечное подпокрытие покрытия $\{V_\alpha\}$ покрывает F.

Следствие. *Если F замкнуто, а K компактно, то $F \cap K$ компактно.*

Доказательство. Теоремы 2.26 (b) и 2.34 показывают, что множество $F \cap K$ замкнуто, а так как $F \cap K \subset K$, то по теореме 2.35 множество $F \cap K$ компактно.

2.36. *Если $\{K_\alpha\}$ — семейство компактных подмножеств метрического пространства X, такое, что пересечение любого конечного подсемейства семейства $\{K_\alpha\}$ непусто, то и $\bigcap\limits_\alpha K_\alpha$ непусто.*

Доказательство. Зафиксируем множество K_1 из семейства $\{K_\alpha\}$ и положим $G_\alpha = K_\alpha^c$. Предположим, что в K_1 нет такой точки, которая принадлежала бы всем множествам K_α. Тогда множества G_α образуют открытое покрытие множества K_1; так как K_1 компактно, найдется конечный набор индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

такой, что $K_1 \subset G_{\alpha_1} \cup \ldots \cup G_{\alpha_n}$. Но это означает, что множество

$$K_1 \cap K_{\alpha_1} \cap \ldots \cap K_{\alpha_n}$$

пусто. Мы получили противоречие с условиями теоремы.

Следствие. *Если $\{K_n\}$ — последовательность непустых компактных множеств, такая, что $K_n \supset K_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$, то и множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ непусто.*

2.37. Теорема. *Если E — бесконечное подмножество компактного множества K, то E имеет предельную точку, принадлежащую K.*

Доказательство. Если бы никакая точка множества K не была предельной точкой множества E, то каждая точка $q \in K$ имела бы окрестность V_q, содержащую не более одной точки множества E (а именно точку q, если $q \in E$). Ясно, что никакое конечное подсемейство семейства $\{V_q\}$ не может покрыть множество E; то же верно и для K, так как $E \subset K$. Но это противоречит компактности множества K.

2.38. Теорема. *Если $\{I_n\}$ — последовательность сегментов в R^1, такая, что $I_n \supset I_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$* непусто.

Доказательство. Если $I_n = [a_n, b_n]$, то пусть E есть множество всех a_n. Тогда множество E непусто и ограничено сверху (числом b_1). Пусть $x = \sup E$. Если m и n — положительные целые числа, то

$$a_n \leqslant a_{m+n} \leqslant b_{m+n} \leqslant b_m,$$

так что $x \leqslant b_m$ при каждом m. Поскольку очевидно, что $a_m \leqslant x$, то мы видим, что $x \in I_m$ при $m = 1, 2, 3, \ldots$.

2.39. Теорема. *Пусть k — положительное целое число. Если $\{I_n\}$ — последовательность k-мерных клеток, такая, что $I_n \supset I_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ непусто.*

Доказательство. Пусть I_n состоит из всех точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, таких, что

$$a_{n,j} \leqslant x_j \leqslant b_{n,j} \qquad (1 \leqslant j \leqslant k;\ n = 1, 2, 3, \ldots),$$

и пусть $I_{n,j} = [a_{n,j}, b_{n,j}]$. При каждом j последовательность $\{I_{n,j}\}$ удовлетворяет предположениям теоремы 2.38. Значит, существуют

вещественные числа x_j^* $(1 \leqslant j \leqslant k)$, такие, что

$$a_{n,j} \leqslant x_j^* \leqslant b_{n,j} \qquad (1 \leqslant j \leqslant k;\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Полагая $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_k^*)$, мы видим, что $\mathbf{x}^* \in I_n$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$. Теорема доказана.

2.40. Теорема. *Любая k-мерная клетка компактна.*

Доказательство. Пусть I есть k-мерная клетка, состоящая из всех точек $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, таких, что $a_j \leqslant x_j \leqslant b_j$ $(1 \leqslant j \leqslant k)$. Положим

$$\delta = \left\{\sum_1^k (b_j - a_j)^2\right\}^{1/2}.$$

Тогда $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leqslant \delta$, если $\mathbf{x} \in I$, $\mathbf{y} \in I$.

Допустим, что вопреки утверждению теоремы существует открытое покрытие $\{G_\alpha\}$ множества I, не содержащее конечного подпокрытия множества I. Положим $c_j = (a_j + b_j)/2$. Сегменты $[a_j, c_j]$ и $[c_j, b_j]$ определяют тогда 2^k k-мерных клеток Q_i, объединение которых есть I. Хотя бы одно из этих множеств Q_i (обозначим его I_1) не может быть покрыто никаким конечным подсемейством семейства $\{G_\alpha\}$ (в противном случае так была бы покрыта вся клетка I). Теперь мы разобьем I_1 и продолжим этот процесс. Мы получим последовательность $\{I_n\}$, обладающую следующими свойствами:

(a) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$;

(b) I_n не покрывается никаким конечным подсемейством семейства $\{G_\alpha\}$;

(c) если $\mathbf{x} \in I_n$ и $\mathbf{y} \in I_n$, то $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leqslant 2^{-n}\delta$.

Из (a) и теоремы 2.39 следует, что существует точка $\mathbf{x}^*$, принадлежащая всем множествам I_n. При некотором α имеем $\mathbf{x}^* \in G_\alpha$. Поскольку G_α открыто, существует $r > 0$, такое, что из неравенства $|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*| < r$ следует включение $\mathbf{y} \in G_\alpha$. Если n столь велико, что $2^{-n}\delta < r$ (такое n существует, ибо иначе $2^n \leqslant \delta/r$ для всех положительных целых n, что невозможно), то из (c) следует, что $I_n \subset G_\alpha$, а это противоречит утверждению (b).

Доказательство закончено.

Утверждение об эквивалентности свойств (a) и (b) в следующей теореме известно под названием теоремы Гейне — Бореля.

2.41. Теорема. *Если множество E из R^k обладает одним из трех следующих свойств, то оно обладает и двумя другими:*

(a) *E ограничено и замкнуто;*

(b) *E компактно;*

(*c*) *каждое бесконечное подмножество множества E имеет предельную точку, принадлежащую E.*

Доказательство. Если (*a*) выполнено, то $E \subset I$, где I — некоторая k-мерная клетка, и (*b*) следует из теорем 2.40 и 2.35. Теорема 2.37 показывает, что (*b*) влечет за собой (*c*). Остается доказать, что из (*c*) следует (*a*).

Если множество E не ограничено, то оно содержит точки $\mathbf{x}_n$, такие, что

$$|\mathbf{x}_n| > n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Множество S, состоящее из этих точек $\mathbf{x}_n$, бесконечно и, очевидно, не имеет предельных точек в R^k и тем более в E.

Таким образом, из (*c*) следует, что множество E ограничено.

Если E не замкнуто, то имеется точка $x_0 \in R^k$, являющаяся предельной точкой множества E, но не принадлежащая E. При $n = 1, 2, 3, \ldots$ имеются точки $\mathbf{x}_n \in E$, такие, что $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| < 1/n$. Пусть S — множество этих точек $\mathbf{x}_n$. Тогда S — бесконечное множество (в противном случае $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|$ имело бы постоянное положительное значение для бесконечного множества номеров n), $\mathbf{x}_0$ — предельная точка множества S и в R^k нет других предельных точек множества S. Действительно, если $\mathbf{y} \in R^k$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}_0$, то

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{y}| \geqslant |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| - |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0| \geqslant |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}| - \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2}|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}|$$

для всех n, за исключением некоторого конечного множества; это показывает, что $\mathbf{y}$ не является предельной точкой множества S (теорема 2.22).

Таким образом, S не имеет предельных точек в E; значит, множество E замкнуто, если выполнено (*c*).

Следует отметить в связи с этой теоремой, что (*b*) и (*c*) эквивалентны в любом метрическом пространстве (упражнение 13), но что из (*a*) в общем случае не следуют (*b*) и (*c*). Например, это так в пространстве $\mathscr{L}^2$, которое обсуждается в гл. 10. Один пример дается также в упражнении 9.

2.42. Теорема (Вейерштрасс). *Всякое ограниченное бесконечное подмножество пространства R^k имеет предельную точку в R^k.*

Доказательство. Будучи ограниченным, множество, о котором идет речь, содержится в некоторой k-мерной клетке $I \subset R^k$. По теореме 2.40 множество I компактно, поэтому, согласно теореме 2.37, множество E имеет в I предельную точку.

Совершенные множества

2.43. Теорема. *Пусть P — непустое совершенное множество в R^k. Тогда P несчетно.*

Доказательство. Поскольку множество P имеет предельные точки, оно должно быть бесконечным. Допустим, что P счетно, и обозначим точки множества P через $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \ldots$.

Мы построим последовательность окрестностей $\{V_n\}$ следующим образом.

Пусть V_1 — какая-нибудь окрестность точки $\mathbf{x}_1$. Если V_1 состоит из всех $\mathbf{y} \in R^k$, таких, что $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1| < r$, то соответствующая *замкнутая окрестность* $\overline{V}_1$ есть по определению множество всех $\mathbf{y} \in R^k$, таких, что $|\mathbf{y} - \mathbf{x}_1| \leqslant r$. (Как и в теореме 2.21, легко доказать, что дополнение множества $\overline{V}_1$ открыто. Значит, замкнутые окрестности замкнуты.)

Допустим, что окрестность V_n построена так, что множество $V_n \cap P$ непусто. Поскольку каждая точка множества P есть предельная точка этого множества, существует окрестность V_{n+1}, такая, что (i) $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$, (ii) $\mathbf{x}_n \notin V_{n+1}$, (iii) множество $V_{n+1} \cap P$ непусто. В силу (iii), V_{n+1} удовлетворяет предположению индукции, и построение может быть продолжено.

Положим $K_n = \overline{V}_n \cap P$. Будучи ограниченным и замкнутым, множество $\overline{V}_n$ компактно. Ни одна точка множества P не лежит в $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, так как $\mathbf{x}_n \notin K_{n+1}$. Отсюда следует, что множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ пусто, так как $K_n \subset P$. Но ведь каждое множество K_n непусто в силу (iii) и $K_n \supset K_{n+1}$ в силу (i). Это противоречит следствию из теоремы 2.36.

Следствие. *Каждый сегмент $[a, b]$ $(a < b)$ несчетен. Множество всех вещественных чисел несчетно.*

2.44. Канторово множество. Пример, к построению которого мы переходим, показывает, что в R^1 существуют совершенные множества, не содержащие никакого интервала.

Пусть E_0 есть сегмент $[0, 1]$. Удалим из него интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, и пусть E_1 — объединение сегментов

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Удалим средние трети этих сегментов, и пусть E_2 — объединение сегментов

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \quad \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right], \quad \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \quad \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Продолжая таким образом, мы получим последовательность компактных множеств E_n, таких, что

(*a*) $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$;

(*b*) E_n есть объединение 2^n сегментов, длина каждого из которых равна 3^{-n}.

Множество $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ называется множеством Кантора. Множество P, очевидно, компактно, и теорема 2.36 показывает, что P непусто.

Никакой интервал вида

$$\left(\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m}\right), \tag{24}$$

где k и m — положительные целые числа, не имеет общих точек с P. Значит, P не содержит никакого интервала, ибо каждый интервал (α, β) содержит интервал вида (24), если

$$3^{-m} < \frac{\beta-\alpha}{6}.$$

Чтобы показать, что P совершенно, достаточно показать, что P не содержит изолированных точек. Пусть $x \in P$ и пусть S — какой-нибудь интервал, содержащий x. Пусть I_n — сегмент множества E_n, содержащий x. Выберем достаточно большое n, такое, что $I_n \subset S$. Пусть x_n — тот конец сегмента I_n, для которого $x_n \neq x$.

Из построения множества P следует, что $x_n \in P$. Значит, x есть предельная точка множества P, и множество P совершенно.

Одно из самых интересных свойств множества Кантора состоит в том, что оно доставляет нам пример несчетного множества меры нуль (понятие меры будет обсуждаться в гл. 10).

Связные множества

2.45. Определение. Множество E в метрическом пространстве X называется *связным*, если *не* существует двух открытых множеств A и B пространства X, таких, что пересечение $A \cap B$ пусто, пересечения $A \cap E$ и $B \cap E$ не пусты и $E \subset A \cup B$.

Это определение похоже на определение компактности, поскольку на самом деле оно не зависит от объемлющего пространства X, т. е. при замене слова «связное» словами «связное относительно X» в предыдущем абзаце выполняется следующее утверждение: *E связно относительно X в том и только в том случае, когда E связно относительно E.*

Таким образом, имеет смысл говорить о связных пространствах (ср. с замечаниями, следующими за формулировкой тео-

ремы 2.33): пространство связно, если оно не является объединением двух непустых непересекающихся открытых множеств.

Первая часть утверждения, набранного выше курсивом, почти тривиальна: если E не является связным относительно X, то существуют множества A и B, обладающие свойствами, указанными в определении, и рассмотрение множеств $A \cap E$ и $B \cap E$ показывает, что E не связно относительно E (ср. с теоремой 2.30). Обратное вытекает из следующего результата.

2.46. Теорема. *Пусть X — метрическое пространство, $E \subset X$ и $E = G \cup H$, где G и H — непересекающиеся непустые множества, открытые относительно E. Тогда существуют непересекающиеся открытые множества A и B в X, такие, что $G = A \cap E$, $H = B \cap E$.*

Доказательство. Каждой точке $p \in G$ соответствует число $\delta_p > 0$, такое, что из соотношений $q \in E$, $d(p, q) < \delta_p$ следует включение $q \in G$, так как множество G открыто относительно E. Аналогичным образом, каждой точке $q \in H$ соответствует число $\delta_q > 0$, такое, что из соотношений $p \in E$, $d(p, q) < \delta_q$ следует включение $p \in H$. Значит, если $p \in G$, $q \in H$, то оба эти неравенства не выполняются, так что

$$d(p, q) \geqslant \frac{1}{2}(\delta_p + \delta_q). \tag{25}$$

При $p \in G$, $q \in H$ пусть V_p обозначает множество всех $x \in X$, таких, что $2d(p, x) < \delta_p$, и пусть W_q — множество всех $x \in X$, таких, что $2d(q, x) < \delta_q$. Если некоторое множество V_p имеет общую точку x с некоторым W_q, то

$$d(p, q) \leqslant d(p, x) + d(q, x) < \frac{1}{2}(\delta_p + \delta_q),$$

что противоречит неравенству (25).

Таким образом, каждое V_p не пересекается ни с одним W_q, и если мы положим

$$A = \bigcup_{p \in G} V_p, \qquad B = \bigcup_{q \in H} W_q,$$

то мы получим множества с требуемыми свойствами.

2.47. Теорема. *Подмножество E вещественной прямой R^1 связно тогда и только тогда, когда E обладает следующим свойством: если $x \in E$, $y \in E$ и $x < z < y$, то и $z \in E$.*

Доказательство. Допустим, что это условие не выполняется для некоторых чисел x, y, z, т. е. $x \in E$, $y \in E$, $x < z < y$, но $z \notin E$. Если A есть множество всех $\alpha < z$, а B — множество всех $\beta > z$, то определение 2.45 показывает, что E не связно.

Чтобы доказать обратное, допустим, что E не связно. Тогда существуют точки $x \in E$, $y \in E$, $x < y$, и открытые непересекающиеся множества A и B в R^1, такие, что $x \in A$, $y \in B$ и $E \subset A \cup B$. Пусть

$$S = A \cap [x, y]$$

и $z = \sup S$.

Ввиду того что $y \in B$ и B открыто, имеем $z < y$. Таким образом, если $z \in A$, то из того, что A открыто, следует, что z не является верхней границей множества S. Значит, $z \notin A$.

Ввиду того что $x \in A$ и A открыто, имеем $x < z$. Таким образом, если $z \in B$, то из того, что B открыто, следует, что z не является верхней гранью множества S. Значит, $z \notin B$.

Но так как $E \subset A \cup B$, то $z \notin E$, и доказательство закончено.

Следствие. *Множество E в R^1 связно тогда и только тогда, когда E — одно из следующих множеств (где a и b — вещественные числа, $a \leqslant b$):*

$$(-\infty, b), (-\infty, b], (a, \infty), [a, \infty), (-\infty, \infty), (a, b), [a, b), (a, b], [a, b].$$

К какому из этих типов принадлежит множество E, зависит от того, конечны или нет $\inf E$ и $\sup E$ и принадлежат ли они множеству E.

Столь же простой характеристики связных множеств на плоскости, например, не существует.

Упражнения

1. Построить ограниченное множество вещественных чисел, имеющее ровно три предельные точки.

2. Построить компактное множество вещественных чисел, множество предельных точек которого счетно.

3. Пусть E' — множество всех предельных точек некоторого множества E. Доказать, что E' замкнуто.

4. Пусть $\overline{E} = E \cup E'$, где E' определено выше. Чтобы получить $\overline{E}$, мы добавляем к E все предельные точки E; $\overline{E}$ называется *замыканием* множества E. Доказать, что $\overline{E}$ всегда замкнуто и что $\overline{E} \subset F$, если $E \subset F$ и F замкнуто.

5. Корни любого уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

где $a_0, \ldots, a_n$ — целые числа, называются алгебраическими числами. Доказать, что множество всех алгебраических чисел счетно.

Указание. При каждом положительном целом N существует только конечное число таких уравнений, что

$$n+|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_n|=N.$$

6. Дать пример открытого покрытия интервала (0,1), которое не содержит конечного подпокрытия.

7. Показать, что теорема 2.36 и ее следствие становятся неверными (в R^1, например), если слово «компактное» заменить словом «замкнутое» или «ограниченное».

8. Бывают ли бесконечные метрические пространства, не имеющие бесконечных компактных подмножеств?

9. Пусть X — пространство всех рациональных чисел, $d(p, q)=|p-q|$ и E — множество всех рациональных p, таких, что $2<p^2<3$. Показать, что E замкнуто и ограничено, но не компактно.

10. Метрическое пространство называется *сепарабельным*, если оно содержит счетное всюду плотное подмножество. Показать, что R^k сепарабельно.

Указание. Рассмотреть множество точек, все координаты которых рациональны.

11. Семейство $\{V_\alpha\}$ открытых подмножеств пространства X называется *базой* пространства X, если верно следующее: для каждого $x\in X$ и каждого открытого множества G, такого, что $x\in G$, имеем $x\in V_\alpha\subset G$ при некотором α. Иными словами, каждое открытое множество в X есть объединение некоторого подсемейства семейства $\{V_\alpha\}$.

Доказать, что каждое сепарабельное метрическое пространство имеет *счетную* базу.

Указание. Возьмите все окрестности с рациональным радиусом и с центрами в некотором счетном всюду плотном подмножестве пространства X.

12. Пусть X — метрическое пространство, в котором каждое бесконечное подмножество имеет предельную точку. Доказать, что X сепарабельно.

Указание. Зафиксируйте $\delta>0$ и выберите $x_1\in X$. Выбрав $x_1, \ldots, x_j\in X$, найдите, если это возможно, $x_{j+1}\in X$, такое, что $d(x_i, x_{j+1})\geqslant\delta$ для $i=1, \ldots, j$. Покажите, что этот процесс должен закончиться после конечного числа шагов и что поэтому X можно покрыть конечным числом окрестностей радиуса δ. Возьмите $\delta=1/n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ и рассмотрите центры соответствующих окрестностей.

13. Пусть X — метрическое пространство, в котором каждое бесконечное подмножество имеет предельную точку. Доказать, что X компактно.

Указание. Согласно упражнениям 11 и 12, X имеет счетную базу. Следовательно, каждое открытое покрытие пространства X содержит *счетное* подпокрытие $\{G_n\}$, $n=1, 2, 3, \ldots$. Если никакое конечное подсемейство семейства $\{G_n\}$ не покрывает X, то дополнение F_n множества $G_1 \cup \ldots \cup G_n$ непусто при каждом n, но пересечение $\bigcap F_n$ — пусто. Пусть E — множество, содержащее по точке из каждого F_n. Рассмотрите предельную точку множества E и получите противоречие.

14. Доказать, что каждое замкнутое множество в сепарабельном метрическом пространстве есть объединение совершенного множества (может быть, пустого) и некоторого не более чем счетного множества. (*Следствие*: каждое счетное замкнутое множество в R^k имеет изолированные точки.)

15. Доказать, что каждое открытое множество в R^1 есть объединение не более чем счетного семейства попарно непересекающихся интервалов.

Указание. Воспользуйтесь упражнением 10.

16. Следуя доказательству теоремы 2.43, получить такой результат:

Если $R^k = \bigcup_1^\infty F_n$, где каждое F_n — замкнутое подмножество пространства R^k, то хотя бы одно F_n имеет непустую внутренность.

Эквивалентное утверждение. Если G_n — плотное открытое подмножество пространства R^k при $n=1, 2, 3, \ldots$, то $\bigcap_{n=1}^\infty G_n$ непусто (на самом деле оно всюду плотно в R^k). (Это частный случай теоремы Бэра; см. общий случай в упражнении 17, гл. 3.)