ГЛАВА 3

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

Как указывает название, в этой главе мы будем иметь дело главным образом с последовательностями и рядами комплексных чисел. Однако основные факты, связанные со сходимостью, столь же легко объяснить и в более общей ситуации. Первые три раздела будут поэтому посвящены последовательностям в евклидовых пространствах или даже в метрических пространствах.

Сходящиеся последовательности

3.1. Определение. Последовательность $\{p_n\}$ в метрическом пространстве X называется *сходящейся*, если существует точка $p \in X$, обладающая следующим свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ существует целое число N, такое, что при $n \geqslant N$ имеем $d(p_n, p) < \varepsilon$ (здесь d обозначает расстояние в X).

В этом случае мы будем говорить также, что последовательность $\{p_n\}$ сходится к p или что p — предел последовательности $\{p_n\}$ [см. теорему 3.2 (b)], и будем писать $p_n \to p$ или

$$\lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

Если последовательность $\{p_n\}$ не сходится, то говорят, что она *расходится*.

Полезно отметить, что наше определение «сходящейся последовательности» зависит не только от $\{p_n\}$, но и от X; например, последовательность $\{1/n\}$ сходится в R^1 (к 0), но не сходится в множестве всех положительных вещественных чисел [когда $d(x, y) = |x - y|$]. В тех случаях, когда возможна путаница, мы будем более точными и будем говорить отчетливо «сходится в X» вместо «сходится».

Напомним, что множество всех точек p_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) есть *множество значений* последовательности $\{p_n\}$. Множество значений последовательности может быть конечным или бесконечным. Последовательность называется *ограниченной*, если множество ее значений ограничено.

Для примера рассмотрим следующие последовательности комплексных чисел (при этом $X = R^2$).

(*a*) Если $s_n = 1/n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$; множество значений бесконечно, и последовательность ограничена.

(*b*) Если $s_n = n^2$, то последовательность $\{s_n\}$ не ограничена, расходится, а множество ее значений бесконечно.

(*c*) Если $s_n = 1 + [(-1)^n/n]$, то последовательность $\{s_n\}$ сходится к 1, ограничена, а множество ее значений бесконечно.

(*d*) Если $s_n = i^n$, то последовательность $\{s_n\}$ расходится, ограничена, а множество ее значений конечно.

(*e*) Если $s_n = 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то $\{s_n\}$ сходится к 1, ограничена, а множество ее значений конечно.

Сформулируем теперь некоторые важные свойства сходящихся последовательностей в метрических пространствах.

3.2. Теорема. *Пусть $\{p_n\}$ — последовательность в метрическом пространстве X.*

(*a*) *$\{p_n\}$ сходится к $p \in X$ тогда и только тогда, когда каждая окрестность точки p содержит все члены последовательности $\{p_n\}$, за исключением конечного их числа.*

(*b*) *Если $p \in X$, $p' \in X$ и $\{p_n\}$ сходится к p и к p', то $p = p'$.*

(*c*) *Если $\{p_n\}$ сходится, то $\{p_n\}$ ограничена.*

(*d*) *Если $E \subset X$ и если p — предельная точка множества E, то существует последовательность $\{p_n\}$ элементов множества E, такая, что $p = \lim\limits_{n\to\infty} p_n$.*

Доказательство. (*a*) Допустим, что $p_n \to p$, и пусть V — окрестность точки p. Для некоторого $\varepsilon > 0$ из условий $d(p, q) < \varepsilon$, $q \in X$, следует, что $q \in V$. Этому ε соответствует N, такое, что из неравенства $n \geqslant N$ следует, что $d(p_n, p) < \varepsilon$. Таким образом, неравенство $n \geqslant N$ влечет за собой включение $p_n \in V$.

Обратно, допустим, что каждая окрестность точки p содержит все точки p_n, кроме конечного их числа. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть V — множество всех $q \in X$, таких, что $d(p, q) < \varepsilon$. По предположению, существует N (соответствующее этой окрестности V), такое, что $p_n \in V$, если $n \geqslant N$. Таким образом, $d(p_n, p) < \varepsilon$, если $n \geqslant N$; значит, $p_n \to p$.

(*b*) Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Существуют целые числа N, N', такие, что

$$n \geqslant N \text{ влечет за собой } d(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$n \geqslant N' \text{ влечет за собой } d(p_n, p') < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, если $n \geqslant \max(N, N')$, то

$$d(p, p') \leqslant d(p, p_n) + d(p_n, p') < \varepsilon.$$

Поскольку число ε было произвольным, мы заключаем отсюда, что $d(p, p') = 0$.

(*c*) Допустим, что $p_n \to p$. Тогда существует целое N, такое, что при $n > N$ имеем $d(p_n, p) < 1$. Положим

$$r = \max\{1, d(p_1, p), \ldots, d(p_N, p)\}.$$

Тогда $d(p_n, p) \leqslant r$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$.

(*d*) Для каждого положительного целого n существует точка $p_n \in E$, такая, что $d(p_n, p) < 1/n$. Для данного $\varepsilon > 0$ выберем N так, что $N\varepsilon > 1$. Если $n > N$, то $d(p_n, p) < \varepsilon$. Значит, $p_n \to p$.

Доказательство закончено.

Для последовательностей в R^k мы можем изучать соотношения между сходимостью, с одной стороны, и алгебраическими операциями, с другой. Сначала мы рассмотрим последовательности комплексных чисел.

3.3. Теорема. *Допустим, что* $\{s_n\}$, $\{t_n\}$ — *комплексные последовательности и* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. *Тогда*

(*a*) $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n + t_n) = s + t$;

(*b*) $\lim\limits_{n\to\infty} cs_n = cs$, $\lim\limits_{n\to\infty} (c + s_n) = c + s$ *для любого числа* c;

(*c*) $\lim\limits_{n\to\infty} s_n t_n = st$;

(*d*) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{s_n} = \dfrac{1}{s}$, *если только* $s_n \neq 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *и* $s \neq 0$.

Доказательство. (*a*) Для данного $\varepsilon > 0$ существуют целые N_1, N_2, такие, что

$$\text{при } n \geqslant N_1 \text{ имеем } |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\text{при } n \geqslant N_2 \text{ имеем } |t_n - t| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $N = \max(N_1, N_2)$, то при $n \geqslant N$ получим

$$|(s_n + t_n) - (s + t)| \leqslant |s_n - s| + |t_n - t| < \varepsilon.$$

Тем самым (*a*) доказано. Доказательство утверждения (*b*) тривиально.

(*c*) Воспользуемся тождеством

$$s_n t_n - st = (s_n - s)(t_n - t) + s(t_n - t) + t(s_n - s). \tag{1}$$

Для данного $\varepsilon > 0$ существуют целые N_1, N_2, такие, что

$$\text{при } n \geqslant N_1 \text{ имеем } |s_n - s| < \sqrt{\varepsilon},$$

$$\text{при } n \geqslant N_2 \text{ имеем } |t_n - t| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Если мы возьмем $N = \max(N_1, N_2)$, то при $n \geqslant N$ получим

$$|(s_n - s)(t_n - t)| < \varepsilon,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s)(t_n - t) = 0.$$

Применив теперь (a) и (b) к тождеству (1), мы заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n t_n - st) = 0$.

(d) Выбрав m так, что $|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|$ при $n \geqslant m$, мы видим, что

$$|s_n| > \frac{1}{2}|s| \qquad (n \geqslant m).$$

Для данного $\varepsilon > 0$ существует целое $N > m$, такое, что при $n \geqslant N$ имеем

$$|s_n - s| < \frac{1}{2}|s|^2\varepsilon.$$

Отсюда при $n \geqslant N$ получаем

$$\left|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s}\right| = \left|\frac{s_n - s}{s_n s}\right| < \frac{2}{|s|^2}|s_n - s| < \varepsilon.$$

3.4. Теорема. (a) *Допустим, что* $\mathbf{x}_n \in R^k$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *и*

$$\mathbf{x}_n = (\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{k,n}).$$

Последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ *сходится к* $\mathbf{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant k). \tag{2}$$

(b) *Допустим, что* $\{\mathbf{x}_n\}$, $\{\mathbf{y}_n\}$ — *последовательности в* R^k, $\{\beta_n\}$ — *последовательность вещественных чисел и* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$, $\beta_n \to \beta$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) = \mathbf{x} + \mathbf{y}, \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n \cdot \mathbf{y}_n = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \qquad \lim_{n\to\infty} \beta_n \mathbf{x}_n = \beta\mathbf{x}.$$

Доказательство. Если $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, то равенство (2) выполняется в силу неравенств

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| \leqslant |\mathbf{x}_n - \mathbf{x}|,$$

вытекающих непосредственно из определения нормы в R^k.

Обратно, если (2) выполнено, то каждому $\varepsilon > 0$ соответствует целое N, такое, что при $n \geqslant N$ имеем

$$|\alpha_{j,n} - \alpha_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \qquad (1 \leqslant j \leqslant k).$$

Значит, при $n \geqslant N$ получаем

$$|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| = \left\{\sum_{j=1}^{k} |\alpha_{j,n} - \alpha_j|^2\right\}^{1/2} < \varepsilon,$$

откуда $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$. Тем самым ($a$) доказано.

Утверждение (b) следует из (a) и теоремы 3.3.

Подпоследовательности

3.5. Определение. Пусть задана последовательность $\{p_n\}$. Рассмотрим последовательность $\{n_k\}$ положительных целых чисел, такую, что $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Тогда последовательность $\{p_{n_i}\}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{p_n\}$. Если последовательность $\{p_{n_i}\}$ сходится, то ее предел называется *частичным пределом* последовательности $\{p_n\}$.

Ясно, что последовательность $\{p_n\}$ сходится к p тогда и только тогда, когда всякая ее подпоследовательность сходится к p. Мы предоставляем читателю провести детальное доказательство.

3.6. Теорема. *Всякая ограниченная последовательность в R^k содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть E — множество значений ограниченной последовательности $\{\mathbf{x}_n\}$ в R^k. Если E конечно, то существуют по крайней мере одна точка $\mathbf{x}$ множества E и последовательность $\{n_i\}$ $(n_1 < n_2 < n_3 < \ldots)$, такие, что

$$\mathbf{x}_{n_1} = \mathbf{x}_{n_2} = \ldots = \mathbf{x}.$$

Полученная таким образом подпоследовательность, очевидно, сходится.

Если множество E бесконечно, то оно имеет предельную точку $\mathbf{x} \in R^k$ (теорема 2.42). Выберем n_1 так, что $|\mathbf{x}_{n_1} - \mathbf{x}| < 1$. Выбрав $n_1, \ldots, n_{i-1}$, мы получим, по теореме 2.22, что существует целое $n_i > n_{i-1}$, такое, что $|\mathbf{x}_{n_i} - \mathbf{x}| < 1/i$. Построенная таким образом подпоследовательность сходится к x.

3.7. Теорема. *Частичные пределы последовательности $\{p_n\}$ в метрическом пространстве X образуют замкнутое множество в X.*

Доказательство. Пусть E — множество значений последовательности $\{p_n\}$, а E^* — множество всех частичных пределов этой последовательности. Допустим, что q — предельная точка множества E^*. Чтобы показать, что $q \in E^*$, достаточно, по теореме 3.2 (d), показать, что q — предельная точка множества E.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Поскольку q — предельная точка множества E^*, имеется точка $p \in E^*$, такая, что

$$0 < d(p, q) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $p \in E^*$, то при некотором p_n имеем

$$d(p, p_n) < d(p, q).$$

Значит, $p_n \neq q$ и

$$0 < d(p_n, q) \leqslant d(p_n, p) + d(p, q) < \varepsilon.$$

Поскольку $p_n \in E$, отсюда следует, что q — предельная точка множества E, и доказательство закончено.

Последовательности Коши

3.8. Определение. Последовательность $\{p_n\}$ в метрическом пространстве X называется *последовательностью Коши* (*фундаментальной последовательностью*, *последовательностью, сходящейся в себе*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует целое N, такое, что $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ при $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$.

При рассмотрении последовательностей Коши, а также в других ситуациях, которые возникнут позднее, окажется полезным следующее геометрическое понятие.

3.9. Определение. Пусть E — подмножество метрического пространства X, и пусть S — множество всех вещественных чисел вида $d(p, q)$, где $p \in E$ и $q \in E$. *Диаметром* множества E называется число $\sup S$. Это число обозначается $\operatorname{diam} E$.

Если $\{p_n\}$ — последовательность в X, а E_N состоит из точек $p_N, p_{N+1}, p_{N+2}, \ldots$, то из двух последних определений ясно, что $\{p_n\}$ — *последовательность Коши тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{N \to \infty} \operatorname{diam} E_N = 0.$$

3.10. Теорема. (a) *Если $\overline{E}$ есть замыкание множества E в метрическом пространстве X, то*

$$\operatorname{diam} \overline{E} = \operatorname{diam} E.$$

(*b*) *Если* $\{K_n\}$ — *последовательность компактных множеств в* X, *такая, что* $K_n \supset K_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, *и если*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} K_n = 0,$$

то $\bigcap_1^\infty K_n$ *состоит ровно из одной точки.*

Доказательство. (*a*) Ясно, что

$$\operatorname{diam} E \leqslant \operatorname{diam} \overline{E},$$

так как $E \subset \overline{E}$.

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и выберем $p \in \overline{E}$, $q \in \overline{E}$. По определению множества $\overline{E}$, в E содержатся точки p', q', такие, что $d(p, p') < \varepsilon$, $d(q, q') < \varepsilon$. Значит,

$$d(p, q) \leqslant d(p, p') + d(p', q') + d(q', q) < \\ < 2\varepsilon + d(p', q') \leqslant 2\varepsilon + \operatorname{diam} E.$$

Следовательно,

$$\operatorname{diam} \overline{E} \leqslant 2\varepsilon + \operatorname{diam} E,$$

и так как ε произвольно, утверждение (*a*) доказано.

(*b*) Положим $K = \bigcap_{n=1}^\infty K_n$. По теореме 2.36, K непусто. Если K содержит более одной точки, то $\operatorname{diam} K > 0$. Но при каждом n мы имеем $K_n \supset K$, так что $\operatorname{diam} K_n \geqslant \operatorname{diam} K$. Это противоречит предположению, что $\operatorname{diam} K_n \to 0$.

3.11. Теорема. (*a*) *Всякая сходящаяся последовательность в метрическом пространстве* X *является последовательностью Коши.*

(*b*) *Всякая последовательность Коши в* R^k *сходится.*

Замечание. Разница между определением сходящейся последовательности и определением последовательности Коши состоит в том, что в первое определение в явном виде входит предел, в то время как во второе определение он не входит. Таким образом, теорема 3.11 (*b*) позволяет нам решить, сходится или нет данная последовательность, даже если мы не знаем предела, к которому она может сходиться.

То (содержащееся в теореме 3.11) утверждение, что последовательность в R^k сходится тогда и только тогда, когда она является последовательностью Коши, обычно называют *критерием сходимости Коши.*

Доказательство. (*a*) Если $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ и $\varepsilon > 0$, то существует целое N, такое, что $d(p_n, p) < \varepsilon/2$ при $n \geqslant N$. Значит, если $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$, то

$$d(p_n, p_m) \leqslant d(p_n, p) + d(p, p_m) < \varepsilon,$$

так что $\{p_n\}$ — последовательность Коши.

(*b*) Допустим, что $\{\mathbf{x}_n\}$ — последовательность Коши в R^k. Пусть E_N — множество, состоящее из точек $\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_{N+1}, \mathbf{x}_{N+2}, \ldots$, и пусть $\overline{E}_N$ — замыкание множества E_N. По определению 3.9 и по теореме 3.10 (*a*) мы имеем

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{diam} \overline{E}_N = 0. \tag{3}$$

В частности, множества $\overline{E}_N$ ограничены. Кроме того, они замкнуты. (Это следует из упражнения 4, гл. 2. Вот короткое доказательство: если $\mathbf{x} \notin \overline{E}_N$, то $\mathbf{x} \notin E_N$, и $\mathbf{x}$ не является предельной точкой множества E_N; поэтому некоторая окрестность V точки $\mathbf{x}$ не пересекается с E_N. Никакая точка окрестности V не принадлежит $\overline{E}_N$, так как множество V открыто; следовательно, дополнение множества $\overline{E}_N$ открыто.) Значит, каждое множество $\overline{E}_N$ компактно (теорема 2.41). Кроме того, $E_N \supset E_{N+1}$, так что $\overline{E}_N \supset \overline{E}_{N+1}$. По теореме 3.10 (*b*) существует единственная точка $\mathbf{x} \in R^k$, принадлежащая каждому множеству $\overline{E}_N$.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. В силу (3) имеется целое N_0, такое, что $\operatorname{diam} \overline{E}_N < \varepsilon$, если $N \geqslant N_0$. Поскольку $\mathbf{x} \in \overline{E}_N$, это значит, что $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| < \varepsilon$ при всех $\mathbf{y} \in \overline{E}_N$, а поэтому и при всех $\mathbf{y} \in E_N$. Иными словами, если $n \geqslant N_0$, то $|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}| < \varepsilon$. Но это означает в точности, что $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, и доказательство закончено.

3.12. Определение. Метрическое пространство X, в котором каждая последовательность Коши сходится, называется *полным*. Поэтому теорему 3.11 (*b*) можно сформулировать так: R^k — *полное метрическое пространство*. Примером неполного метрического пространства служит пространство всех рациональных чисел с расстоянием $d(x, y) = |x - y|$.

Теорема 3.2 (*c*) и пример (*d*) из п. 3.1 показывают, что сходящиеся последовательности ограничены, но ограниченные последовательности в R^k не обязательно сходятся. Однако имеется один важный случай, когда сходимость равносильна ограниченности. Так обстоит дело с монотонными последовательностями в R^1.

3.13. Определение. Последовательность $\{s_n\}$ вещественных чисел называется

(*a*) *монотонно возрастающей*, если $s_n \leqslant s_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$;

(*b*) *монотонно убывающей*, если $s_n \geqslant s_{n+1}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Класс монотонных последовательностей состоит из возрастающих и убывающих последовательностей.

3.14. Теорема. *Монотонная последовательность $\{s_n\}$ сходится в том и только в том случае, когда она ограничена.*

Доказательство. Допустим, что $s_n \leqslant s_{n+1}$ (в другом случае доказательство аналогично). Пусть E — множество значений последовательности $\{s_n\}$. Если последовательность $\{s_n\}$ ограничена, то пусть s — верхняя грань множества E. Тогда

$$s_n \leqslant s \quad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует целое N, такое, что $s-\varepsilon < s_N \leqslant s$, так как иначе $s-\varepsilon$ было бы верхней границей множества E. Поскольку последовательность $\{s_n\}$ возрастает, то при $n \geqslant N$ имеем

$$s-\varepsilon < s_n \leqslant s,$$

откуда следует, что $\{s_n\}$ сходится (к s).

Обратное следует из теоремы 3.2 (*c*).

Верхний и нижний пределы

3.15. Определение. Пусть $\{s_n\}$ — последовательность вещественных чисел, обладающая следующим свойством: для любого вещественного M существует целое N, такое, что при $n \geqslant N$ мы имеем $s_n \geqslant M$. Тогда мы пишем

$$s_n \to +\infty.$$

Аналогичным образом, если для любого вещественного числа M существует целое N, такое, что при $n \geqslant N$ мы имеем $s_n \leqslant M$, то мы пишем

$$s_n \to -\infty.$$

Следует отметить, что мы теперь используем символ $\to$ (введенный в определении 3.1) для некоторых типов расходящихся последовательностей, так же как и для сходящихся последовательностей, но что определения сходимости и предела, данные в п. 3.1, никоим образом не меняются.

3.16. Определение. Пусть $\{s_n\}$ — последовательность вещественных чисел. Пусть E — множество чисел x (в расширенной

системе вещественных чисел), таких, что $s_{n_k} \to x$ для некоторой подпоследовательности $\{s_{n_k}\}$. Это множество E содержит все частичные пределы, определенные в п. 3.5, и, возможно, числа $+\infty$, $-\infty$.

Вспомним теперь определения 1.34 и 1.40 и положим

$$s^* = \sup E,$$
$$s_* = \inf E.$$

Числа s^*, s_* называются *верхним* и *нижним* пределами последовательности $\{s_n\}$; мы используем обозначения

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = s^*, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = s_*.$$

3.17. Теорема. *Пусть $\{s_n\}$ — последовательность вещественных чисел. Пусть E и s^* имеют тот же смысл, что и в определении* 3.16. *Тогда s^* обладает следующими свойствами:*

(*a*) $s^* \in E$;

(*b*) *если $x > s^*$, то существует целое N, такое, что при $n \geqslant N$ имеем $s_n < x$. Более того, s^* — единственное число, обладающее свойствами* (*a*) *и* (*b*).

Конечно, аналогичный результат верен для s_*.

Доказательство. Если $s^* = +\infty$, то множество E не ограничено сверху; значит, последовательность $\{s_n\}$ не ограничена сверху и существует подпоследовательность $\{s_{n_k}\}$, такая, что $s_{n_k} \to +\infty$.

Если s^* — вещественное число, то множество E ограничено сверху и существует по крайней мере один частичный предел, поэтому (*a*) следует из теорем 3.7 и 2.28.

Если $s^* = -\infty$, то E содержит только один элемент, а именно $-\infty$, и не существует ни одного частичного предела. Значит, для любого вещественного M неравенство $s_n > M$ может выполняться лишь для конечного множества значений n, так что $s_n \to -\infty$.

Тем самым (*a*) установлено во всех случаях.

Чтобы доказать (*b*), допустим, что существует число $x > s^*$, такое, что $s_n \geqslant x$ для бесконечного множества значений n. В этом случае существует число $y \in E$, такое, что $y \geqslant x > s^*$, а это противоречит определению s^*.

Таким образом, s^* удовлетворяет условиям (*a*) и (*b*).

Для доказательства единственности допустим, что существуют два числа p и q, удовлетворяющие условиям (*a*) и (*b*), и допустим, что $p < q$. Выберем x таким, что $p < x < q$. При $n \geqslant N$ имеем $s_n < x$, так как p удовлетворяет условию (*b*). Но тогда q не может удовлетворять условию (*a*).

3.18. Примеры. (*a*) Пусть $\{s_n\}$ — последовательность, содержащая все рациональные числа. Тогда каждое вещественное число является частичным пределом и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = +\infty, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = -\infty.$$

(*b*) Пусть $s_n = (-1)^n [1 + (1/n)]$. Тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = 1, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = -1.$$

(*c*) Для последовательности $\{s_n\}$ вещественных чисел $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n = s.$$

Мы закончим этот раздел одной полезной теоремой, доказательство которой совсем тривиально.

3.19. Теорема. *Если $s_n \leqslant t_n$ при $n \geqslant N$, где N фиксировано, то*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n.$$

Некоторые специальные последовательности

Теперь мы вычислим пределы некоторых часто встречающихся последовательностей. Все доказательства будут основаны на следующем замечании: если $0 \leqslant x_n \leqslant s_n$ при $n \geqslant N$, где N — некоторое фиксированное число, и если $s_n \to 0$, то $x_n \to 0$.

3.20. Теорема. (*a*) *Если $p > 0$, то* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ [1]).

(*b*) *Если $p > 0$, то* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

(*c*) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(*d*) *Если $p > 0$ и α — вещественное число, то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0.$$

(*e*) *Если $|x| < 1$, то* $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$.

---

[1]) Смысл символа n^p не был до сих пор определен, то же относится и к n^α в пункте (*d*); указания на способ определения степени с любым вещественным показателем содержатся в упражнении 7 к гл. 1. — *Прим. перев.*

Доказательство. (*a*) Возьмем $n > (1/\varepsilon)^{1/p}$.

(*b*) Если $p > 1$, то положим $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$. Тогда $x_n > 0$ и, согласно теореме о биноме,

$$1 + nx_n \leqslant (1 + x_n)^n = p,$$

так что

$$0 < x_n \leqslant \frac{p-1}{n}.$$

Значит, $x_n \to 0$. Если $p = 1$, то (*b*) тривиально; если $0 < p < 1$, то результат получается переходом к обратным числам.

(*c*) Положим $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Тогда $x_n \geqslant 0$ и, согласно теореме о биноме,

$$n = (1 + x_n)^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2} x_n^2.$$

Значит,

$$0 \leqslant x_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}} \qquad (n \geqslant 2).$$

(*d*) Пусть k — такое целое число, что $k > \alpha$, $k > 0$. Для $n > 2k$ имеем

$$(1 + p)^n > \binom{n}{k} p^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} p^k > \frac{n^k p^k}{2^k k!}.$$

Значит,

$$0 < \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} < \frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha - k} \qquad (n > 2k).$$

Поскольку $\alpha - k < 0$, имеем $n^{\alpha-k} \to 0$ в силу (*a*).

(*e*) Возьмем $\alpha = 0$ в (*d*).

Ряды

В остальной части этой главы все рассматриваемые последовательности и ряды будут комплекснозначными, если явно не оговорено противное. В упражнении 15 предлагается распространить некоторые из следующих ниже теорем на ряды с членами из R^k.

3.21. Определение. Пусть задана последовательность $\{a_n\}$. Мы будем обозначать сумму $a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$ $(p \leqslant q)$ через $\sum\limits_{n=p}^{q} a_n$. Последовательности $\{a_n\}$ мы сопоставим последовательность $\{s_n\}$, где

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Символ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

или, короче,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{4}$$

мы будем называть *бесконечным рядом* или просто *рядом*. Числа s_n называются *частными суммами* этого ряда. Если последовательность $\{s_n\}$ сходится к s, то мы будем говорить, что ряд *сходится*, и будем писать

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Число s называется суммой этого ряда, но необходимо ясно понимать, что s является *пределом последовательности сумм*, а не получается простым сложением.

Если последовательность $\{s_n\}$ расходится, то говорят, что ряд расходится.

Иногда для удобства обозначений мы будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n. \tag{5}$$

Часто мы будем вместо (4) или (5) писать просто $\sum a_n$.

Ясно, что каждую теорему о последовательностях можно сформулировать на языке рядов (полагая $a_1 = s_1$ и $a_n = s_n - s_{n-1}$ при $n > 1$), и обратно. Но тем не менее полезно различать эти понятия.

Критерий Коши (теорему 3.11) можно сформулировать в следующем виде.

3.22. Теорема. *Ряд $\sum a_n$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует целое N, такое, что*

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leqslant \varepsilon, \tag{6}$$

если $m \geqslant n \geqslant N$.

В частности, при $m = n$ неравенство (6) превращается в неравенство

$$|a_n| \leqslant \varepsilon \qquad (n \geqslant N).$$

Иными словами, справедлива следующая теорема.

3.23. Теорема. *Если ряд* $\sum a_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Однако условие $a_n \to 0$ не достаточно для того, чтобы обеспечить сходимость ряда $\sum a_n$. Например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится; за доказательством мы отсылаем к теореме 3.28.

Теорема 3.14 о монотонных последовательностях также имеет очевидный аналог для рядов.

3.24. Теорема. *Ряд неотрицательных*[1]) *членов сходится тогда и только тогда, когда его частные суммы образуют ограниченную последовательность.*

Теперь мы обратимся к признаку сходимости другой природы — к так называемому «признаку сравнения».

3.25. Теорема. (*a*) *Если* $|a_n| \leqslant c_n$ *при* $n \geqslant N_0$, *где* N_0 — *некоторое фиксированное целое, и если ряд* $\sum c_n$ *сходится, то и ряд* $\sum a_n$ *сходится.*

(*b*) *Если* $a_n \geqslant d_n \geqslant 0$ *при* $n \geqslant N_0$ *и если ряд* $\sum d_n$ *расходится, то и ряд* $\sum a_n$ *расходится.*

Заметим, что признак (*b*) применим только к рядам с неотрицательными членами a_n.

Доказательство. Согласно критерию Коши, для данного $\varepsilon > 0$ существует $N \geqslant N_0$, такое, что при $m \geqslant n \geqslant N$ имеем

$$\sum_{k=n}^{m} c_k \leqslant \varepsilon.$$

Значит,

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{m} |a_k| \leqslant \sum_{k=n}^{m} c_k \leqslant \varepsilon,$$

и (*a*) доказано.

Далее, (*b*) следует из (*a*), так как если ряд $\sum a_n$ сходится, то и ряд $\sum d_n$ должен сходиться (заметим, что (*b*) следует также из теоремы 3.24).

Этот признак сравнения очень полезен; чтобы успешно применять его, мы должны освоиться с некоторым набором рядов с неотрицательными членами, заведомо сходящихся или расходящихся.

---

[1]) Выражение «неотрицательный» всегда относится к *вещественным* числам.

Ряды с неотрицательными членами

Простейшим из всех таких рядов, по-видимому, является геометрическая прогрессия.

3.26. Теорема. *Если* $0 \leqslant x < 1$, *то*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Если $x \geqslant 1$, *то этот ряд расходится.*

Доказательство. Если $x \neq 1$, то

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Устремляя n к ∞, мы получим требуемый результат. При $x = 1$ получается ряд

$$1 + 1 + 1 + \ldots,$$

который, очевидно, расходится.

Во многих случаях, встречающихся в приложениях, члены ряда монотонно убывают. Поэтому следующая теорема Коши представляет особый интерес. Поразительная особенность утверждения теоремы состоит в том, что довольно «редкая» подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$ определяет сходимость или расходимость ряда $\sum a_n$.

3.27. Теорема. *Допустим, что* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$. *Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится в том и только в том случае, когда сходится ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots. \tag{7}$$

Доказательство. По теореме 3.24 достаточно установить ограниченность частных сумм. Пусть

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$t_k = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k}.$$

При $n < 2^k$ имеем

$$s_n \leqslant a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \leqslant$$
$$\leqslant a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k} = t_k,$$

так что

(8) $$s_n \leqslant t_k.$$

С другой стороны, при $n > 2^k$

$$s_n \geqslant a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k,$$

так что

(9) $$2s_n \geqslant t_k.$$

В силу (8) и (9), последовательности $\{s_n\}$ и $\{t_k\}$ или обе ограничены, или обе не ограничены. Доказательство закончено.

3.28. Теорема. *Ряд* $\sum \frac{1}{n^p}$ *сходится, если* $p > 1$, *и расходится, если* $p \leqslant 1$.

Доказательство. Если $p \leqslant 0$, то расходимость следует из теоремы 3.23. Если $p > 0$, то применима теорема 3.27, и мы приходим к ряду

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(1-p)}.$$

Но $2^{(1-p)} < 1$ тогда и только тогда, когда $1 - p < 0$, и теорема вытекает из сопоставления с геометрической прогрессией (следует положить $x = 2^{1-p}$ в теореме 3.26).

В качестве еще одного приложения теоремы 3.27 будет доказана следующая теорема.

3.29. Теорема. *Если* $p > 1$, *то ряд*

(10) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^p}$$

сходится; если $p \leqslant 1$, *то этот ряд расходится.*

Замечание. Символ $\log n$ обозначает логарифм числа n по основанию e (ср. упражнение 9, гл. 1); число e будет вскоре определено (см. определение 3.30). Мы начинаем ряд с $n = 2$, так как $\log 1 = 0$.

Доказательство. Из монотонности логарифмической функции (которая более подробно будет рассматриваться в гл. 8) следует, что $\{\log n\}$ — возрастающая последовательность. Значит, последовательность $\left\{\frac{1}{n \log n}\right\}$ убывает, и мы можем применить

теорему 3.27 к ряду (10); это приводит к ряду

$$(11)\qquad \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k (\log 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k \log 2)^p} = \frac{1}{(\log 2)^p} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p},$$

и теорема 3.29 следует из теоремы 3.28.

Эту процедуру, очевидно, можно продолжить. Например, ряд

$$(12)\qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log \log n}$$

расходится, тогда как ряд

$$(13)\qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^2}$$

сходится.

Можно заметить, что члены ряда (12) очень мало отличаются от членов ряда (13). Однако один ряд сходится, а другой расходится. Продолжая процесс, который привел нас от теоремы 3.28 к теореме 3.29, а затем к (12) и (13), мы получим пары сходящихся и расходящихся рядов, члены которых отличаются даже меньше, чем члены рядов (12) и (13). Можно было бы предположить, что имеется некое предельное положение, «граница», по одну сторону которой лежат все сходящиеся, а по другую — все расходящиеся ряды, по крайней мере пока речь идет о рядах с монотонно убывающими членами. Конечно, это понятие «границы» совсем неясное. Однако мы хотим отметить следующее: как бы мы ни уточнили это понятие, такое предположение окажется неверным. Упражнения 11 (*b*) и 12 (*b*) могут служить иллюстрациями.

Мы не хотим вдаваться глубже в подобные вопросы теории сходимости и отсылаем читателя к главе IX, в особенности § 41, книги Кноппа[1]) (см. литературу).

Число *e*

3.30. Определение. $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Здесь $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$, если $n \geqslant 1$, и $0! = 1$.

---

[1]) См. также Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, М.—Л., 1948, п. 365. —*Прим. перев.*

Этот ряд сходится, так как

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\ldots n} <$$
$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

поэтому определение имеет смысл. На самом деле указанный ряд сходится очень быстро, и это позволяет нам вычислить e с большой точностью.

Интересно отметить, что e можно определить также при помощи другого предельного перехода; доказательство служит хорошей иллюстрацией того, как следует оперировать с пределами.

3.31. Теорема. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

Доказательство. Пусть

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, \quad t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

По теореме о биноме

$$t_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Значит, $t_n \leqslant s_n$, так что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n \leqslant e \tag{14}$$

по теореме 3.19. Далее, если $n \geqslant m$, то

$$t_n \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

Устремим n к ∞, оставляя m фиксированным. Получим

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n \geqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{m!},$$

так что

$$s_m \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n.$$

Устремляя m к ∞, мы окончательно получаем

$$e \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, t_n. \tag{15}$$

Скорость, с которой сходится ряд $\sum \frac{1}{n!}$, можно оценить так: если s_n обозначает то же, что и выше, то

$$e - s_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots <$$
$$< \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots \right\} = \frac{1}{n!\,n},$$

так что

$$0 < e - s_n < \frac{1}{n!\,n}. \tag{16}$$

Таким образом, сумма s_{10} приближает число e с ошибкой, меньшей 10^{-7}. Неравенство (16) представляет и теоретический интерес, так как оно позволяет очень легко доказать иррациональность числа e.

3.32. Теорема. *Число e иррационально.*

Доказательство. Допустим, что e рационально. Тогда $e = p/q$, где p, q — положительные целые числа. В силу (16),

$$0 < q!\,(e - s_q) < \frac{1}{q}. \tag{17}$$

Согласно предположению, $q!\,e$ — целое число. Число $q!\,(e - s_q)$ также целое, поскольку

$$q!\,s_q = q!\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{q!}\right).$$

Так как $q \geqslant 1$, из (17) следует существование целого числа, заключенного между 0 и 1. Таким образом, мы добились противоречия.

Другие признаки сходимости

3.33. Теорема (признак Коши). *Пусть задан ряд $\sum a_n$. Положим $\alpha = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда*

(*a*) *если $\alpha < 1$, то ряд $\sum a_n$ сходится;*

(*b*) *если $\alpha > 1$, то ряд $\sum a_n$ расходится;*

(*c*) *существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $\alpha = 1$.*

Доказательство. Если $\alpha < 1$, то можно выбрать β так, что $\alpha < \beta < 1$, а целое число N — так, что $\sqrt[n]{|a_n|} < \beta$ при $n \geqslant N$ [по теореме 3.17 (*b*)]. Иначе говоря, при $n \geqslant N$ имеем

$$|a_n| < \beta^n.$$

Ряд $\sum \beta^n$ сходится, так как $0<\beta<1$. Сходимость ряда $\sum a_n$ следует теперь из признака сравнения.

Если $\alpha>1$, то, снова по теореме 3.17, существует последовательность $\{n_k\}$, такая, что

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\to\alpha.$$

Значит, $|a_n|>1$ для бесконечного множества значений n, так что условие $a_n\to 0$, необходимое для сходимости ряда $\sum a_n$, не выполнено (теорема 3.23).

Чтобы доказать (*c*), рассмотрим ряды

$$\sum\frac{1}{n},\ \sum\frac{1}{n^2}.$$

Для каждого из этих рядов $\alpha=1$ [по теореме 3.20 (*c*)], но первый расходится, а второй сходится.

3.34. Теорема (признак Даламбера). *Ряд* $\sum a_n$

(*a*) *сходится, если* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$;

(*b*) *расходится, если* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\geqslant 1$ *при* $n\geqslant n_0$, *где* n_0 — *некоторое фиксированное число*;

(*c*) *существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых*

$$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\leqslant 1\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Доказательство. Если условие (*a*) выполнено, то можно найти $\beta<1$ и целое число N, такие, что

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\beta$$

при $n\geqslant N$. В частности,

$$\begin{aligned}&|a_{N+1}|<\beta|a_N|,\\&|a_{N+2}|<\beta|a_{N+1}|<\beta^2|a_N|,\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&|a_{N+p}|<\beta^p|a_N|.\end{aligned}$$

Это значит, что

$$|a_n|<|a_N|\beta^{-N}\cdot\beta^n$$

при $n\geqslant N$; таким образом (*a*) следует из признака сравнения, так как ряд $\sum\beta^n$ сходится.

Если $|a_{n+1}| \geqslant |a_n|$ при $n \geqslant n_0$, то легко видеть, что условие $a_n \to 0$ не выполнено, откуда и следует (*b*).

Чтобы доказать (*c*), мы снова рассмотрим ряды

$$\sum \frac{1}{n}, \quad \sum \frac{1}{n^2}.$$

Для каждого из них мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

но первый расходится, а второй сходится.

3.35. Примеры. (*a*) Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots,$$

для которого

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty.$$

Признак Коши указывает на сходимость; признак Даламбера не позволяет сделать никаких заключений.

(*b*) То же самое верно в отношении ряда

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \frac{1}{64} + \ldots,$$

где

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8}, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2,$$

но

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}.$$

3.36. Замечания. Признак Даламбера, как правило, легче применять, чем признак Коши, так как обычно легче вычислять частные, чем корни n-й степени. Однако признак Коши сильнее в следующем смысле: когда признак Даламбера указывает на сходимость, то и признак Коши тоже указывает на сходимость; если же признак Коши не позволяет сделать никаких заключе-

ний, то и признак Даламбера тоже не позволяет сделать никаких заключений. Это следует из теоремы 3.37 и иллюстрируется приведенными выше примерами.

Ни один из этих двух признаков не является особенно тонким в отношении расходимости. В обоих расходимость выводится из того, что a_n не стремится к нулю при $n \to \infty$.

3.37. Теорема. *Для любой последовательности $\{c_n\}$ положительных чисел имеем*

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Доказательство. Мы докажем второе неравенство; доказательство первого совершенно аналогично. Положим

$$\alpha = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n}.$$

Если $\alpha = +\infty$, то доказывать нечего. Если α конечно, то выберем $\beta > \alpha$. Существует целое N, такое, что

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \leqslant \beta$$

при $n \geqslant N$. В частности, для любого $p > 0$

$$c_{N+k+1} \leqslant \beta c_{N+k} \quad (k = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Перемножая эти неравенства, мы получаем

$$c_{N+p} \leqslant \beta^p c_N,$$

или

$$c_n \leqslant c_N \beta^{-N} \cdot \beta^n \quad (n \geqslant N).$$

Значит,

$$\sqrt[n]{c_n} \leqslant \sqrt[n]{c_N \beta^{-N} \cdot \beta},$$

так что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leqslant \beta \tag{18}$$

по теореме 3.20 (b). Поскольку неравенство (18) верно при любом $\beta > \alpha$, имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} \leqslant \alpha.$$

Степенные ряды

3.38. Определение. Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{c_n\}$. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{19}$$

называется *степенным рядом*. Числа c_n называются *коэффициентами* этого ряда; здесь z — комплексное число.

Вообще говоря, этот ряд сходится или расходится в зависимости от выбора числа z. Точнее, с каждым степенным рядом связан круг, так называемый круг сходимости, такой, что ряд (19) сходится, если z лежит внутри этого круга, и расходится, если z находится вне круга (чтобы охватить все случаи, мы должны рассматривать плоскость как внутренность окружности бесконечного радиуса, а точку — как окружность нулевого радиуса). Поведение ряда на окружности круга сходимости может быть гораздо более разнообразным, и его нельзя так просто описать.

3.39. Теорема. *Пусть задан степенной ряд* $\sum c_n z^n$. *Положим*

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad R = \frac{1}{\alpha}$$

(*если* $\alpha = 0$, *то* $R = +\infty$; *если* $\alpha = +\infty$, *то* $R = 0$). *Тогда ряд* $\sum c_n z^n$ *сходится, если* $|z| < R$, *и расходится, если* $|z| > R$.

Доказательство. Положим $a_n = c_n z^n$ и применим признак Коши. Имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = |z| \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{|z|}{R}.$$

Замечание. Число R называется радиусом сходимости ряда $\sum c_n z^n$.

3.40. Примеры. (*a*) Для ряда $\sum n^n z^n$ имеем $R = 0$.

(*b*) Для ряда $\sum \frac{z^n}{n!}$ имеем $R = +\infty$ (в этом случае проще применить признак Даламбера, чем признак Коши).

(*c*) Для ряда $\sum z^n$ имеем $R = 1$. Если $|z| = 1$, то ряд расходится, так как z^n не стремится к 0 при $n \to \infty$.

(*d*) Для ряда $\sum \frac{z^n}{n}$ имеем $R = 1$. Этот ряд сходится во всех точках окружности круга сходимости, кроме $z = 1$. Это будет доказано в теореме 3.44.

(*e*) Для ряда $\sum \frac{z^n}{n^2}$ имеем $R=1$. Этот ряд сходится во всех точках окружности круга сходимости согласно признаку сравнения, так как $\left|\frac{z^n}{n^2}\right|=\frac{1}{n^2}$, если $|z|=1$.

Суммирование по частям

3.41. Теорема. *Пусть даны две последовательности* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. *Положим*

$$A_n=\sum_{k=0}^{n} a_k \text{ при } n\geqslant 0;\ A_{-1}=0.$$

Тогда, если $0\leqslant p\leqslant q$, *то*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n=\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n-b_{n+1})+A_q b_q-A_{p-1}b_p. \tag{20}$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n=\sum_{n=p}^{q}(A_n-A_{n-1})\,b_n=\sum_{n=p}^{q} A_n b_n-\sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1},$$

и последнее выражение справа, очевидно, равно правой части равенства (20).

Формула (20), так называемая формула суммирования по частям, полезна при исследовании рядов вида $\sum a_n b_n$, в особенности, если последовательность $\{b_n\}$ монотонна. Сейчас мы дадим ее приложения.

3.42. Теорема. *Допустим, что*

(*a*) *частные суммы* A_n *ряда* $\sum a_n$ *образуют ограниченную последовательность*;

(*b*) $b_0\geqslant b_1\geqslant b_2\geqslant\ldots$;

(*c*) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$.

Тогда ряд $\sum a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство. Выберем M так, что $|A_n|\leqslant M$ при всех n. Для данного $\varepsilon>0$ существует целое число N, такое, что $b_N\leqslant(\varepsilon/2M)$. При $N\leqslant p\leqslant q$ имеем

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n b_n\right|=\left|\sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n-b_{n+1})+A_q b_q-A_{p-1}b_p\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\left|\sum_{n=p}^{q-1}(b_n-b_{n+1})+b_q+b_p\right|=2Mb_p\leqslant 2Mb_N\leqslant\varepsilon.$$

Сходимость следует теперь из критерия Коши. Заметим, что первое неравенство в написанной выше цепочке основано, конечно, на том, что $b_n - b_{n+1} \geqslant 0$.

3.43. Теорема. *Допустим, что*

(*a*) $|c_1| \geqslant |c_2| \geqslant |c_3| \geqslant \ldots$;

(*b*) $c_{2m-1} \geqslant 0$, $c_{2m} \leqslant 0$ $(m = 1, 2, 3 \ldots)$;

(*c*) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

Тогда ряд $\sum c_n$ сходится.

Ряд, для которого выполнено условие (*b*), называется «знакопеременным рядом»; сформулированная теорема была известна Лейбницу.

Доказательство. Применим теорему 3.42, положив $a_n = (-1)^{n+1}$, $b_n = |c_n|$.

3.44. Теорема. *Допустим, что радиус сходимости ряда* $\sum c_n z^n$ *равен* 1 *и* $c_0 > c_1 > c_2 > \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. *Тогда ряд* $\sum c_n z^n$ *сходится в каждой точке окружности* $|z| = 1$, *за исключением, возможно, точки* $z = 1$.

Доказательство. Положим $a_n = z^n$, $b_n = c_n$. Тогда выполнены условия теоремы 3.42, так как

$$|A_n| = \left|\sum_{m=0}^{n} z^m\right| = \left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{2}{|1-z|},$$

если $|z| = 1$, $z \neq 1$.

Абсолютная сходимость

Говорят, что ряд $\sum a_n$ *сходится абсолютно*, если сходится ряд $\sum |a_n|$.

3.45. Теорема. *Если ряд* $\sum a_n$ *сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Утверждение следует из неравенства

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leqslant \sum_{k=n}^{m} |a_k|$$

и из критерия Коши.

3.46. Замечания. Для рядов с положительными членами абсолютная сходимость — это то же самое, что сходимость.

Если ряд $\sum a_n$ сходится, а ряд $\sum |a_n|$ расходится, то говорят, что ряд $\sum a_n$ сходится неабсолютно. Например, ряд

$$\sum \frac{(-1)^n}{n}$$

сходится неабсолютно (теорема 3.43).

Признак сравнения, так же как и признаки Даламбера и Коши, на самом деле есть признак абсолютной сходимости, и поэтому не может дать никакой информации о неабсолютно сходящихся рядах. Для работы с последними иногда можно пользоваться суммированием по частям. В частности, степенной ряд сходится абсолютно внутри круга сходимости.

Мы увидим, что с абсолютно сходящимися рядами можно обращаться совершенно так же, как с конечными суммами. Мы можем перемножать их почленно и переставлять слагаемые, не меняя суммы. Но для неабсолютно сходящихся рядов это уже неверно, и при действиях с ними нужна бо́льшая осторожность.

Сложение и умножение рядов

3.47. Теорема. *Если* $\sum a_n = A$ *и* $\sum b_n = B$, *то*

$$\sum (a_n + b_n) = A + B \text{ и } \sum ca_n = cA \text{ при любом } c.$$

Доказательство. Пусть

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

Тогда

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k).$$

Ясно, что

$$\lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) = A + B,$$

так как

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} B_n = B.$$

Доказательство второго утверждения даже проще.

Таким образом, два сходящихся ряда можно сложить почленно, и полученный ряд будет сходиться к сумме сумм этих двух рядов. Положение усложняется при рассмотрении произведения двух рядов. Сначала мы должны определить произведение. Это можно сделать разными способами; мы будем рассматривать так называемое произведение Коши.

3.48. Определение. Пусть заданы ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$. Положим

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

и назовем ряд $\sum c_n$ произведением двух данных рядов.

Это определение можно объяснить следующим образом. Если, взяв два степенных ряда $\sum a_n z^n$ и $\sum b_n z^n$, мы перемножим их подобно тому, как это делается в случае многочленов, и приведем подобные члены, то мы получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots) =$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \ldots =$$
$$= c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots .$$

Полагая $z = 1$, мы приходим к данному выше определению.

3.49. Пример. Если

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

и $A_n \to A$, $B_n \to B$, то совсем не ясно, будет ли последовательность $\{C_n\}$ сходиться к AB, так как неверно, что $C_n = A_n B_n$. Зависимость $\{C_n\}$ от $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ очень сложна (см. доказательство теоремы 3.50). Сейчас мы покажем, что произведение двух сходящихся рядов может на самом деле расходиться.

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

сходится (теорема 3.43). Составив произведение этого ряда с самим собой, мы получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) -$$
$$- \left(\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \ldots,$$

так что

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}}.$$

Так как

$$(n-k+1)(k+1)=\left(\frac{n}{2}+1\right)^2-\left(\frac{n}{2}-k\right)^2\leqslant\left(\frac{n}{2}+1\right)^2,$$

то мы имеем

$$|c_n|\geqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{n+2}=\frac{2(n+1)}{n+2},$$

так что условие $c_n\to 0$, необходимое для сходимости ряда $\sum c_n$, не выполнено.

В связи со следующей теоремой, принадлежащей Мертенсу, заметим, что мы рассматривали в этом примере произведение двух неабсолютно сходящихся рядов.

3.50. Теорема. *Допустим, что*

(*a*) *ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно,*

(*b*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n=A$,

(*c*) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n=B$,

(*d*) $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n=AB.$$

Это значит, что произведение двух сходящихся рядов сходится и сумма равна произведению сумм, если хотя бы один из этих двух рядов сходится абсолютно.

Доказательство. Положим

$$A_n=\sum_{k=0}^{n} a_k,\quad B_n=\sum_{k=0}^{n} b_k,\quad C_n=\sum_{k=0}^{n} c_k,\quad \beta_n=B_n-B.$$

Тогда

$$\begin{aligned}C_n&=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)+\ldots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0)=\\&=a_0B_n+a_1B_{n-1}+\ldots+a_nB_0=\\&=a_0(B+\beta_n)+a_1(B+\beta_{n-1})+\ldots+a_n(B+\beta_0)=\\&=A_nB+a_0\beta_n+a_1\beta_{n-1}+\ldots+a_n\beta_0.\end{aligned}$$

Положим

$$\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0.$$

Мы хотим показать, что $C_n \to AB$. Достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0, \tag{21}$$

так как $A_nB \to AB$. Положим

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

[Именно здесь мы используем условие (a).] Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу (c), $\beta_n \to 0$. Значит, можно выбрать N так, что $|\beta_n| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N$, и в этом случае

$$|\gamma_n| \leqslant |\beta_0 a_n + \ldots + \beta_N a_{n-N}| + |\beta_{N+1} a_{n-N-1} + \ldots + \beta_n a_0| \leqslant$$
$$\leqslant |\beta_0 a_n + \ldots + \beta_N a_{n-N}| + \varepsilon\alpha.$$

Оставляя N фиксированным и устремляя n к ∞, мы получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\gamma_n| \leqslant \varepsilon\alpha,$$

так как $a_k \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда и следует (21), так как ε произвольно.

Можно задать другой вопрос: обязательно ли сумма ряда $\sum c_n$, в том случае, когда он сходится, равна AB? Абель показал, что ответ на этот вопрос — утвердительный.

3.51. Теорема. *Если ряды $\sum a_n$, $\sum b_n$, $\sum c_n$ сходятся соответственно к A, B, C и $c_n = a_0b_n + \ldots + a_nb_0$, то $C = AB$.*

Здесь не делается никаких предположений об абсолютной сходимости. Мы дадим простое доказательство (основанное на непрерывности степенных рядов) после теоремы 8.2.

Перестановки рядов

3.52. Определение. Пусть $\{k_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, — последовательность, в которой каждое положительное целое число встречается один и только один раз (т. е. $\{k_n\}$ — взаимно однозначное отображение множества J на J, см. определение 2.4). Положим

$$a'_n = a_{k_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

мы будем говорить, что ряд $\sum a'_n$ является перестановкой ряда $\sum a_n$.

Если $\{s_n\}$, $\{s'_n\}$ — последовательности частных сумм рядов $\sum a_n$, $\sum a'_n$, то легко видеть, что, вообще говоря, эти две последова-

тельности составлены из совершенно разных чисел. Мы, таким образом, приходим к задаче: выяснить, при каких условиях все перестановки сходящегося ряда сходятся и совпадают ли их суммы между собой.

3.53. Определение. Говорят, что ряд $\sum a_n$ сходится *безусловно*, если каждая его перестановка сходится (к той же сумме). (Ср. с теоремой 3.57.)

3.54. Пример. Рассмотрим сходящийся ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots \tag{22}$$

и одну из его перестановок

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots, \tag{23}$$

в которой за двумя положительными членами всегда следует отрицательный. Если s — сумма ряда (22), то

$$s<1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.$$

Так как

$$\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}>0$$

при $k\geqslant 1$, то мы видим, что $s'_3<s'_6<s'_9<\ldots$, где s'_n есть n-я частная сумма ряда (23). Значит,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, s'_n>s'_3=\frac{5}{6},$$

так что ряд (23) наверняка не сходится к s [мы предоставляем читателю проверку того, что ряд (23) тем не менее сходится].

Этот пример иллюстрирует следующую теорему, принадлежащую Риману.

3.55. Теорема. *Пусть $\sum a_n$ — неабсолютно сходящийся ряд вещественных чисел, и пусть $\alpha\leqslant\beta$ — два данных числа (в расширенной системе вещественных чисел). Тогда существует перестановка $\sum a'_n$ с частными суммами s'_n, такая, что*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, s'_n=\alpha,\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, s'_n=\beta. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть

$$p_n=\frac{|a_n|+a_n}{2},\quad q_n=\frac{|a_n|-a_n}{2}\qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Тогда $p_n - q_n = a_n$, $p_n + q_n = |a_n|$, $p_n \geqslant 0$, $q_n \geqslant 0$. Ряды $\sum p_n$, $\sum q_n$ оба должны расходиться.

Действительно, если бы оба эти ряда сходились, то и ряд

$$\sum (p_n + q_n) = \sum |a_n|$$

сходился бы, вопреки предположению. Сходимость ряда $\sum q_n$ и расходимость ряда $\sum p_n$ (или наоборот) влечет за собой расходимость ряда $\sum a_n$, что снова противоречит предположению, так как

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{N} (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{N} p_n - \sum_{n=1}^{N} q_n.$$

Обозначим теперь через $P_1, P_2, P_3, \ldots$ неотрицательные члены ряда $\sum a_n$ в том порядке, в каком они встречаются, и пусть $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ — абсолютные величины отрицательных членов ряда $\sum a_n$ также в их естественном порядке.

Ряды $\sum P_n$, $\sum Q_n$ отличаются от рядов $\sum p_n$, $\sum q_n$ только нулевыми членами и поэтому расходятся.

Мы построим такие последовательности $\{m_n\}$, $\{k_n\}$, что ряд

$$(25) \qquad \begin{gathered} P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - \ldots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \ldots \\ \ldots + P_{m_2} - Q_{k_1+1} - \ldots - Q_{k_2} + \ldots, \end{gathered}$$

очевидно, являющийся перестановкой ряда $\sum a_n$, удовлетворяет условию (24).

Выберем последовательности вещественных чисел $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ так, что $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$, $\alpha_n < \beta_n$.

Пусть m_1, k_1 — наименьшие из таких целых чисел, что

$$P_1 + \ldots + P_{m_1} > \beta_1,$$
$$P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - \ldots - Q_{k_1} < \alpha_1;$$

пусть m_2, k_2 — наименьшие из таких целых чисел, что

$$P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - \ldots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \ldots + P_{m_2} > \beta_2,$$
$$P_1 + \ldots + P_{m_1} - Q_1 - \ldots - Q_{k_1} + P_{m_1+1} + \ldots + P_{m_2} - \\ - Q_{k_1+1} - \ldots - Q_{k_2} < \alpha_2,$$

и т. д. Мы можем продолжить этот выбор, так как ряды $\sum P_n$ и $\sum Q_n$ расходятся.

Если через x_n, y_n обозначить частные суммы ряда (25), последние члены которых P_{m_n}, $-Q_{k_n}$, то

$$|x_n - \beta_n| \leqslant P_{m_n}, \quad |y_n - \alpha_n| \leqslant Q_{k_n}.$$

Мы видим, что $x_n \to \beta$, $y_n \to \alpha$, так как $P_n \to 0$ и $Q_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Наконец, ясно, что никакое число, меньшее чем α или большее чем β, не может быть частичным пределом последовательности частных сумм ряда (25).

3.56. Теорема. *Ряд $\sum a_n$ сходится безусловно тогда и только тогда, когда он сходится абсолютно.*

Доказательство. Допустим, что ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно. Пусть $\sum a'_n$ — его перестановка, обладающая частными суммами s'_n. Для данного $\varepsilon > 0$ существует целое число N, такое, что при $m \geqslant n \geqslant N$ имеем

$$\sum_{i=n}^{m} |a_i| \leqslant \varepsilon. \tag{26}$$

Выберем теперь p так, чтобы все целые числа $1, 2, \ldots, N$ содержались в множестве $k_1, k_2, \ldots, k_p$ (мы используем обозначения из определения 3.52). Тогда при $n > p$ числа $a_1, \ldots, a_N$ в разности $s_n - s'_n$ уничтожаются, так что $|s_n - s'_n| \leqslant \varepsilon$ в силу (26). Значит, последовательность $\{s'_n\}$ сходится к тому же пределу, что и $\{s_n\}$.

Теперь допустим, что ряд $\sum a_n$ сходится неабсолютно. Если $a_n = x_n + iy_n$, где x_n и y_n вещественны, то $|a_n| \leqslant |x_n| + |y_n|$. Поскольку ряд $\sum |a_n|$ расходится, то расходится один из рядов $\sum |x_n|$, $\sum |y_n|$. Таким образом, один из рядов $\sum x_n$ или $\sum y_n$ сходится неабсолютно. Согласно теореме 3.55, имеется такая перестановка, что либо ряд $\sum x'_n$, либо ряд $\sum y'_n$ расходится, так что и ряд $\sum a'_n$ расходится.

Значит, ряд $\sum a_n$ не является безусловно сходящимся.

Следующая теорема показывает, что в определении 3.53, не меняя его содержания, можно опустить фразу, заключенную в скобки.

3.57. Теорема. *Если все перестановки ряда $\sum a_n$ сходятся, то они сходятся к одной и той же сумме.*

Доказательство. Либо ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, и в этом случае $\sum a_n$ сходится безусловно по теореме 3.56, либо $\sum a_n$ не сходится абсолютно, и в этом случае по теореме 3.55 существует расходящаяся перестановка.

Упражнения

1. Доказать, что из сходимости последовательности $\{s_n\}$ следует сходимость последовательности $\{|s_n|\}$. Верно ли обратное?

2. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$.

3. Пусть $s_1=\sqrt{2}$ и

$$s_{n+1}=\sqrt{2+\sqrt{s_n}} \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Доказать, что последовательность $\{s_n\}$ сходится и что $s_n<2$ при $n=1, 2, 3, \ldots$.

4. Найти верхний и нижний пределы последовательности $\{s_n\}$, определенной следующим образом:

$$s_1=0; \quad s_{2m}=\frac{s_{2m-1}}{2}; \quad s_{2m+1}=\frac{1}{2}+s_{2m}.$$

5. Для любых двух вещественных последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\,b_n.$$

6. Исследовать поведение (сходимость или расходимость ряда) $\sum a_n$, если

(a) $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

(b) $a_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$;

(c) $a_n=\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$;

(d) $a_n=\dfrac{1}{1+z^n}$ для комплексных значений z.

7. Доказать, что из сходимости ряда $\sum a_n$ следует сходимость ряда

$$\sum\frac{\sqrt{a_n}}{n},$$

если $a_n\geqslant 0$.

8. Если ряд $\sum a_n$ сходится и если $\{b_n\}$ — монотонная и ограниченная последовательность, то и ряд $\sum a_nb_n$ сходится.

9. Найти радиус сходимости каждого из следующих степенных рядов:

(a) $\sum n^3z^n$; (b) $\sum\dfrac{2^n}{n!}z^n$;

(c) $\sum\dfrac{2^n}{n^2}z^n$; (d) $\sum\dfrac{n^3}{3^n}z^n$.

10. Допустим, что коэффициенты степенного ряда $\sum a_nz^n$ — целые числа, среди которых бесконечно много отличных от нуля Доказать, что радиус сходимости не превышает единицы.

11. Допустим, что ряд $\sum a_n$ расходится, $a_n > 0$, и пусть $s_n = a_1 + \ldots + a_n$. Доказать, что

(*a*) ряд $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ расходится;

(*b*) ряд $\sum \frac{a_n}{s_n}$ расходится;

(*c*) ряд $\sum \frac{a_n}{s_n^2}$ сходится.

Что можно сказать о рядах $\sum \frac{a_n}{1+na_n}$, $\sum \frac{a_n}{1+n^2a_n}$?

12. Допустим, что ряд $\sum a_n$ сходится, $a_n > 0$, и положим

$$r_n = \sum_{m=n}^{\infty} a_m.$$

Доказать, что

(*a*) ряд $\sum \frac{a_n}{r_n}$ расходится;

(*b*) ряд $\sum \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ сходится.

13. Доказать, что произведение Коши двух абсолютно сходящихся рядов сходится абсолютно.

14. Пусть $\{s_n\}$ — какая-нибудь последовательность. Рассмотрим средние арифметические

$$t_n = \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n}.$$

Доказать, что из сходимости $s_n \to s$ следует сходимость $t_n \to s$. Доказать, что существуют расходящиеся последовательности $\{s_n\}$, которым соответствуют сходящиеся последовательности $\{t_n\}$.

15. Определение 3.21 можно распространить на тот случай, когда a_n принадлежат некоторому фиксированному пространству R^k. Абсолютная сходимость определяется как сходимость ряда $\sum |\mathbf{a}_n|$. Показать, что теоремы 3.22, 3.23, 3.25, 3.33, 3.34, 3.42, 3.45, 3.47, 3.56 и 3.57 остаются верными в этом более общем случае (доказательства требуют лишь незначительных изменений).

16. Доказать следующий аналог теоремы 3.10 (*b*): если $\{E_n\}$ — убывающая последовательность замкнутых множеств в *полном* метрическом пространстве X и если

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} E_n = 0,$$

то множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ состоит ровно из одной точки.

17. Пусть X — полное метрическое пространство, а $\{G_n\}$ — последовательность всюду плотных открытых подмножеств про-

странства X. Доказать теорему Бэра, состоящую в том, что множество $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ непусто. (В действительности оно плотно в X.)

Указание. Найти стягивающуюся последовательность замкнутых окрестностей E_n, таких, что $E_n \subset G_n$, и применить упражнение 16.

18. Пусть $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ — последовательность Коши в метрическом пространстве X. Показать, что последовательность $\{d(p_n, q_n)\}$ сходится.

Указание. Для любых m, n имеем $d(p_n, q_n) \leqslant d(p_n, p_m) + d(p_m, q_m) + d(q_m, q_n)$, следовательно, разность

$$|d(p_n, q_n) - d(p_m, q_m)|$$

мала, если m, n велики.

19. Пусть X — метрическое пространство.

(*a*) Назовем две последовательности Коши $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ в X *эквивалентными*, если

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = 0.$$

Доказать, что этим определено отношение эквивалентности[1]).

(*b*) Пусть X^* — множество всех полученных таким образом классов эквивалентности[2]). Если $P \in X^*$, $Q \in X^*$, $\{p_n\} \in P$, $\{q_n\} \in Q$, то положим, по определению,

$$\Delta(P, Q) = \lim_{n\to\infty} d(p_n, q_n).$$

В силу упражнения 18, этот предел существует. Показать, что число $\Delta(P, Q)$ не изменится, если $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ заменить эквивалентными последовательностями, и что тем самым Δ — расстояние на X^*.

(*c*) Доказать, что полученное метрическое пространство X^* полно.

(*d*) Каждому $p \in X$ сопоставим последовательность Коши, все члены которой равны p; пусть P_p — тот элемент множества X^*, который содержит эту последовательность. Доказать, что

$$\Delta(P_p, P_q) = d(p, q)$$

---

[1]) Это означает, что 1) всякая последовательность Коши эквивалентна самой себе; 2) из эквивалентности пары последовательностей $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ следует эквивалентность пары $\{q_n\}$, $\{p_n\}$; 3) из эквивалентности пар $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ и $\{q_n\}$, $\{r_n\}$ следует эквивалентность пары последовательностей $\{p_n\}$, $\{r_n\}$. — *Прим. перев.*

[2]) Классом эквивалентности называется множество всех последовательностей Коши, эквивалентных какой-нибудь одной последовательности. — *Прим. перев.*

при всех p, $q \in X$. Иными словами, отображение φ, заданное равенством $\varphi(p) = P_p$, есть изометрия (т. е. отображение, сохраняющее расстояния) пространства X в X^*.

(e) Доказать, что $\varphi(X)$ всюду плотно в X^* и что $\varphi(X) = X^*$, если X полно.

В силу (d) можно отождествить X с $\varphi(X)$ и, таким образом, считать, что X погружено в полное метрическое пространство X^*. Мы будем называть X^* *пополнением* пространства X.

20. Пусть X — пространство рациональных чисел с метрикой $d(x, y) = |x - y|$. Что служит пополнением этого пространства? (Ср. с упражнением 19.)