ГЛАВА 4

НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Понятие функции и связанная с ним терминология были введены в определениях 2.1 и 2.4. Хотя в последующих главах мы будем в основном интересоваться вещественными и комплексными функциями (т. е. функциями, значения которых — вещественные или комплексные числа), мы будем рассматривать также векторнозначные функции (т. е. функции со значениями в R^k) и функции со значениями в любом метрическом пространстве. Теоремы, которые мы будем доказывать в этой общей обстановке, ничуть не стали бы более легкими, если бы мы ограничились, например, вещественными функциями; наоборот, на самом деле картина упростится и прояснится, если мы отбросим излишние предположения и будем формулировать и доказывать теоремы в разумной общности.

Наши функции будут определены в метрических пространствах, выбор которых будет надлежащим образом уточняться в различных примерах.

Предел функции

4.1. Определение. Пусть X и Y — метрические пространства. Пусть $E \subset X$, f отображает E в Y, а p — предельная точка множества E. Мы будем писать «$f(x) \to q$ при $x \to p$», или

$$\lim_{x \to p} f(x) = q, \tag{1}$$

если существует точка $q \in Y$, обладающая следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что

$$d_Y(f(x), q) < \varepsilon \tag{2}$$

для любых точек $x \in E$, для которых

$$0 < d_X(x, p) < \delta. \tag{3}$$

Символы d_X и d_Y относятся к расстояниям соответственно в пространствах X и Y.

Если X и (или) Y заменяются вещественной прямой, комплексной плоскостью или каким-нибудь евклидовым пространством R^k,

то расстояния d_X, d_Y, конечно, заменяются абсолютными величинами или соответствующими нормами (см. п. 2.18).

Следует отметить, что $p \in X$, но точка p не обязана принадлежать множеству E в предыдущем определении. Более того, даже если $p \in E$, то вполне возможно, что $f(p) \neq \lim\limits_{x \to p} f(x)$.

Этому определению можно придать другую форму, высказав его в терминах последовательностей.

4.2. Теорема. *Пусть X, Y, E, f и p — те же, что и в определении 4.1. Тогда*

$$\lim_{x \to p} f(x) = q \tag{4}$$

в том и только в том случае, когда

$$\lim_{n \to \infty} f(p_n) = q \tag{5}$$

для любой последовательности $\{p_n\}$, такой, что

$$p_n \neq p, \quad \lim_{n \to \infty} p_n = p, \quad p_n \in E \text{ при всех } n. \tag{6}$$

Доказательство. Допустим, что выполнено равенство (4). Выберем какую-нибудь последовательность $\{p_n\}$, удовлетворяющую условию (6). Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta > 0$, такое, что $d_Y(f(x), q) < \varepsilon$, если $x \in E$ и $0 < d_X(p, x) < \delta$. Кроме того, существует N, такое, что при $n > N$ имеем $0 < d_X(p_n, p) < \delta$. Таким образом, при $n > N$ имеем $d_Y(f(p_n), q) < \varepsilon$, откуда следует, что выполнено равенство (5).

Обратно, допустим, что (4) неверно. Тогда существует число $\varepsilon > 0$, такое, что для каждого $\delta > 0$ найдется точка $x \in E$ (зависящая от δ), для которой $d_Y(f(x), q) \geqslant \varepsilon$, но $0 < d_X(x, p) < \delta$. Выбирая $\delta_n = 1/n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), мы найдем последовательность, удовлетворяющую условию (6), для которой равенство (5) не выполняется.

Следствие. *Если f имеет предел в точке p, то этот предел единственный.*

Это следует из теорем 3.2 (*b*) и 4.2.

4.3. Определение. Пусть на E определены две комплексные функции f и g. Символом $f+g$ обозначается функция, сопоставляющая каждой точке x множества E число $f(x)+g(x)$. Подобным образом мы определим разность $f-g$, произведение fg и отношение f/g двух функций, имея в виду, что отношение определено лишь в тех точках $x \in E$, в которых $g(x) \neq 0$. Если f сопоставляет каждой точке x множества E одно и то же число c, то f называется постоянной функцией, или просто постоянной,

и мы будем писать в этом случае $f=c$. Если f и g — вещественные функции и если $f(x) \geqslant g(x)$ при каждом $x \in E$, то мы иногда для краткости будем писать $f \geqslant g$.

Аналогично, если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ отображают E в R^k, то мы определим $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ и $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ равенствами $(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x)=\mathbf{f}(x)+\mathbf{g}(x)$, $(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(x)=\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x)$, и если λ — вещественное число, то $(\lambda\mathbf{f})(x)=\lambda\mathbf{f}(x)$.

4.4. Теорема. *Пусть X — метрическое пространство, $E \subset X$, p — предельная точка множества E, f и g — комплексные функции на E и*

$$\lim_{x\to p} f(x)=A, \qquad \lim_{x\to p} g(x)=B.$$

Тогда

(*a*) $\lim\limits_{x\to p}(f+g)(x)=A+B$;

(*b*) $\lim\limits_{x\to p}(fg)(x)=AB$;

(*c*) $\lim\limits_{x\to p}(f/g)(x)=A/B$, *если* $B\neq 0$.

Доказательство. Эти утверждения, в силу теоремы 4.3, немедленно следуют из аналогичных свойств последовательностей (теорема 3.3).

Замечание. Если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ отображают E в R^k, то (*a*) остается верным, а (*b*) принимает вид

(*b'*) $\lim\limits_{x\to p}(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(x)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

(ср. с теоремой 3.4).

Непрерывные функции

4.5. Определение. Пусть X и Y — метрические пространства, $E \subset X$, $p \in E$ и f отображает E в Y. Тогда функция f называется *непрерывной в точке* p, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что

$$d_Y(f(x), f(p))<\varepsilon$$

для всех точек $x \in E$, для которых $d_X(x, p)<\delta$.

Если f непрерывна в каждой точке множества E, то f называется *непрерывной на* E.

Для того чтобы быть непрерывным в точке p, отображение должно быть определено в этой точке. (Ср. это с замечанием, следующим за определением 4.1.)

Если p — изолированная точка множества E, то из нашего определения следует, что каждая функция f, определенная на E, непрерывна в точке p. Действительно, каково бы ни было $\varepsilon>0$,

можно указать $\delta > 0$, такое, что единственной точкой $x \in E$, для которой $d_X(x, p) < \delta$, окажется $x = p$; тогда

$$d_Y(f(x), f(p)) = 0 < \varepsilon.$$

4.6. Теорема. *В ситуации, описанной в определении* 4.5, *предположим, что p — предельная точка множества E. Функция f непрерывна в точке p тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{x \to p} f(x) = f(p)$.

Доказательство. Это становится ясным, если сравнить определения 4.1 и 4.5.

Теперь перейдем к сложным функциям. Краткая формулировка следующей теоремы такова: непрерывная функция от непрерывной функции непрерывна.

4.7. Теорема. *Пусть X, Y, Z — метрические пространства, $E \subset X$, f отображает множество E в Y, g отображает множество значений f, а именно $f(E)$, в Z и h — отображение множества E в Z, определенное равенством*

$$h(x) = g(f(x)) \quad (x \in E).$$

Если f непрерывно в точке $p \in E$, а g непрерывно в точке $f(p)$, то h непрерывно в точке p.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку g непрерывно в точке $f(p)$, существует $\eta > 0$, такое, что

$$d_Z(g(y), g(f(p))) < \varepsilon, \text{ если } d_Y(y, f(p)) < \eta \text{ и } y \in f(E).$$

Поскольку f непрерывно в точке p, существует $\delta > 0$, такое, что

$$d_Y(f(x), f(p)) < \eta, \text{ если } d_X(x, p) < \delta \text{ и } x \in E.$$

Следовательно,

$$d_Z(h(x), h(p)) = d_Z(g(f(x)), g(f(p))) < \varepsilon,$$

если $d_X(x, p) < \delta$ и $x \in E$. Таким образом, h непрерывно в точке p.

4.8. Теорема. *Отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывно на X тогда и только тогда, когда множество $f^{-1}(V)$ открыто в X для каждого открытого множества V из Y.*

(Прообразы были определены в п. 2.4.) Это очень полезное свойство, характеризующее непрерывность.

Доказательство. Допустим, что f непрерывно на X; пусть V — открытое множество в Y. Мы должны показать, что каждая точка множества $f^{-1}(V)$ является его внутренней точкой. Итак, пусть $p \in X$ и $f(p) \in V$. Поскольку V открыто, существует $\varepsilon > 0$, такое, что $y \in V$, если $d_Y(f(p), y) < \varepsilon$, а так как f непре-

рывно в точке p, то существует $\delta > 0$, такое, что $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$, если $d_X(x, p) < \delta$. Таким образом, $x \in f^{-1}(V)$, как только $d_X(x, p) < \delta$.

Обратно, допустим, что множество $f^{-1}(V)$ открыто в X, каково бы ни было открытое множество V в Y. Зафиксируем $p \in X$ и $\varepsilon > 0$, и пусть V — множество всех $y \in Y$, таких, что $d_Y(y, f(p)) < \varepsilon$. Тогда V открыто, а поэтому и $f^{-1}(V)$ открыто; значит, существует $\delta > 0$, такое, что $x \in f^{-1}(V)$, как только $d_X(p, x) < \delta$. Но если $x \in f^{-1}(V)$, то $f(x) \in V$, так что $d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon$.

Доказательство закончено.

Обратимся теперь к комплекснозначным и векторнозначным функциям и к функциям, определенным на подмножествах пространства R^k.

4.9. Теорема. *Пусть f и g — комплексные непрерывные функции на метрическом пространстве X. Тогда $f+g$, fg и f/g непрерывны на X.*

В последнем случае мы должны, конечно, предполагать, что $g(x) \neq 0$ при всех $x \in X$.

Доказательство. В случае изолированной точки доказывать нечего. В случае предельной точки утверждение следует из теорем 4.4 и 4.6.

4.10. Теорема. (*a*) *Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — вещественные функции на метрическом пространстве X, и пусть $\mathbf{f}$ — отображение пространства X в R^k, определенное равенством*

$$\mathbf{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)) \qquad (x \in X). \tag{7}$$

Отображение $\mathbf{f}$ непрерывно тогда и только тогда, когда каждая из функций $f_1, \ldots, f_k$ непрерывна.

(*b*) *Если $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ — непрерывные отображения пространства X в R^k, то $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ и $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ непрерывны на X.*

Функции $f_1, \ldots, f_k$ называются *компонентами* отображения $\mathbf{f}$. Отметим, что $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ — отображение в R^k, тогда как $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ — *вещественная функция* на X.

Доказательство. Утверждение части (*a*) следует из неравенств

$$|f_j(x) - f_j(y)| \leqslant |\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(y)| = \left\{ \sum_{i=1}^{k} |f_i(x) - f_i(y)|^2 \right\}^{1/2}$$

при $j = 1, \ldots, k$. Часть (*b*) следует из (*a*) и теоремы 4.9.

4.11. Примеры. Если $x_1, \ldots, x_k$ — координаты точки $\mathbf{x} \in R^k$, то функции φ_i, определенные равенствами

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = x_i \qquad (\mathbf{x} \in R^k), \tag{8}$$

непрерывны на R^k, так как неравенство

$$|\varphi_i(\mathbf{x})-\varphi_i(\mathbf{y})|\leqslant|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

показывает, что в определении 4.3 можно положить $\delta=\varepsilon$. Функции φ_i иногда называются *координатными функциями*.

Повторное применение теоремы 4.9 показывает, что каждый одночлен

$$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}, \tag{9}$$

где $n_1, \ldots, n_k$ — неотрицательные целые числа, непрерывен в R^k.

То же верно в отношении функций, отличающихся от (9) постоянным множителем, так как постоянные, очевидно, непрерывны. Следовательно, каждый многочлен P, заданный равенством

$$P(\mathbf{x})=\sum c_{n_1\ldots n_k}x_1^{n_1}\ldots x_k^{n_k} \qquad (\mathbf{x}\in R^k), \tag{10}$$

непрерывен на R^k. Здесь коэффициенты $c_{n_1\ldots n_k}$ — комплексные числа, $n_1, \ldots, n_k$ — неотрицательные целые числа, а сумма содержит конечное число слагаемых.

Далее, всякая рациональная функция от $x_1, \ldots, x_k$, т. е. каждое отношение двух многочленов вида (10), непрерывна на R^k всюду, где знаменатель отличен от нуля.

Из неравенства треугольника легко получаем, что

$$||\mathbf{x}|-|\mathbf{y}||\leqslant|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y}\in R^k). \tag{11}$$

Значит, отображение, ставящее в соответствие каждому $\mathbf{x}$ величину $|\mathbf{x}|$, является непрерывной вещественной функцией на R^k.

Если $\mathbf{f}$ — непрерывное отображение метрического пространства X в пространство R^k и если φ определено на X равенством $\varphi(p)=|\mathbf{f}(p)|$, то из теоремы 4.7 следует, что φ — непрерывная вещественная функция на X.

4.12. Замечание. Мы определили понятие непрерывности для функций, заданных на *подмножестве* E метрического пространства X. Однако дополнение множества E в X не играет никакой роли в этом определении, в отличие от определения пределов функций. Тем самым мы можем говорить о непрерывных отображениях одного метрического пространства в другое (а не об отображениях подмножеств). Это упрощает формулировки и доказательства некоторых теорем. Мы уже воспользовались этим в теоремах 4.8—4.10 и будем поступать так же в разделах, посвященных компактности и связности.

Непрерывность и компактность

4.13. Определение. Отображение $\mathbf{f}$ множества E в пространство R^k называется *ограниченным*, если существует вещественное число M, такое, что $|\mathbf{f}(x)| \leqslant M$ для всех $x \in E$.

4.14. Теорема. *Пусть f — непрерывное отображение компактного метрического пространства X в метрическое пространство Y. Тогда множество $f(X)$ компактно.*

Доказательство. Пусть $\{V_\alpha\}$ — открытое покрытие множества $f(X)$. Поскольку f непрерывно, теорема 4.8 показывает, что все множества $f^{-1}(V_\alpha)$ открыты. Так как X компактно, имеется конечный набор индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, такой, что

$$X \subset f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{\alpha_n}). \tag{12}$$

Поскольку $f(f^{-1}(E)) = E$ при каждом $E \subset Y$, из (12) следует, что

$$f(X) \subset V_{\alpha_1} \cup \ldots \cup V_{\alpha_n}. \tag{13}$$

Доказательство закончено.

Замечание. Мы воспользовались соотношением $f(f^{-1}(E)) = E$, которое верно при $E \subset Y$. Если $E \subset X$, то можно утверждать лишь, что $f^{-1}(f(E)) \supset E$; равенства может и не быть.

Выведем теперь некоторые следствия из теоремы 4.14.

4.15. Теорема. *Если $\mathbf{f}$ — непрерывное отображение компактного метрического пространства X в пространство R^k, то множество $\mathbf{f}(X)$ замкнуто и ограничено. Таким образом, отображение $\mathbf{f}$ ограничено.*

Это следует из теоремы 2.41. Этот результат особенно важен тогда, когда f — вещественная функция.

4.16. Теорема. *Пусть f — непрерывная вещественная функция на компактном метрическом пространстве X и*

$$M = \sup_{p \in X} f(p), \qquad m = \inf_{p \in X} f(p). \tag{14}$$

Тогда существуют точки $p, q \in X$, такие, что $f(p) = M$ и $f(q) = m$.

Обозначения в (14) имеют следующий смысл: M — верхняя грань множества всех чисел $f(p)$, когда p пробегает X, а m — нижняя грань этого числового множества.

Утверждение теоремы можно сформулировать и так: *существуют точки p и q в X, такие, что $f(q) \leqslant f(x) \leqslant f(p)$ для всех $x \in X$*, т. е. функция f достигает своего максимума (в точке p) и минимума (в точке q).

Доказательство. По теореме 4.15 $f(X)$ — ограниченное и замкнутое множество вещественных чисел; значит, $f(X)$ содержит свою верхнюю и нижнюю грани (теорема 2.28).

4.17. Теорема. *Пусть f — непрерывное взаимно однозначное отображение компактного метрического пространства X на метрическое пространство Y. Тогда обратное отображение f^{-1}, определенное на Y равенством*

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad (x \in X),$$

есть непрерывное отображение множества Y на X.

Доказательство. Применяя теорему 4.8 к f^{-1} вместо f, мы видим, что достаточно доказать, что $f(V)$ — открытое множество в Y для каждого открытого в X множества V. Зафиксируем такое множество V.

Дополнение V^c множества V замкнуто в X и, следовательно, компактно (теорема 2.35); значит, $f(V^c)$ — компактное подмножество множества Y (теорема 4.14); поэтому оно замкнуто в Y (теорема 2.34). Поскольку f взаимно однозначно отображает X на Y, множество $f(V)$ совпадает с дополнением множества $f(V^c)$. Значит, $f(V)$ открыто.

4.18. Определение. Пусть f — отображение метрического пространства X в метрическое пространство Y. Мы будем говорить, что отображение f *равномерно непрерывно* на X, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что

$$d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon \tag{15}$$

для всех p и q из X, для которых $d_X(p, q) < \delta$.

Посмотрим, чем отличаются понятия непрерывности и равномерной непрерывности. Во-первых, равномерная непрерывность есть свойство функции на множестве, тогда как непрерывность может быть определена в одной точке. Бессмысленно спрашивать, является ли данная функция равномерно непрерывной в некоторой точке. Во-вторых, если f непрерывна на X, то для каждого $\varepsilon > 0$ и для каждой точки p множества X можно найти число $\delta > 0$, обладающее свойством, указанным в определении 4.5. Это δ зависит от ε *и от* p. Если же f равномерно непрерывна на X, то для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти *одно* число $\delta > 0$, которое годится для *всех* точек p множества X.

Очевидно, каждая равномерно непрерывная функция непрерывна. В случае компактных множеств эти два понятия, как показывает следующая теорема, равносильны.

4.19. Теорема. *Пусть f — непрерывное отображение компактного метрического пространства X в метрическое пространство Y. Тогда f равномерно непрерывно на X.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку f непрерывно, каждой точке $p \in X$ можно сопоставить положительное число $\varphi(p)$, такое, что

(16) если $q \in X$, $d_X(p, q) < \varphi(p)$, то $d_Y(f(p), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть $J(p)$ — множество всех $q \in X$, для которых

(17) $$d_X(p, q) < \frac{1}{2}\varphi(p).$$

Поскольку $p \in J(p)$, семейство всех множеств $J(p)$ образует открытое покрытие пространства X, а поскольку пространство X компактно, в нем найдется конечное множество точек $p_1, \ldots, p_n$, такое, что

(18) $$X \subset J(p_1) \cup \ldots \cup J(p_n).$$

Положим

(19) $$\delta = \frac{1}{2}\min[\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n)].$$

Тогда $\delta > 0$. (Именно здесь существенна конечность покрытия, упоминаемого в определении компактности. Минимум конечного числа положительных чисел положителен, тогда как нижняя грань бесконечного множества положительных чисел вполне может оказаться равной нулю.)

Пусть теперь q и p — точки множества X, такие, что $d_X(p, q) < \delta$. Согласно (18), существует целое m, $1 \leqslant m \leqslant n$, такое, что $p \in J(p_m)$. Значит,

(20) $$d_X(p, p_m) < \frac{1}{2}\varphi(p_m)$$

и, кроме того,

$$d_X(q, p_m) \leqslant d_X(p, q) + d_X(p, p_m) < \delta + \frac{1}{2}\varphi(p_m) \leqslant \varphi(p_m).$$

Наконец, из (16) следует, что тогда

$$d_Y(f(p), f(q)) \leqslant d_Y(f(p), f(p_m)) + d_Y(f(q), f(p_m)) < \varepsilon.$$

Доказательство закончено.

Другое доказательство намечено в упражнении 19.

Теперь мы перейдем к доказательству того, что компактность существенна в предположениях теорем 4.14, 4.15, 4.16 и 4.19.

4.20. Теорема. *Пусть E — некомпактное множество в R^1. Тогда*

(*a*) *существует неограниченная функция, непрерывная на E;*

(*b*) *существует ограниченная функция, непрерывная на E, не имеющая максимума.*

(*c*) *Если, кроме того, множество E ограничено, то существует непрерывная на E функция, не являющаяся равномерно непрерывной.*

Доказательство. Допустим сначала, что E ограничено, так что существует предельная точка x_0 множества E, не содержащаяся в E.

Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{1}{x-x_0} \qquad (x\in E). \tag{21}$$

Эта функция непрерывна на E (теорема 4.9), но, очевидно, не ограничена. Убедимся в том, что функция (21) не является равномерно непрерывной. Пусть $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ произвольны. Выберем точку $x\in E$, такую, что $|x-x_0|<\delta$. Взяв t достаточно близким к x_0, мы можем сделать разность $|f(t)-f(x)|$ больше ε, хотя $|t-x|<\delta$. Поскольку это верно при любом $\delta>0$, функция f не является равномерно непрерывной на E.

Функция g, заданная равенством

$$g(x)=\frac{1}{1+(x-x_0)^2} \qquad (x\in E), \tag{22}$$

непрерывна на E и ограничена, так как $0<g(x)<1$. Ясно, что

$$\sup_{x\in E} g(x)=1,$$

тогда как $g(x)<1$ при всех $x\in E$. Таким образом, g не имеет максимума на E.

Доказав теорему для ограниченных множеств E, предположим, что E не ограничено. Тогда свойство (*a*) выполняется для функции $f(x)=x$, а свойство (*b*) — для функции

$$h(x)=\frac{x^2}{1+x^2} \qquad (x\in E), \tag{23}$$

так как

$$\sup_{x\in E} h(x)=1$$

и $h(x)<1$ при всех $x\in E$.

Утверждение (*c*) неверно, если не предполагать, что множество E ограничено. Действительно, пусть E — множество всех целых чисел. Тогда любая функция, заданная на E, равномерно непрерывна на E. Чтобы убедиться в этом, нужно всего лишь взять $\delta<1$ в определении 4.18.

В заключение этого раздела мы покажем, что компактность существенна также и в теореме 4.17.

4.21. Пример. Пусть X — полуинтервал $[0, 2\pi)$ вещественной оси и пусть $\mathfrak{f}$ — отображение множества X на окружность Y,

состоящую из всех точек, удаленных от начала на расстояние 1, заданное равенством

$$\mathbf{f}(t) = (\cos t,\ \sin t) \quad (0 \leqslant t < 2\pi). \tag{24}$$

Непрерывность тригонометрических функций (косинуса и синуса), так же как и их периодичность, будут установлены в главе 8. Принимая эти факты без доказательства, легко видеть, что $\mathbf{f}$ — непрерывное взаимно однозначное отображение множества X на Y.

Однако обратное отображение (которое существует, так как $\mathbf{f}$ взаимно однозначно отображает X *на* Y) не непрерывно в точке $(1,0) = \mathbf{f}(0)$. Конечно, в этом примере X не компактно. (Любопытно, что $\mathbf{f}^{-1}$ не непрерывно, несмотря на то, что Y компактно!)

Непрерывность и связность

4.22. Теорема. *Если f — непрерывное отображение связного метрического пространства X в метрическое пространство Y, то множество $f(X)$ связно.*

Доказательство. Если $f(X)$ несвязно, то существуют открытые непересекающиеся множества V и W в Y, оба пересекающиеся с $f(X)$ и такие, что $f(X) \subset W \cup V$. Поскольку f непрерывно, множества $f^{-1}(V)$ и $f^{-1}(W)$ открыты в X; они, очевидно, непусты и не пересекаются, а их объединение равно X. Но это значит, что X несвязно, вопреки предположению.

4.23. Теорема. *Пусть f — непрерывная вещественная функция на сегменте $[a, b]$. Если $f(a) < f(b)$ и если c — такое число, что $f(a) < c < f(b)$, то существует точка $x \in (a, b)$, такая, что $f(x) = c$.*

Аналогичное утверждение справедливо, разумеется, и тогда, когда $f(a) > f(b)$. Грубо говоря, эта теорема означает, что непрерывная вещественная функция принимает на сегменте все промежуточные значения.

Доказательство. По теореме 2.47 сегмент $[a, b]$ связен. Значит, по теореме 4.22, $f([a, b])$ — связное подмножество пространства R^1, и остается еще раз сослаться на теорему 2.47, чтобы наше утверждение было доказано.

4.24. Замечание. На первый взгляд может показаться, что верна теорема, обратная к теореме 4.23. Иначе говоря, можно подумать, что если для любых двух точек $x_1 < x_2$ и для любого числа c, лежащего между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, найдется точка $x \in (x_1, x_2)$, такая, что $f(x) = c$, то функция f должна быть непрерывной. Однако пример 4.27 (d) показывает, что это не так.

Разрывы функций

Если x — точка из области определения функции f, в которой эта функция не является непрерывной, то мы будем говорить, что f *разрывна* в x или что f *имеет разрыв* в x. Если функция f определена на интервале или на сегменте, то удобно выделить разрывы двух типов. Прежде чем произвести эту классификацию, мы должны определить *правосторонний* и *левосторонний* пределы функции f в точке x, которые мы обозначим соответственно через $f(x+)$ и $f(x-)$.

4.25. Определение. Пусть функция f определена на интервале (a, b). Рассмотрим любую точку x, такую, что $a \leqslant x < b$. Мы будем писать

$$f(x+) = q,$$

если $f(t_n) \to q$ при $n \to \infty$ для всех последовательностей $\{t_n\}$, содержащихся в интервале (x, b), таких, что $t_n \to x$. Чтобы получить определение предела $f(x-)$ (в случае $a < x \leqslant b$), мы ограничимся последовательностями $\{t_n\}$, содержащимися в (a, x).

Ясно, что в любой точке интервала (a, b) предел $\lim\limits_{t \to x} f(t)$ существует тогда и только тогда, когда

$$f(x+) = f(x-) = \lim_{t \to x} f(t).$$

4.26. Определение. Пусть функция f определена на интервале (a, b). Если f разрывна в точке x и если $f(x+)$ и $f(x-)$ существуют, то говорят, что f имеет в точке x разрыв *первого рода*, или *простой разрыв*. В противном случае разрыв называется разрывом *второго рода*.

Возможны две разновидности простых разрывов: либо $f(x+) \neq f(x-)$ (в этом случае значение $f(x)$ несущественно), либо $f(x+) = f(x-) \neq f(x)$.

4.27. Примеры. (a) Положим

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ рационально}), \\ 0 & (x \text{ иррационально}). \end{cases}$$

Тогда f имеет разрывы второго рода во всех точках x, так как ни $f(x+)$, ни $f(x-)$ не существуют.

(b) Положим

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{ рационально}), \\ 0 & (x \text{ иррационально}). \end{cases}$$

Тогда f непрерывна в точке $x=0$ и имеет разрывы второго рода во всех остальных точках.

(*c*) Положим

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & (-3<x<-2), \\ -x-2 & (-2\leqslant x<0), \\ x+2 & (0\leqslant x<1). \end{cases}$$

Тогда f имеет простой разрыв в точке $x=0$ и непрерывна во всех остальных точках интервала $(-3,1)$.

(*d*) Положим

$$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & (x\neq 0), \\ 0 & (x=0). \end{cases}$$

Поскольку ни $f(0+)$, ни $f(0-)$ не существуют, функция f имеет разрыв второго рода в точке $x=0$. Мы еще не доказали, что $\sin x$ — непрерывная функция. Если считать это утверждение верным, то из теоремы 4.7 следует, что f непрерывна в каждой точке $x\neq 0$.

Монотонные функции

Теперь мы изучим функции, которые нигде не убывают (или нигде не возрастают) на данном интервале.

4.28. Определение. Пусть f — вещественная функция на интервале (a, b). Говорят, что f *монотонно возрастает* на (a, b), если при $a<x<y<b$ имеем $f(x)\leqslant f(y)$. Обращая последнее неравенство, мы получим определение *монотонно убывающей* функции. Класс монотонных функций состоит из убывающих и из возрастающих функций.

4.29. Теорема. *Пусть f монотонно возрастает на интервале (a, b). Тогда $f(x+)$ и $f(x-)$ существуют в каждой точке $x\in(a, b)$. Точнее,*

$$\sup_{a<t<x} f(t)=f(x-)\leqslant f(x)\leqslant f(x+)=\inf_{x<t<b} f(t). \tag{25}$$

Кроме того, если $a<x<y<b$, то

$$f(x+)\leqslant f(y-). \tag{26}$$

Аналогичные результаты, очевидно, верны и для монотонно убывающих функций.

Доказательство. По предположению, множество чисел $f(t)$, где $a<t<x$, ограничено сверху числом $f(x)$ и потому

имеет верхнюю грань, которую мы обозначим через A. Очевидно, что $A \leqslant f(x)$. Мы должны показать, что $A = f(x-)$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из определения числа A следует, что существует число $\delta > 0$, такое, что $a < x - \delta < x$ и

$$A - \varepsilon < f(x - \delta) \leqslant A. \tag{27}$$

Поскольку f монотонна, имеем

$$f(x - \delta) \leqslant f(t) \leqslant A \qquad (x - \delta < t < x). \tag{28}$$

Комбинируя неравенства (27) и (28), мы получаем

$$|f(t) - A| < \varepsilon \qquad (x - \delta < t < x).$$

Значит, $f(x-) = A$.

Вторая часть неравенства (25) доказывается точно таким же способом.

Далее, если $a < x < y < b$, то из (25) следует, что

$$f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t) = \inf_{x<t<y} f(t). \tag{29}$$

Последнее равенство получится, если применить (25) к (a, y) вместо (a, b).

Подобным же образом

$$f(y-) = \sup_{a<t<y} f(t) = \sup_{x<t<y} f(t). \tag{30}$$

Сравнение равенств (29) и (30) дает неравенство (26).

Следствие. *Монотонная функция не имеет разрывов второго рода.*

Из этого следствия вытекает, что монотонная функция может иметь разрывы только в конечном или счетном множестве точек. Вместо того чтобы сослаться на общую теорему, доказательство которой намечено в упражнении 4, мы дадим здесь простое доказательство, применимое к монотонным функциям.

4.30. Теорема. *Пусть функция f монотонна на интервале (a, b). Тогда множество точек интервала (a, b), в которых f разрывна, не более чем счетно.*

Доказательство. Допустим для определенности, что f возрастает, и пусть E — множество точек, в которых f разрывна.

Каждой точке $x \in E$ сопоставим рациональное число $r(x)$, такое, что

$$f(x-) < r(x) < f(x+).$$

Ясно, что $r(x_1) \neq r(x_2)$, если $x_1 \neq x_2$, так как при $x_1 < x_2$ мы имеем $f(x_1+) \leqslant f(x_2-)$.

Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между множеством E и подмножеством множества всех рациональных чисел. Это последнее множество, как мы знаем, счетно.

4.31. Замечание. Нужно отметить, что точки разрыва монотонной функции не обязаны быть изолированными. В самом деле, для любого счетного подмножества E интервала (a, b), которое может быть даже всюду плотным, можно построить функцию f, монотонную на (a, b), имеющую разрыв в каждой точке множества E и непрерывную во всех остальных точках интервала (a, b).

Чтобы доказать это, расположим точки множества E в последовательность $\{x_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Пусть $\{c_n\}$ — последовательность положительных чисел, такая, что ряд $\sum c_n$ сходится. Положим

$$f(x) = \sum_{x_n < x} c_n \qquad (a < x < b). \tag{31}$$

Для вычисления этой суммы нужно сложить все c_n, индексы которых таковы, что $x_n < x$. Если слева от x нет точек x_n, то сумма пуста и, следуя обычному соглашению, мы считаем ее равной нулю. Поскольку ряд (31) сходится абсолютно, порядок, в котором выписываются его члены, не существен.

Мы предоставляем читателю проверку следующих свойств функции f:

(*a*) f монотонно возрастает на (a, b);

(*b*) f разрывна в каждой точке множества E; действительно,

$$f(x_n +) - f(x_n -) = c_n;$$

(*c*) f непрерывна во всех остальных точках интервала (a, b).

Более того, нетрудно видеть, что $f(x -) = f(x)$ во всех точках интервала (a, b). Если функция f удовлетворяет этому условию, то мы будем говорить, что она непрерывна слева. Если бы в (31) суммирование производилось по всем индексам n, для которых $x_n \leqslant x$, то мы имели бы $f(x +) = f(x)$ во всех точках интервала (a, b), т. е. f была бы непрерывной справа.

Функции такого типа можно строить и другим методом; пример читатель найдет в упражнении 5 гл. 6.

Бесконечные пределы и пределы в бесконечности

Чтобы иметь возможность действовать в расширенной системе вещественных чисел, мы расширим рамки определения 4.1, сформулировав его в терминах окрестностей.

Для любого вещественного числа x мы уже определили окрестность x как любой интервал вида $(x - \delta, x + \delta)$.

4.32. Определение. При любом вещественном c множество всех вещественных чисел x, таких, что $x > c$, называется окрестностью точки $+\infty$ и обозначается $(c, +\infty)$. Аналогично, множество $(-\infty, c)$ называется окрестностью точки $-\infty$.

4.33. Определение. Пусть вещественная функция f определена на множестве E. Мы будем говорить, что

$$f(t) \to A \quad \text{при} \quad t \to x,$$

где A и x принадлежат расширенной системе вещественных чисел, если для любой окрестности U точки A существует окрестность V точки x, такая, что множество $V \cap E$ непусто и $f(t) \in U$ при всех $t \in V \cap E$, $t \neq x$.

Несложное рассуждение показывает, что это определение совпадает с определением 4.1, когда A и x вещественны.

Аналог теоремы 4.4 справедлив и в этом случае, и в его доказательстве не появляется ничего нового. Мы сформулируем его ради полноты.

4.34. Теорема. *Пусть f и g определены на E. Допустим, что*

$$f(t) \to A, \qquad g(t) \to B \ \textit{при}\ t \to x.$$

Тогда

(*a*) *если* $f(t) \to A'$, *то* $A' = A$,
(*b*) $(f+g)(t) \to A+B$,
(*c*) $(fg)(t) \to AB$,
(*d*) $(f/g)(t) \to A/B$,

если правые части в (*b*), (*c*) *и* (*d*) *имеют смысл.*

Напомним, что $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞, $A/0$ не определялись (см. определение 1.39).

Упражнения

1. Доказать, что функция f, заданная равенством

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0), \end{cases}$$

непрерывна при $x = 0$. Нарисовать график этой функции.

2. Пусть $[x]$ обозначает наибольшее из целых чисел, не превосходящих числа x, т. е. $[x]$ — такое целое число, что $x - 1 < [x] \leqslant x$; пусть $(x) = x - [x]$ обозначает дробную часть числа x. Какие разрывы имеют функции $[x]$ и (x)?

3. Пусть f — вещественная равномерно непрерывная функция на ограниченном множестве E в R^1. Доказать, что f ограничена на E.

4. Пусть f — вещественная функция, заданная на (a, b). Доказать, что множество точек, в которых f имеет простой разрыв, не более чем счетно.

Указание. Пусть E — множество, на котором $f(x-) < f(x+)$. Каждой точке x множества E сопоставим тройку (p, q, r) рациональных чисел, таких, что

(*a*) $f(x-) < p < f(x+)$,

(*b*) при $a < q < t < x$ имеем $f(t) < p$,

(*c*) при $x < t < r < b$ имеем $f(t) > p$.

Множество всех таких троек не более чем счетно. Показать, что каждой такой тройке отвечает не более одной точки множества E. Подобным образом следует действовать и в случае других типов простого разрыва.

5. Каждое рациональное число x можно записать в виде $x = m/n$, где $n > 0$, m и n — взаимно простые целые числа. Если $x = 0$, то мы полагаем $n = 1$. Рассмотрим функцию f, заданную на R^1 равенством

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ иррационально}), \\ \dfrac{1}{n} & \left(x = \dfrac{m}{n}\right). \end{cases}$$

Доказать, что f непрерывна в каждой иррациональной точке и имеет простой разрыв в каждой рациональной точке.

6. Пусть f — вещественная непрерывная функция, заданная на замкнутом множестве $E \subset R^1$. Доказать, что существует непрерывная вещественная функция g на R^1, такая, что $f(x) = g(x)$ при всех $x \in E$ (такая функция называется *непрерывным продолжением* функции f с множества E на R^1). Показать, что результат перестает быть верным, если опустить предположение замкнутости. Распространить результат на векторнозначные функции.

Указание. График функции g — прямолинейный отрезок над каждым из интервалов, составляющих дополнение множества E (ср. с упражнением 15, гл. 2). Результат остается верным, если R^1 заменить любым метрическим пространством, но доказательство уже не так просто.

7. Если функция f определена на E, то графиком f называется множество пар $(x, f(x))$, где $x \in E$. В частности, если E — множество вещественных чисел, а функция f вещественна, то графиком f служит некоторое подмножество плоскости.

Допустим, что E компактно. Доказать, что f непрерывна на E в том и только в том случае, когда ее график компактен.

8. Если $E \subset X$, а f — функция, заданная на X, то *сужением* f *на* E называется функция g, определенная на множестве E и такая, что $g(p) = f(p)$ при $p \in E$. Зададим в R^2 функции f и g равенствами: $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$,

$$f(x, y) = xy^2/(x^2 + y^4), \qquad g(x, y) = xy^2/(x^2 + y^6)$$

при $(x, y) \neq (0, 0)$. Доказать, что f ограничена на R^2, что g не ограничена в любой окрестности точки $(0, 0)$ и что f разрывна в точке $(0, 0)$; тем не менее сужения каждой из функций f и g на любую прямую в R^2 непрерывны!

9. Пусть f — непрерывное отображение метрического пространства X в метрическое пространство Y. Пусть E — замкнутое подмножество пространства Y. Доказать, что множество $f^{-1}(E)$ замкнуто в X.

10. Пусть f — непрерывная вещественная функция на метрическом пространстве X. Пусть $Z(f)$ (*нуль-множество* функции f) есть множество всех $p \in X$, в которых $f(p) = 0$. Доказать, что множество $Z(f)$ замкнуто.

11. Если E — непустое подмножество метрического пространства X, то определим расстояние от точки $x \in X$ до множества E равенством

$$\varrho_E(x) = \inf_{y \in E} d(x, y).$$

(*a*) Доказать, что $\varrho_E(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x принадлежит замыканию множества E.

(*b*) Доказать, что ϱ_E — равномерно непрерывная функция на X.

Указание. Мы имеем $\varrho_E(x_2) \leqslant d(x_2, y) \leqslant d(x_2, x_1) + d(x_1, y)$, так что

$$\varrho_E(x_2) \leqslant d(x_2, x_1) + \varrho_E(x_1).$$

12. Пусть K и F — непересекающиеся подмножества метрического пространства X, причем K компактно, F замкнуто. Доказать, что существует число $\delta > 0$, такое, что $d(p, q) > \delta$, если $p \in K$, $q \in F$.

Указание. Функция ϱ_F — положительная непрерывная функция на K.

Показать, что это утверждение может оказаться неверным, если ни одно из двух непересекающихся замкнутых множеств не компактно.

13. Пусть A и B — непустые непересекающиеся замкнутые множества в метрическом пространстве X. Положим

$$f(p) = \frac{\varrho_A(p)}{\varrho_A(p) + \varrho_B(p)} \qquad (p \in X).$$

Показать, что f — непрерывная функция на X, множество значений которой содержится в сегменте $[0, 1]$; что $f(p) = 0$ в точках

множества A и только в них; что $f(p)=1$ в точках множества B и только в них. Тем самым установлено утверждение, обратное к теореме упражнения 10: каждое замкнутое множество $A \subset X$ является нуль-множеством для некоторой вещественной непрерывной функции f на X. Полагая

$$V=f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right), \qquad W=f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right),$$

показать, что V и W открыты, не пересекаются и $A \subset V$, $B \subset W$. (Таким образом, каждое из двух непересекающихся замкнутых множеств в метрическом пространстве может быть накрыто открытым множеством так, что и эти открытые множества не пересекаются. Это свойство метрических пространств называют *нормальностью*.)

14. Назовем отображение пространства X в пространство Y *открытым*, если $f(V)$ открыто в Y, каково бы ни было открытое множество V в X.

Доказать, что каждое непрерывное открытое отображение R^1 в R^1 монотонно.

15. Пусть f и g — непрерывные отображения метрического пространства X в метрическое пространство Y, и пусть E — всюду плотное подмножество из X. Доказать, что $f(E)$ плотно в $f(X)$. Доказать, что если $f(p)=g(p)$ при всех $p \in E$, то $f(p)=g(p)$ при всех $p \in X$. (Иными словами, непрерывное отображение определяется своими значениями на всюду плотном подмножестве своей области определения.)

16. Показать, что определение равномерной непрерывности можно следующим образом сформулировать, используя понятие диаметра множества: для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что $\operatorname{diam} f(E) < \varepsilon$ для любого $E \subset X$, для которого $\operatorname{diam} E < \delta$.

17. Пусть E — плотное подмножество метрического пространства X, и пусть f — равномерно непрерывная *вещественная* функция, заданная на E. Доказать, что f имеет непрерывное продолжение с E на X (по поводу терминологии см. упражнение 6). (Единственность следует из упражнения 15.)

Указание. Для каждой точки $p \in X$ и каждого положительного целого n пусть $V_n(p)$ — множество всех $q \in E$, таких, что $d(p, q) < 1/n$. Воспользоваться упражнением 16 для доказательства того, что пересечение замыканий множеств $f(V_1(p))$, $f(V_2(p))$, ... состоит из единственной точки пространства R^1, которую мы обозначим через $g(p)$. Доказать, что функция g, определенная таким образом на X, и есть требуемое продолжение функции f.

Можно ли пространство значений R^1 заменить здесь пространством R^k? Любым компактным метрическим пространством? Любым

полным метрическим пространством? Любым метрическим пространством?

18. Вещественная функция f, заданная на (a, b), называется *выпуклой*, если

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

при любых $a < x < b$, $a < y < b$, $0 < \lambda < 1$. Доказать, что каждая выпуклая функция непрерывна. Доказать, что каждая возрастающая выпуклая функция от выпуклой функции выпукла (например, если f выпукла, то e^f тоже выпукла).

19. Провести подробно следующий вариант доказательства теоремы 4.19: если f не равномерно непрерывна, то для некоторого $\varepsilon > 0$ существуют две последовательности $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ в X, такие, что $d_X(p_n, q_n) \to 0$, но $d_Y(f(p_n), f(q_n)) > \varepsilon$. Воспользоваться теоремой 2.37, чтобы получить противоречие.